

## О СИГНАТУРЕ ТРАНЗИТИВНОГО УНИМОДУЛЯРНОГО АЛГЕБРОИДА ЛИ

© 2003 г. Я. Кубарски, А. С. Мищенко

Представлено академиком Е.Ф. Мищенко 31.03.2003 г.

Поступило 31.03.2003 г.

Алгеброиды Ли возникают как инфинитезимальные объекты для группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений ([1], см. также [2, 3]), трансверсально полных слоений (ТС-слоений), незамкнутых подгрупп Ли [4], многообразий Пуассона и др. Их алгебраические аналоги известны как псевдоалгебры Ли, называемые также алгебрами Ли–Райнхарта.

Алгеброид Ли на многообразии  $M$  состоит из тройки  $L = (L, [\cdot, \cdot], \gamma_L)$ , где  $L$  есть векторное расслоение на многообразии  $M$ , на пространстве сечений  $(\text{Sec } L, [\cdot, \cdot])$  которого задана структура  $\mathbb{R}$ -алгебры Ли, отображение  $\gamma_L : L \rightarrow TM$ , называемое анкером, является линейным гомоморфизмом векторных расслоений, для которого выполняется условие Лейбница

$$\begin{aligned} [\xi, f \cdot \eta] &= f \cdot [\xi, \eta] + \gamma_L(\xi)(f) \cdot \eta, \\ f &\in C^\infty(M), \quad \xi, \eta \in \text{Sec } L. \end{aligned}$$

Анкер сохраняет операцию коммутирования сечений,  $\gamma_L \circ [\xi, \eta] = [\gamma_L \circ \xi, \gamma_L \circ \eta]$  [5]. Алгеброид Ли называется транзитивным алгеброидом, если анкер  $\gamma_L$  является послойным эпиморфизмом. Для транзитивных алгеброидов Ли имеет место точная последовательность Атья  $0 \rightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \rightarrow 0$ , в которой ядро анкера  $\mathfrak{g} = \ker \gamma_L$  образует векторное расслоение, являющееся расслоением алгебры Ли. Это расслоение называется присоединенным к расслоению  $L$ . Слоем  $\mathfrak{g}_x$  расслоения  $\mathfrak{g}$  в каждой точке  $x \in M$  служит алгебра Ли с естественной операцией коммутирования. Алгебра Ли  $\mathfrak{g}_x$  называется изотропной алгеброй Ли алгеброида  $L$  в точке  $x \in M$ . Любой транзитивный алгеброид Ли  $L$  на стягиваемом многообразии  $M$  изоморфен тривиальному алгеброиду Ли [6], [7].

С каждым алгеброидом Ли  $L$  связывается алгебра когомологий  $H_L(M)$ , задаваемая с помощью дифференциальной градуированной алгебры  $L$ -дифференциальных форм  $(\Omega_L(M), d_L)$  на пространстве сечений  $\text{Sec } L$  алгеброида.

Для тривиального алгеброида Ли  $TM$  – касательного расслоения многообразия  $M$  – дифференциал  $d_{TM}$  совпадает с дифференциалом  $d_M$  дифференциальных форм на многообразии  $M$ .

Нетривиальным примером алгеброида служит расслоение  $L = A(P) = TP/G$  для некоторого главного  $G$ -расслоения  $P \rightarrow M$ . В этом случае  $\Omega_L(M) \cong \Omega^r(P) \hookrightarrow \Omega(P)$ , где  $\Omega^r(P)$  есть пространство  $G$ -правоинвариантных дифференциальных форм на  $P$ , а  $H_L(M) \cong H(\Omega^r(P))$ . Гомоморфизм  $i$  является изоморфизмом в случае, когда группа  $G$  связана и компактна.

Нас будут интересовать транзитивные алгеброиды Ли, алгебра когомологий  $H_L(M)$  которых снабжена двойственностью Пуанкаре [8]. Транзитивные унимодулярные, инвариантно ориентированные (TUIO) алгеброиды Ли [9] являются примерами таких алгеброидов. Пусть  $\varepsilon \in \text{Sec } \wedge^n \mathfrak{g}$  есть некоторая ориентирующая форма расслоения  $\mathfrak{g}$ . Фундаментальную роль играет послойный интеграл [9]  $\int_L : \Omega_L^*(M) \rightarrow (M)\Omega_{dR}^{*-n}$ , который приводит к гомоморфизму в когомологиях

$$\int_L^{\#} : H_L^*(M) \rightarrow H_{dR}^{*-n}(M).$$

**П р и м е р ы.** 1. Алгеброид Ли  $A(P)$  главного  $G$ -расслоения  $P \rightarrow M$  является TUIO-алгеброидом Ли [9] в случае, когда группа  $G$  обладает свойством:  $\det(\text{Ad}_G a) = +1$ ,  $a \in G$ .

2. Алгеброид Ли  $A(M; \mathcal{F})$  трансверсально параллелизуемого слоения на компактном односвязном многообразии является TUIO-алгеброидом Ли.

3. Алгеброид Ли  $A(G, H)$  некоторой незамкнутой подгруппы Ли  $H$  с группе Ли  $G$  (т.е. алгеброид Ли соответствующего трансверсально полного

---

Институт математики  
технического университета в Лодзи,  
Польша  
Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

слоения левых классов смежности подгруппы  $H$  в группе  $G$  является ГИЮ-алгеброидом Ли. При этом присоединенное расслоение алгебр Ли этого алгеброида Ли  $A(G; H)$  является тривиальным расслоением абелевых алгебр Ли [4].

Предположим, что многообразие  $M$  связно и ориентированно. Тогда скалярное произведение Пуанкаре

$$H_L^*(M) \times H_{L,c}^{m+n-*}(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_L \alpha \wedge \beta = \int_M \left( \int_L \alpha \wedge \beta \right)$$

является невырожденным, т.е.  $H_L(M) \cong (H_{L,c}(M))^*$ .

В случае, когда многообразие  $M$  является компактным связным ориентированным многообразием и  $m+n=4k$ , получается симметрическая квадратичная форма на когомологиях, и ее сигнатура обозначается через  $\text{Sign}_\varepsilon(L)$  и называется сигнатурой алгеброида  $L$ . В остальных случаях (т.е. когда  $m+n \neq 0 \pmod{4}$ ) по определению полагаем  $\text{Sign}_\varepsilon(L) = 0$ .

В работе [8] была поставлена задача вычисления сигнатуры  $\text{Sign}_\varepsilon(L)$  и нахождения условия, при которых эта сигнатура тривиальна,  $\text{Sign}_\varepsilon(L) = 0$ .

Для изучения сигнатуры алгеброида  $L$  мы используем технику спектральных последовательностей комплекса Чеха-де Рама  $K^{**}$ , дифференциальных форм алгеброида  $L$ , аналогичного комплексу Чеха-де Рама для многообразия, и воспользуемся известными методами и утверждениями из работы [10].

Рассмотрим произвольный транзитивный алгеброид Ли  $L$  на многообразии  $M$  с изотропными алгебрами Ли  $\mathfrak{g}_x$ , которые изоморфны данной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . Если открытое подмножество  $U \subset M$  диффеоморфно евклидову пространству  $\mathbb{R}^m$ , то ограничение  $L|_U$  алгеброида  $L$  на подмножество  $U$  является тривиальным алгеброидом Ли, точнее, изоморфно тривиальному алгеброиду  $TU \times \mathfrak{g}$ . Обозначим для краткости алгебру когомологий  $H_{L|U}(U)$  через  $H_L(U)$ . Согласно формуле Кюннета, имеем (см. [8])

$$H_L(U) \cong H(\mathfrak{g}) \otimes H(U) \cong H(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим так называемое хорошее покрытие  $\mathbb{U} = \{(U_\alpha)_{\alpha \in J}\}$  многообразия  $M$ , т.е. когда все множества покрытия  $U_\alpha$  и все их непустые конечные пересечения  $\bigcap_i U_{\alpha_i}$  диффеоморфны евклидову пространству  $\mathbb{R}^m$ . Образует двойной комплекс типа Чеха-де Рама

$$K^{p,q} = C^p(\mathbb{U}, \Omega_L^q) := \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega_L^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}),$$

$p, q \geq 0$ , с естественной мультипликативной структурой  $\cup: K^{p,q} \times K^{r,s} \rightarrow K^{p+r, q+s}$ .

Этот комплекс имеет два естественных граничных гомоморфизма: горизонтальный  $d$  и вертикальный  $\delta$ . Горизонтальный гомоморфизм  $d: C^p(\mathbb{U}, \Omega_L^q) \rightarrow C^p(\mathbb{U}, \Omega_L^{q+1})$  действует как внешнее дифференцирование дифференциальных форм на алгеброиде  $L: d = (-1)^p d_L$ . Вертикальный гомоморфизм  $\delta: C^p(\mathbb{U}, \Omega_L^q) \rightarrow C^{p+1}(\mathbb{U}, \Omega_L^q)$  действует как кограничный оператор в коцепях покрытия

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} | U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}.$$

Гомоморфизмы  $d$  и  $\delta$  являются антидифференцированиями степени  $+1$  по отношению к суммарной градуировке. Поэтому набор  $(K, K^{p,q}, \cup, d, \delta)$  образует двойной комплекс первого квадранта с мультипликативной структурой. Суммарный оператор  $D = d + \delta$  тоже является антидифференцированием. Комплекс дифференциальных форм алгеброида вкладывается в двойной комплекс  $K, r: \Omega_L^* \rightarrow K^{0,*} \subset K^{(*)}$  и порождает гомоморфизм когомологий  $r^\#: H_L^*(M) \rightarrow H^{(*)}(K, D)$ .

Аргументированная строка в двойном комплексе

$$0 \rightarrow \Omega_L^q(M) \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} \dots$$

является точной. Доказательство стандартно получается использованием разбиения единицы  $\{\rho_\alpha\}$ , подчиненного покрытию  $\mathbb{U} = \{U_\alpha\}$ , и оператора цепной гомотопии  $H: K^{p,q} \rightarrow K^{p-1, q}$ ,  $(H\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$ . Следовательно, гомоморфизм  $r^\#: H_L^*(M) \rightarrow H^{(*)}(K, D)$  является изоморфизмом градуированных алгебр когомологий.

Рассмотрим убывающую фильтрацию  $K_j = \bigoplus_{p \geq j, q \geq 0} K^{p,q}$ . Согласно общей конструкции спектральной последовательности (см, например, [11, 1.4.2]), для указанной фильтрации можно построить спектральную последовательность градуированных дифференциальных колец  $(E_s^{p,q}, d_s)$ ,  $d_s: E_s^{p,q} \rightarrow E_s^{p+s, q-s+1}$  для которых  $E_{s+1}^{p,q} = H(E_s^{p,q}, d_s)$ , причем кольцо  $E_\infty^{p,q}$  присоединено к кольцу кого-

мологий  $H(K, d)$  по отношению к фильтрации, индуцированной фильтрацией  $\{K_j\}$

Первые два члена спектральной последовательности  $(E_s, d_s)$  выглядят следующим образом:  $(E_0^{p,q} = K^{p,q} = C^p(\mathbb{U}, \Omega_L^q), d_0 = d = (-1)^j d_L; E_1^{p,q} = H^{p,q}(K, d) = C^p(\mathbb{U}, \mathcal{H}_L^q), d_1 = \delta^\#: E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ , где  $\mathcal{H}_L^* = (U \mapsto H_L^*(U))$  есть предпучок когомологий типа Лере, являющийся локально-постоянным пучком на хорошем покрытии со значением в группе (точнее, в алгебре)  $H^*(\mathfrak{g})$ . Следовательно, второй член спектральной последовательности  $E_s^{j,i}$  вычисляется по формуле

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(H(K, D), \delta^\#) = H_{\delta^\#}^j(\mathbb{U}, \mathcal{H}_L^q).$$

В присоединенном расслоении  $\mathfrak{g}$  со слоем изотропная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  функции склейки  $\lambda_x$  на пересечении карт являются непрерывными функциями со значением в структурной группе  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ , топология в которой отлична от классической и задается по следующему правилу. Пусть  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  – произвольный автоморфизм алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а  $\varphi^*: H^*(\mathfrak{g}) \rightarrow H^*(\mathfrak{g})$  обозначает индуцированный автоморфизм групп когомологий. Через  $\text{Aut}_h(\mathfrak{g})$  обозначим стационарную подгруппу действия в когомологиях, т.е. подгруппу таких автоморфизмов  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , для которых  $\varphi^* = \text{Id}$ . Изменим топологию в группе  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ , добавив к открытым множествам еще одно – подгруппу  $\text{Aut}_h(\mathfrak{g})$ . Группу  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  с новой топологией обозначим через  $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$ . Ясно, что фактор-группа  $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})/\text{Aut}_h(\mathfrak{g})$  является дискретной группой, а расслоение  $H^*(\mathfrak{g})$  является плоским расслоением, т.е. все функции склейки являются локально-постоянными функциями.

Предположим, что предпучок  $\mathcal{H}_L^*$  является постоянным на некотором хорошем покрытии  $\mathbb{U}$ , т.е. представление монодромии фундаментальной группы многообразия  $M$  для присоединенного расслоения изотропных алгебр Ли тривиально. Тогда

$$E_2^{j,i} = H_{\delta^\#}^i(\mathbb{U}, \mathcal{H}_L^i) \cong H^i(\mathbb{U}, H^i(\mathfrak{g})) \cong H^i(\mathbb{U}, \mathbb{R}) \otimes H^i(\mathfrak{g}) \cong H_{dR}^i(M) \otimes H^i(\mathfrak{g}).$$

**Лемма 1.** [10]. *Если дифференциальная градуированная алгебра  $(A^*, \cup, d)$  является алгеброй Пуанкаре, дифференциал которой является дифференциалом Пуанкаре, то ее градуированная алгебра когомологий  $(H^*(A), \cup)$  является алгеброй Пуанкаре относительно того же элемента  $0 \neq \xi \in A^{n_0} = H^{n_0}(A, d)$  и выполнено равенство  $\text{Sigh}A = \text{Sign}H(A)$ .*

Отсюда следует, что если  $L$  есть транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном многообразии  $M$ , у которого изотропные алгебры Ли  $\mathfrak{g}|_x \cong \mathfrak{g}$  унимодулярны, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения  $\mathfrak{g}$  изотропных алгебр Ли тривиальна, то для спектральной последовательности хорошего покрытия имеют место равенства

$$0 = \text{Sign}M \cdot \text{Sign}\mathfrak{g} = \text{Sign}E_2 = \dots = \text{Sign}E_\infty.$$

Осталось доказать равенство  $\text{Sign}E_\infty = \text{Sign}H_L(M)$ , которое следует из сравнения убывающей фильтрации с присоединенной градуировкой. В результате имеет место следующая

**Теорема 2** (теорема Черна–Хирцебруха–Серра для транзитивных алгеброидов Ли). *Пусть  $L$  – произвольный транзитивный унимодулярный инвариантно ориентированный алгеброид Ли на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропная алгебра Ли равна  $\mathfrak{g}$ , а группа монодромий тривиальна. Тогда*

$$\text{Sign}L = \text{Sign}E_2 = \text{Sign}M \cdot \text{Sign}\mathfrak{g} = 0.$$

В частности, теорема 2 выполняется в следующих случаях:

- 1) многообразие  $M$  является односвязным,
- 2) изотропная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  есть простая алгебра одного из типов  $B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2$  (см. [12, добавление Д. 8]),
- 3) присоединенное расслоение алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  тривиально по отношению к структурной группе  $\text{Aut}^s(\mathfrak{g})$ . Например, когда алгеброид Ли  $A(G; H)$  есть алгеброид Ли трансверсально полного слое-ния левых классов смежности незамкнутой подгруппы Ли  $H$  в произвольной группе Ли  $G$ .

Полное изложение будет опубликовано позже, где будет показано, что сигнатура транзитивного унимодулярного алгеброида Ли тривиальна и в случае конечной монодромии, а также приведен пример алгеброида Ли (с бесконечной монодромией) с нетривиальной сигнатурой.

Работа была частично представлена на Международном конгрессе математиков в Пекине (август 2002 г.)

Первый автор работал при поддержке гранта, присужденного факультетом технической физики, вычислительной техники и прикладной математики Технического университета Лодзи (Польша), второй автор – при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–00574) и фонда “Университеты России” (контракт УР.04.03.009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pradines J.* // Atti Convegno Intern. Geom. Differenz. 1967. V. 9. P. 1–4.
2. *Kubardki J.* In: Publ. Dep. Math. Univ. de Lyon 1. Lyon: 1989. V. 1/A. P. 1–66.
3. *Kubarskii J.* // Trans. AMS. 1996. V. 348. № 6. P. 2151–2167.
4. *Kubarski J.* // Rev. mat. Univ. comput. Madrid. 1991. V. 4. № 2/3. P. 159–176.
5. *Balcerzak B., Kubarski J., Walas W.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry. Banach Center Publ.; W-wa: 2001. Inst. Math. Polish Acad. Sci. V. 54. P. 71–97.
6. *Mackenzie K.* Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry. Lect. Note Ser. Cambridge: London Math. Soc. 1987. V. 124.
7. *Kubarski J.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry. W-wa: 2001. Sci. Banach Center Publ.; Inst. Math. Polish Acad. V. 54. P. 135–173.
8. *Kubarskii J.* // Topol. and Its Appl. 2002. V. 121. P. 333–355.
9. *Kurarsi J.* In: Proc. Conf. on Differential Geometry. New Developments in Differential Geometry. Budapest. 27–30 July 1996. N.Y.: Kluwer, 1999. P. 173–202.
10. *Chern S.S., Hirzebruch F., Serre J.-P.* // Proc. AMS. 1957. V. 8. P. 587–596.
11. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит. 1961.
12. *Humphreys J.E.* Linear Algebraic Groups. N.Y.: Springer, 1975.