Lecture, I Konferencja GEOMETRIA I TOPOLOGIA ROZMAITOŚCI
Konopnica, 26-29 III 1998

ALGEBROID LIEGO ROZMAITOŚCI POISSONA Z FOLIACJĄ CHARAKTERYSTYCZNĄ KOWYMIARU 1

JAN KUBARSKI

21 Marzec 1998.

1. Ogólna postać regularnych algebroidów Liego

Algebroidy Liego wprowadzone były w 1967 r. przez J.Pradines w pracy [P1] (patrz także [P2]) w kontekście badania grupoidów różniczkowych. Następnie, zostały znalezione inne źródła algebroidów Liego, np. TC-foliacje [MO1, 1977r.] oraz rozmaitości Poissona [C-D-W, 1986r.]. TC-foliacje są źródłem niecałkowalnych tranzytywnych algebroidów Liego [A-M1], [A-M1]. W tym referacie jesteśmy zainteresowani przypadkiem nietranzytywnym ale regularnym (tzn. algebroidami nad rozmaitościami sfoliowanymi).

Definicja 1.1. Przez *regularny algebroid Liego* nad rozmaitością sfoliowaną (M,F) (F jest C^∞ dystrybucją inwolutywną stałego rzędu na rozmaitości parazwartej kl. C^∞) [K3] rozumiemy układ

$$(A, [\![\cdot,\cdot]\!], \gamma)$$

składający się z wiązki wektorowej A na M i odwzorowań

$$[\![\cdot,\cdot]\!]: \operatorname{Sec} A \times \operatorname{Sec} A \to \operatorname{Sec} A, \quad \gamma : A \to TM,$$

takich, że

(a) $(\operatorname{Sec} A, [\![\cdot,\cdot]\!])$ jest rzeczywistą algebrą Liego,
(b) γ, zwane *kotwicą*, jest silnym homomorfizmem wiązek wektorowych takim, że $\operatorname{Im}\gamma = F$,
(c) $\operatorname{Sec}\gamma : \operatorname{Sec} A \to \mathfrak{X}(M)$, $\xi \mapsto \gamma\circ\xi$, jest homomorfizmem algebr Liego
(d) $[\![\xi, f\cdot\eta]\!] = f\cdot[\![\xi,\eta]\!] + (\gamma\circ\xi)(f)\cdot\eta$, $\xi,\eta\in \operatorname{Sec} A$, $f\in\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Jądro kotwicy, $\boldsymbol{g} := \ker\gamma$, jest wiązką wektorową posiadającą w każdym włóknie $\boldsymbol{g}_{|x}$ strukturę algebry Liego $[\cdot,\cdot]_x$ w/g wzoru

$$[v,w]_x = [\![\xi,\eta]\!](x),$$

gdzie ξ,η są cięciami globalnymi (wystarcza lokalnymi z otoczenia punktu x) takimi, że $\xi(x) = v$, $\eta(x) = w$. Oczywiście, struktury te wzięte dla wszystkich punktów rozmaitości M tworzą gładki tensor $[\cdot,\cdot]$ (mówimy wówczas,że układ $(\boldsymbol{g}, \{[\cdot,\cdot]\})$ tworzy Σ-wiązkę algebr Liego). Wiązka $\boldsymbol{g}$ jest zwana *wiązką stowarzyszoną* z algebroidem Liego A i nad każdym liściem foliacji F jest tzw. "LAB' ("Lie algebra bundle") *wiązką algebr Liego.* Oznacza to, że algebry Liego $\boldsymbol{g}_{|x}$ i $\boldsymbol{g}_{|y}$ dla punktów x i y leżących na jednym liściu foliacji F są izomorficzne. Krótki ciąg dokładny

$$0\to \boldsymbol{g} \hookrightarrow A \xrightarrow{\gamma} F \to 0$$

jest zwany *ciągiem Atiyah algebroidu Liego A*. Wiązka A jako wiązka wektorowa jest izomorficzna z sumą prostą $\boldsymbol{g} \bigoplus F$, przy czym, izomorfizm ten można zadać za pomocą rozszczepienia $\lambda : F \to A$ tego dokładnego ciągu, $\gamma \circ \lambda = id_F$ nazywanego *koneksją w algebroidzie A*. Każda koneksja λ wyznacza dwa obiekty

- *formę krzywizny*

$$\Omega \in \Omega_F^2 \left(M; \boldsymbol{g}\right) = Sec\left(\bigwedge^2 F^* \bigotimes \boldsymbol{g}\right),$$

  będący 2-formą tangentialną na rozmaitości sfoliowanej $(M;F)$, określoną wzorem

$$\Omega\left(X,Y\right) = \lambda \circ [X,Y] - [\![\lambda \circ X, \lambda \circ Y]\!], \quad X, Y \in \mathcal{X}\left(F\right);$$

- *stowarzyszoną częściową pochodną kowariantą*

$$\nabla : Sec\boldsymbol{g} \longrightarrow \Omega_F^1 \left(M; \boldsymbol{g}\right)$$

  w wiązce stowarzyszonej $\boldsymbol{g}$ określoną wzorem

$$\nabla_X \nu = [\![\lambda \circ X, \nu]\!], \quad X \in \mathfrak{X}\left(F\right), \ \nu \in Sec\boldsymbol{g}.$$

Nawias Liego $[\![\cdot,\cdot]\!]$ w przestrzeni cięć $SecA$ algebroidu Liego jest wyznaczony jednoznacznie przez obiekty Ω i ∇, mianowicie:

$$(1) \qquad [\![\lambda \circ X + \nu, \lambda \circ Y + \mu]\!] = \lambda \circ [X,Y] - \Omega\left(X,Y\right) + \nabla_X \mu - \nabla_Y \nu + [\nu, \mu],$$

dla $X, Y \in \mathfrak{X}\left(F\right)$, $\nu, \mu \in Sec\boldsymbol{g}$.

Pochodna kowariantna ∇ indukuje w stndartowy sposób tzw. *zewnętrzną pochodną kowariantną* w module tangentialnych form różniczkowych o wartościach w wiązce algebr Liego $\boldsymbol{g}$. Złożenie ∇^2 jest tensorem krzywizny pochodnej kowariantnej ∇.

Stwierdzenie 1.2. *Forma krzywizny* Ω *i pochodna kowariantna* ∇ *spełniają następujące związki:*

(I) $\nabla^2 \nu = -[\Omega, \nu]$, *(tożsamość Ricciego),*
(II) $\nabla_X [\nu, \mu] = [\nabla_X \nu, \mu] + [\nu, \nabla_X \mu]$, ($\nabla$ *jest więc tzw.* Σ*-koneksją w* Σ*-wiązce* $(\boldsymbol{g}, \{[\cdot,\cdot]\})$),
(III) $\nabla \Omega = 0$, (*tożsamość Bianchi*). $\square$

Okazuje się, że i na odwrót, zadanie rozmaitości sfoliowanej (M,F) i układu $(\boldsymbol{g}, \nabla, \Omega)$ składającego się z

- Σ-wiązki $(\boldsymbol{g}, \{[\cdot,\cdot]\})$ algebr Liego,
- częściowej pochodnej kowariantnej ∇ nad foliacją F,
- tangentialnej 2-formy $\Omega \in \Omega_F^2 \left(M; F\right)$,

spełniającego powyższe trzy postulaty (I)-(III) określa w dowolnej wiązce A występującej w krótkim ciągu dokładnym $0 \to \boldsymbol{g} \hookrightarrow A \xrightarrow{\gamma} F \to 0$ i dowolnym jego roszczepieniu $\lambda : F \to A$ strukturę algebroidu Liego wzorem (1) taką, że $\boldsymbol{g}$ jest jego stowarzyszoną wiązką algebr Liego zaś Ω i ∇ są odpowiednio formą krzywizny i stowarzyszoną pochodną. Dla różnych A i λ otrzymane algebroidy Liego są izomorficzne. Możemy więc wziąć wiązke $A = \boldsymbol{g} \bigoplus F$ i rozszczepienie $\lambda\left(v\right) = \left(0, v\right)$. Otrzymujemy stąd charakteryzację wszystkich regularnych algebroidó Liego.

Stwierdzenie 1.3. *Każdy regularny algebroid Liego nad rozmaitością sfoliowaną $(M;F)$ o wiązce stowarzyszonej $\boldsymbol{g}$ jest izomorficzny z $\boldsymbol{g}\bigoplus F$ ze strukturą określoną za pomocą Ω i ∇ spełniających* (I)-(III) *wzorem*

$$[\![(\nu,X)\,,(\mu,Y)]\!] = (-\Omega\,(X,Y) + \nabla_X\mu - \nabla_Y\nu + [\nu,\mu]\,,[X,Y])\,.$$

□

2. Abelowe algebroidy Liego

Załóżmy, że algebry Liego $\boldsymbol{g}_{|x}$ są abelowe $[v,w]=0$. Poniżej okaż się, ż rozmaitości Poissona prowadzą do abelowych algebroidó Liego. Ze wzoru (I) otrzymujemy

- $\nabla^2\nu = 0$ *dla dowolnego cięcia* $\nu \in Sec\boldsymbol{g}$, *co zgodnie z równością* $\nabla^2 = R$ *równoważne jest temu, że częściowa pochodna kowariantna* ∇ *jest płaska.*

Poza tym

- *odpowiadające różnym koneksjom* λ^1 *i* λ^2 *częściowe pochodne kowariantne* ∇^1 *i* ∇^2 *są identyczne,* $\nabla^1 = \nabla^2$.
  Oznacza to że w abelowym przypadku stowarzyszona pochodna kowariantna ∇ jest pojęciem wewnętrznym algebroidu A.

Zgodnie z powyższym

Stwierdzenie 2.1. *Każdy abelowy algebroid Liego nad rozmaitością sfoliowaną $(M;F)$ zadany jest za pomocą układu $(\boldsymbol{g},\nabla,\Omega)$ w którym*

- $\boldsymbol{g}$ *jest dowolną Σ-wiązką algebr Liego,*
- ∇ *jest częściową płaską pochodną kowariantną w $\boldsymbol{g}$ nad foliacją F,*
- Ω *jest tangencjalną 2-formą* $\Omega \in \Omega^2_F(M;\boldsymbol{g})$ *taką, że* $\nabla\Omega = 0$.

Jest on izomorficzny z $\boldsymbol{g}\bigoplus F$ ze strukturą

$$[\![(\nu,X)\,,(\mu,Y)]\!] = (-\Omega\,(X,Y) + \nabla_X\mu - \nabla_Y\nu,[X,Y])\,.$$

3. Abelowe algebroidy Liego rzędu 1 z trywialną wiązką algebr Liego

Definicja 3.1 Dowolny regularny algebroid Liego A o stowarzyszonej wiązce $\boldsymbol{g}$ nazywamy *niezmienniczo zorientowany* jeżeli
1. algebry Liego $\boldsymbol{g}_{|x}$ są unimodularne,
2. zadane jest cięcie $\varepsilon \in \bigwedge^n \boldsymbol{g}^*$ $(n = rank\boldsymbol{g})$ nigdzie nie równe zeru niezmiennicze względem wewnętrznej reprezentacji.

Algebroid Liego rzędu 1 (tzn. $\boldsymbol{g}_{|x} = \mathbb{R}$) spełnia warunek (1). Kiedy może spełnić drugi? Czyli, kiedy istnieje cięcie $\varepsilon \in Sec\boldsymbol{g}$ nigdzie nie równe zeru niezmiennicze ze względu na wewnętrzną reprezentację $ad_A : A \to A\,(\boldsymbol{g})$ określoną wzorem $ad_A\,(\xi)\,(\nu) = [\![\xi,\nu]\!]$?

Lemat 3.2. *Cięcie ε jest niezmiennicze gddy jest ∇-płaskie,* $\nabla\varepsilon = 0$. □

Poniższe Twierdzenie opisuje wszystkie takie algebroidy Liego.

Twierdzenie 3.3. *Regularny algebroidy Liego nad $(M;F)$ rzędu 1 może być niezmienniczo zorientowany gddy jest izomorficzny $\mathbb{R}\times F$ ze strukturą zadaną wzorem*

$$[\![(f,X),(g,Y)]\!] = (-\Omega(X,Y) + \partial_X g - \partial_Y f, [X,Y]).$$

za pomocą tangentialnej 2-fromy rzeczywistej $\Omega \in \Omega_F^2(M)$ zamkniętej (zgodnie ze wzorem (2)) $\nabla\Omega = d\Omega = 0$. Koneksja

$$\lambda : F \longrightarrow \mathbb{R}\times F,\ v \longmapsto (0,v),$$

ma Ω za tensor krzywizny zaś ∂ jest stowarzyszoną cąęściową pochodną kowariantną w $\boldsymbol{g} = M\times\mathbb{R}$.

Pytanie. Które z tych ostanio wymienionych algebroidów w przypadku foliacji F kowymiaru 1 są izomorficzne z algebroidem pewnej regularnej struktury Poissona o foliacji charakterystycznej F ?

Zajmiemy się tym w ostatnim paragrafie.

4. Ciąg Gysina

Algebroid niezmienniczo zorientowany ma interesujące własności pozwalające utworzyć tzw.ciąg Gysina wiążący ze sobą poszczególne grupy kohomologii tego algebroidu. Są nimi własności operatora całkowania włóknistego opisane niżej.

Weźmy pod uwagę algebroid Liego $A = \mathbb{R}\times F$ opisany w twierdzeniu (3.3) o ciągu Atiyah

$$0 \longrightarrow M\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times F \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Niech 1 i $\mathbf{1}^*$ oznaczają stałe cięcia wiązek $\boldsymbol{g} = M\times\mathbb{R}$ i $\boldsymbol{g}^* = M\times\mathbb{R}^*$ równe 1 i id odpowiednio. Cięcia te są niezmiennicze względem wewnętrznej reprezentacji ad_A. W szczególności $\mathbf{1}^*$ jest w dziedzinie homomorfizmu Cherna-Weila h_A algebroidu Liego (określonego w pracy [K3]) oraz

$$h_A(\mathbf{1}^*) = [\Omega] \in H_F^2(M).$$

Stąd otrzymujemy wniosek

Wniosek 4.1 J*eżeli tangentialna 2-forma Ω nie jest dokładna to algebroid Liego $\mathbb{R}\times F$ nie dopuszcza żadnej płaskiej koneksji.* □

Rozważmy przestrzeń form

$$\Omega_{\mathbb{R}\times F}(M) \cong \bigwedge \mathbb{R}^* \bigotimes \Omega_F(M). \tag{4.1}$$

Każda $k+1$ forma Φ^{k+1} ma jednoznacze przedstawienie

$$\Phi^{k+1} = 1\otimes\varphi^{k+1} + \mathbf{1}^*\otimes\varphi^k$$

w którym φ^k i φ^{k+1} są formami tangentialnymi na (M,F) stopnia k i $k+1$. Przez izomorfizm (4.1) przenosimy różniczkę d_A otrzymując nastepujące formuły

$$\begin{aligned} d_A\left(1\otimes\varphi^{k+1}\right) &= 1\otimes d_F\left(\varphi^{k+1}\right), \\ d_A\left(\mathbf{1}^*\otimes\varphi^k\right) &= 1\otimes\left(\Omega\wedge\varphi^k\right) - \mathbf{1}^*\otimes d_F\left(\varphi^k\right). \end{aligned}$$

W szczególności

$$d_A\left(\mathbf{1}^* \otimes 1\right) = 1 \otimes \Omega.$$

Tak więc

$$H_A(M) \cong H\left(\bigwedge \mathbb{R}^* \bigotimes \Omega_F(M), d_A\right).$$

Definicja 4.2. Definiujemy następujący operator całkowania włóknistego

$$\int_A : \Omega^*_{\mathbb{R}\times F}(M) \longrightarrow \Omega^{*-1}_F(M)$$

wzorem

$$\begin{aligned} \int_A f &= 0, \quad f \in \Omega^0_{\mathbb{R}\times F}(M) = C^\infty(M), \\ \left(\int_A \Phi^{k+1}\right)(x; v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) &= (-1)^k \Phi^{k+1}(x; (1_x, 0) \wedge (0_x, v_1) \wedge \ldots \wedge (0_x, v_k)). \end{aligned}$$

Równoważnie

$$\int_A \left(1 \otimes \varphi^{k+1} + \mathbf{1}^* \otimes \varphi^k\right) = (-1)^k \varphi^k.$$

W szczególności

$$\int_A \left(\mathbf{1}^* \otimes 1\right) = +1.$$

Jest to szczególny przypadek rozważań ogólniejszych [K7].

Twierdzenie 4.3. *Własności całkowania włóknistego:*

- *podprzestrzeń* $Ker \int_A$ *jest* d_A*-stabilna,*
- $Ker \int_A = \operatorname{Im} \gamma^{*\cdot}$,
- *operator całki włóknistej* $\int_A$ *komutuje z różniczkami*

$$\int_A \circ\, d_A = d_F \circ \int_A,$$

zatem indukuje homomorfizm na kohomologiach

$$\int_A^\# : H^*_A(M) \longrightarrow H^{*-1}_F(M),$$

- $\gamma^\# : H_F(M) \to H\left(Ker \int_A\right)$ *jest izomorfizmem algebr.* □

Rozważmy krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow Ker \int_A \longrightarrow \Omega_A(M) \xrightarrow{\int_A} \Omega_F(M) \longrightarrow 0$$

i indukowany przez niego długi ciąg w kohomologiach

$$\cdots \to H^{k+1}_A \xrightarrow{\int_A^\#} H^k_F(M) \xrightarrow{\partial} H^{k+2}\left(Ker \int_A\right) \xrightarrow{i^\#} H^{k+2}_A(M) \to \cdots$$

gdzie ∂ jest homomorfizmem łączącym. Jest on zadany bezpośrednio wzorem

$$\partial\left(\left[\varphi^k\right]\right) = (-1)^k \left[1 \otimes \Omega \wedge \varphi^k\right].$$

Standardowo definiujemy

$$D : H_F(M) \longrightarrow H_F(M)$$

wzorem

$$D\alpha = (-1)^{st\alpha+1} \left(\gamma^{\#}\right)^{-1} (\partial\alpha) = [\Omega] \wedge [-\alpha].$$

Klasę kohomologii

$$\chi_A = D(1) = -[\Omega]$$

nazywamy zwyczajowo *klasą Eulera.* Modyfikujemy w długim ciągu $H\left(Ker \textstyle\oint_A\right) = H_F(M)$ otrzymując długi *ciąg dokładny Gysina*

$$\begin{array}{rl} 0 & \to \; H_F^1(M) \overset{\gamma^{\#}}{\to} H_A^1(M) \xrightarrow{\oint_A^{\#}} H_F^0(M) \overset{D^0}{\to} H_F^2(M) \to \cdots \\ \cdots & \to \; H_F^k(M) \overset{D^k}{\to} H_F^{k+2}(M) \overset{\gamma^{\#}}{\to} H_A^{k+2}(M) \xrightarrow{\oint_A^{\#}} H_F^{k+1}(M) \to \cdots \end{array}$$

wiążący ze sobą klasy kohomologii algebroidu Liego A.

5. Algebroid Liego rozmaitości Poissona

Rozmaitość Poissona to para $(M, \{\cdot,\cdot\})$ składająca się z C^∞ rozmaitości M wraz ze strukturą $\mathbb{R}$-algebry Liego $\{\cdot,\cdot\}$ w przestrzeni $C^\infty(M)$ funkcji gładkich takich, że $\{f_1 \cdot f_2, g\} = f_1 \cdot \{f_2, g\} + \{f_1, g\} \cdot f_2,\ f_i, g \in C^\infty(M)$. Jeśli $(M, \{\cdot,\cdot\})$ jest rozmaitością Poissona wtedy dla $f \in C^\infty(M)$ istnieje pole wektorowe X_f na M zwane *polem hamiltonowskim* takie, że $X_f(g) = \{f, g\}$.

Z każdą rozmaitością Poissona $(M, \{\cdot,\cdot\})$ A.Coste, P.Dazord i A.Weinstein związali w 1987 r. [C-D-W] algebroid Liego o przestrzeni totalnej T^*M i strukturze określonej następująco:

- *kotwica* $\gamma : T^*M \to TM$ jest określona w taki sposób, że
$$\gamma(df) = X_f;$$
- nawias $[\![\cdot,\cdot]\!]$ w przestrzeni cięć $SecT^*M = \Omega^1(M)$ jest określony w taki sposób, że
$$[\![df, dg]\!] = d\{f, g\}.$$

Na ogół tak określony algebroid Liego T^*M nie jest regularny, tzn. $\operatorname{Im}\gamma$ nie jest dystrybucją stałego rzędu (*foliacja charakterystyczna* generowana przez pola hamiltonowskie jest na ogół foliacją z osobliwościami w sensie Stefana). Przypadkiem regularnym zajmował się głownie p.Dazord, D.Sondaz, G.Hector, F.A. Cuesta w pracach [D-S], [He], [C-H].

Twierdzenie 5.1. [D-S] *W przypadku regularnym (tzn. gdy*

$$F := \operatorname{Im}\gamma$$

jest stałego rzędu) algebroid Liego T^*M rozmaitości Poissona $(M, \{\cdot,\cdot\})$ ma nastepujące własności:

(1) *ciągiem Atiyah jest*

$$0 \to \nu^* F \hookrightarrow T^*M \xrightarrow{\gamma} F \to 0$$

gdzie $F = \operatorname{Im}\gamma$ zaś $\nu^*F \subset T^*M$ jest wiązką transwersalną do foliacji F

$$\nu^* F = \{u \in T^*M; u|F = 0\} \cong (TM/F)^* ;$$

(2) *algebry Liego izotropii*

$$(\nu^* F)_x$$

są abelowe;

(3) *stowarzyszona pochodna kowariantna ∇ w wiązce ν^*F jest równa koneksji Botta*

$$\nabla_X \omega = \iota_X (d\omega),$$

gdzie $\omega \in Sec\nu^*F = \left\{\omega \in \Omega^1(M); \forall X \in \mathfrak{X}(F),\ \iota_X\omega = 0\right\}$. □

Załóżmy w dalszym ciągu, że foliacja charakterystyczna F jest kowymiaru 1

$$\operatorname{codim} F = 1.$$

Wtedy wiązka stowarzyszona ν^*F jest rzędu 1. Możemy zastosować Tw.3.3 charakteryzujące abelowe algebroidy Liego rzędu 1 niezmienniczo zorientowane. Ponieważ 1-forma $\omega \in SecT^*M = \Omega^1(M)$ jest niezmienniczo zorientowana wtedy i tylko wtedy gdy jest ∇-stała (Lemat (3.2)) otrzymujemy poniższy wniosek

Wniosek 5.2. *Algebroid Liego T^*M rozmaitości Poissona $(M, \{\cdot,\cdot\})$ z foliacją charakterystyczną kowymiaru 1 jest niezmienniczo zorientowany wtedy i tylko wtedy gdy istnieje 1-forma ω na M nigdzie nie równa zeru taka, że*

$$\iota_X(\omega) = \iota_X(d\omega) = 0 \text{ dla każdego pola } X \in \mathfrak{X}(F),$$

tzn. nigdzie nie zerująca się F-bazowa 1-forma ω. □

Zatem, za posiadanie własności niezmienniczego zorientowania algebroidu Liego T^*M odpowiada wyłącznie foliacja charakterystyczna na bazie M.

Wszystkie takie algebroidy Liego – z dokładnością do izomorfizmu – opisane są zgodnie z Twierdzeniem (3.3) przy pomocy zamkniętej tangentialnej 2-formy rzeczywistej $\Omega \in \Omega^2_F(M)$ na rozmaitości bazowej M.

Czy wszystkie takie formy pochodzą od stuktur Poissona? – nie wiem.

Przyjrzyjmy się jeszcze dokładniej foliacjom kowymiaru 1 pojawiającym się na bazie rozmaitości Poissona o algebroidach niezmienniczo zorientowanych, tzn. foliacjom dopuszczającym nigdzie niezerującą się 1-formę bazową.

6. Foliacje Liego

Przypomnijmy następującą definicję.

Definicja 6.1. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego wymiaru r. Foliację F kowymiaru r na rozmaitości M nazywamy $\mathfrak{g}$-*foliacją Liego* jeżeli istnieje 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M;\mathfrak{g})$ o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ taka, że

- $\alpha_x : T_xM \to \mathfrak{g}$ jest epimorfizmem dla każdego $x \in M$,
- $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0$,
- $F = Ker\alpha$.

Równoważnie (czego nie będziemy tu bliżej uzasadniać), foliacja F kowymiaru r jest foliacją Liego gdy posiada transwersalny parallelizm $\xi_1, ..., \xi_r$ generujący r-wymiarową algebre Liego, tzn. gdy $[\xi_1,\xi_2] \in Lin(\xi_1,...,\xi_r)$.

W szczególności dla abelowej 1-wymiarowej algebry Liego $\mathbb{R}$ dostajemy:

- *foliacja F jest $\mathbb{R}$-foliacją Liego jeżeli istnieje nigdzie nie zerurjąca się 1-forma zamknięta α, $d\alpha = 0$, taka, że $Ker\alpha = F$.*

Ponieważ dowolna podwiązka $Q \subset TM$ uzupełniająca do F jest 1-wymiarowa to zamkniętość 1-formy α, $d\alpha = 0$, równoważna jest z częścią tego warunku $\iota_X(d\omega) = 0$ dla każdego pola $X \in \mathfrak{X}(F)$. Otrzymujemy stąd drugi wniosek

Wniosek 6.2. *Algebroid Liego T^*M rozmaitości Poissona $(M,\{\cdot,\cdot\})$ z foliacją charakterystyczną kowymiaru 1 jest niezmienniczo zorientowany wtedy i tylko wtedy gdy foliacja F jest $\mathbb{R}$-foliacją Liego.*

Poniżej podajemy literaturę cytowaną i kilka innych podstawowych w temacie algebroidów Liego pozycji.

References

[A-M1] R. Almeida, P. Molino, *Suites d'Atiyah, feuilletages et quantification géométrique,* Seminaire Gaston Darboux de Géometrie et Topologie Differentielle, Université de Montpellier, 1984-1985.

[A-M2] —, *Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math., 300 (1985).

[C-D-W] A.Coste, P.Dazord, A.Weinstein, *Groupoides symplectiques,* Publ. Dep. Math. Universite de Lyon 1, 2/A (1987).

[C-H] F.A.Cuesta, G.Hector, *Intégration symplectiques des variéés de Poisson réguléres,* Israel Journal of Mathematics 90, 1995, 125-165.

[D-S] P.Dazord, D.Sondaz, *Varietes de Poisson — Algebroides de Lie,* Publ. Dep. Math. Universite de Lyon 1, 1/B (1988).

[He] G.Hector, *Une nouvelle obstruction à l'intégrabilité des variétés de Poisson régulières,* Hokkaido Mathematical Journal, Vol.21(1992) p.159-185.

[H-M] P.J.Higgins, K.Mackenzie, *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids,* J.Algebra, 1988.

[Hu] Huebschmann J. *Poisson cohomology and quantization,* J.reine angew. Math. 408 (1980), 57-113.

[K2] J.Kubarski, *Lie algebroid of a principal fibre bundle,* Publ. Dep. Math. University de Lyon 1, 1/A, 1989.

[K3] —, *The Chern-Weil homomorphism of regular Lie algebroids*, Publ. Dep. Math. University de Lyon 1, 1991.

[K6] —, *Bott's Vanishing Theorem for Regular Lie Algebroids,* Transaction of the A.M.S. Volume 348, Number 6, June 1996.

[K7] —, *Fibre integral in regular Lie algebroids,* Proccedings of the Conference "Differential Geometry", Budapest, July 27-30,1996.

[K10] —, *Euler class and Gysin sequence of spherical Lie algebroids,* in preparation.

[M1] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry,* Cambridge University Press, 124, 1987.

[M2] —, *Lie algebroids and Lie pseudoalgebras,* Bull. London Math. Soc., 27 (1995), 97-147.

[M-R] L.Maxim-Raileanu, *Cohomology of Lie algebroids,* An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi. Sect. I a Mat. XXII f 2 (1976), 197-199.

[MO1] P.Molino, *Etude des feuilletages transversalement complets et applications,* Ann.Sci. Ecole Norm. Sup., 10(3) (1977), 289-307.

[P1] J.Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoides differentiables dans la categorie des groupoides, Calcul differential dans la categorie des groupoides infinitesimaux,* C. R. Acad. Sci. Ser.A-B, Paris, 264, (1967), 245-248.

[P2] —, *Théorie de Lie pour les groupoides differentiables,* Atti Conv Intern Geom 7 Diff. Bologna, 1967, Bologna-Amsterdam.

[Xu] Ping Xu, *Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry,* to appear.