

Analiza na rozmaitościach

Jan Kubarski
Politechnika Łódzka, Instytut Matematyki

June 26, 2012

Spis treści

1	Analiza funkcji wielu zmiennych - co najważniejsze na razie	4
2	Rozmaitości topologiczne i różniczkowe, mapy i atlasy - definicje	5
3	Elementarne przykłady	9
4	Sklejanie rozmaitości	12
5	Hiperpowierzchnie	15
6	Odwzorowania gładkie między rozmaitościami	20
7	Zbiory mierzalne na rozmaitości, miara i całka Lebesgue’a na hiperpowierzchni	21
8	Przeciwwobraz wartości regularnej	24
9	Grupy Liego	28
9.1	Definicja i wstępne własności	28
9.2	Grupy topologiczne, podstawowe własności topologiczne.	29
9.3	Grupy Liego - własności topologiczne cd.	31
10	Wektory i przestrzenie styczne do hiperpowierzchni	31
11	Podgrupy Liego grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$	34
11.1	Podstawowe twierdzenie o tworzeniu podgrup Liego grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$	34
11.2	Grupa obrotów	35
11.3	Podgrupy macierzy niezmienniczych względem odwzorowania dwuliniowego	41
12	Grupy transformacji	47

13 Pojęcie wiązki, wiązki z grupą strukturalną	49
14 Quaterniony	54
14.1 Algebra quaternionów	54
14.2 Grupa jednostkowych quaternionów	55
14.3 Grupa quaternionowa $Q(n)$	56
14.4 Związek grupy Liego S^3 z grupą obrotów przestrzeni $\mathbb{R}^3$	58
15 Grassmanniany, w szczególności przestrzenie rzutowe	60
15.1 Grassmanniany	60
15.2 Rzeczywiste, zespolone i quaternionowe przestrzenie rzutowe	65
15.3 Rozwłóknienia Hopfa	68
15.4 Różniczka funkcji rzeczywistej $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na rozmaitości M . .	72
16 Formy różniczkowe na rozmaitościach	74
16.1 1-formy różniczkowe	74
16.2 Mnożenie skośne 1-form różniczkowych	76
16.3 k-formy różniczkowe na rozmaitości	80
16.4 Cofanie form różniczkowych	83
16.5 Hiperpowierzchnie zorientowane i całkowanie form różniczkowych maksymalnego stopnia	85
16.6 Różniczkowanie form różniczkowych	91
16.7 Kompleks de Rham, grupy kohomologii, charakterystyka Eulera-Poincarégo i genus powierzchni	94
17 Hiperpowierzchnie w mechanice klasycznej - przestrzenie konfiguracyjne	99
18 TWIERDZENIE CAŁKOWE STOKESA	101
18.1 Hiperpowierzchnie z brzegiem	101
18.2 Twierdzenie Stokesa dla podzbiorów z osobliwościami	105
18.3 Szczególne przypadki ogólnego wzoru Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem	106
18.3.1 Twierdzenie Greena	106
18.3.2 Twierdzenie Stokesa dla powierzchni 2-wymiarowej w $\mathbb{R}^3$	107
18.3.3 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego	108
19 DOWÓD TWIERDZENIA STOKESA	109
20 Element objętości i Tensor Riemanna	113
21 Zastosowania Tw. Stokesa w topologii	116
22 Zastosowania całki powierzchniowej zorientowanej w Fizyce	117
22.1 Strumień cieczy	117
22.2 Pole cienia	117
22.3 Strumień ciepła	117

22.4	Prawo Gaussa	117
22.5	Zadania	118
22.6	Zadania teoretyczne	119
23	Wykorzystanie wzoru Greena	119
23.1	Zadania praktyczne	121
24	Wykorzystanie wzoru Stokesa dla powierzchni	121
24.1	Zadania praktyczne	121
24.2	Zadania teoretyczne	122
24.3	Wykorzystanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego	124
24.4	Zadania praktyczne	124
24.5	Zadania teoretyczne	124
25	ZASTOSOWANIA TWIERDZEŃ CAŁKOWYCH	125
25.1	Cyrkulacja a rotacja	125
25.2	Dywergencja a strumień	126
26	Zastosowania Tw. Stokesa w elektromagnetyźmie	127
26.1	Równanie Maxwella	127
26.2	Prawo Faradaya	127
26.3	Prawo Gaussa c.d.	127
26.4	Dowód Prawa Gaussa	129
26.5	Ciągłe pole ładunków elektrycznych i równanie Maxwella	129
26.6	Objętość obszaru przestrzennego	129
26.7	Zadania praktyczne	130
26.8	Zadania teoretyczne	131

WYKŁAD 1, 8.XI.2011

Zakładamy znajomość analizy funkcji wielu zmiennych (pochodne, całki, miara Lebesgue'a), topologii i algebry liniowej.

1 Analiza funkcji wielu zmiennych - co najważniejsze na razie

Zadanie. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Pokazać, że $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Hint: a) pokazać indukcyjnie, że dla dowolnego n , istnieje wielomian stopnia n taki, że dla $x < 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{w_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}.$$

b) pokazać indukcyjnie, że $f^{(n)}(0) = 0$ (do liczenia granic stosować pomocniczo podstawienia $t = x^{-1}$).

Funkcja $f(x)$ nie jest $\mathbb{R}$ -analityczna w $x = 0$, tzn. nie rozwija się w szereg potęgowy o środku w 0, bowiem każda funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o dodatnim promieniu zbieżności ma współczynniki $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, gdyby więc gdy $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to funkcja f w otoczeniu $x = 0$ byłaby 0, ale $f(x) > 0$ dla $x < 0$. Funkcje rozwijalne lokalnie w szereg potęgowy nazywamy funkcjami klasy C^ω , widzimy, że $C^\infty \subsetneq C^\omega$.

Definicja 1.0.1 Niech $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie danym odwzorowaniem (oznaczenie znaczy: $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$). Różniczką (pochodną mocną) odwzorowania f punkcie $\mathbf{x}_0$ nazywamy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Własności

a) różniczką L jest conajwyżej jedna, oznaczamy ją $Df(\mathbf{x}_0)$.

b) jeżeli $Df(\mathbf{x}_0)$ jest różniczką w $\mathbf{x}_0$ to funkcja f ma w $\mathbf{x}_0$ pochodną kierunkową w każdym kierunku $f'_{|\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0)$ i

$$f'_{|\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}).$$

W szczególności pochodna kierunkowa jest liniowa względem kierunku oraz istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$, tzn. pochodne kierunkowe w kierunku wersorów osi współrzędnych $\mathbf{e}_i$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = f'_{|\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i).$$

Wektor $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$ zapisujemy wierszowo lub kolumnowo $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f^1}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \right]$,
lub $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f^1}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \right]^T$.

Macierz różniczkowa jest macierzą pochodnych cząstkowych (czyli tzw. macierzą Jacobiego)

$$Df(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \right]_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}}.$$

$$Df(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

lub transponowana (jak wygodniej).

Macierz powyższą nazywa się macierzą Jacobiego odwzorowania f w $\mathbf{x}_0$.

c) Z istnienia różniczki w $\mathbf{x}_0$ nie wynika ciągłość pochodnych cząstkowych, np. tak jest już dla $n = m = 1$ dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

($Df(0) = 0$ jest różniczką, ale pochodna nie jest ciągła),

d) z ciągłości pochodnych cząstkowych wynika, że odwzorowanie liniowe $Df(\mathbf{x}_0)$ o macierzy $\left[\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \right]$ jest różniczką odwzorowania f w $\mathbf{x}_0$.

e) różniczka superpozycji $D(g \circ f)(\mathbf{x}_0)$ jest złożeniem różniczek

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = Dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ Df(\mathbf{x}_0).$$

f) jeżeli f jest odwzorowaniem liniowym to $Df(\mathbf{x}_0) = f$.

Definicja 1.0.2 Dyfeomorfizmem klasy C^k nazywamy odwzorowanie $f: U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte, które jest bijekcją, oraz f i f^{-1} są klasy C^k .

Twierdzenie 1.0.1 (O dyfeomorfizmie, inaczej tw o funkcji odwrotnej) Jeżeli $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^k oraz w punkcie $\mathbf{x}_0$ różniczka $Df(\mathbf{x}_0)$ jest izomorfizmem, to istnieje otoczenie U_1 punktu $\mathbf{x}_0$ zawarte w U takie, że $f|_{U_1}$ jest różnowartościowe, $f[U_1]$ jest zbiorem otwartym oraz $f: U_1 \rightarrow f[U_1]$ jest dyfeomorfizmem klasy C^k .

Dowód na ćwiczeniach - pan Bienias

2 Rozmaitości topologiczne i różniczkowe, mapy i atlasy - definicje

Definicja 2.0.3 Rozmaitością topologiczną wymiaru n nazywamy przestrzeń topologiczną M dla której każdy punkt ma otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Definicja 2.0.4 Niech M będzie n -wymiarową rozmaitością topologiczną. Jeżeli ϕ jest homeomorfizmem otwartego zbioru $U \subset M$ na otwarty podzbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ ϕ nazywamy mapą rozmaitości M (na zbiorze U) a układ (U, ϕ) nazywamy systemem [układem] lokalnych współrzędnych. Mówimy też, że ϕ jest mapą na U o zbiorze parametrów V . Gdy $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ($\phi_i = pr_i \circ \phi$) to funkcje $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcjami współrzędnymi a system współrzędnych oznaczamy $(U, \phi_1, \dots, \phi_n)$. Jeśli dla $p \in U$ mamy $\phi(p) = 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ to mówimy, że układ współrzędnych (U, ϕ) jest o środku w p (lub: jest wycentrowany w p). Homeomorfizmy postaci ϕ^{-1} , gdzie, ϕ jest mapą, nazywamy parametryzacjami M . Często współrzędne danej mapy ϕ oznaczane są przez $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i = pr_i \circ \phi$.

Jeśli $\phi : U \rightarrow V$ jest mapą na M oraz $\lambda : V \rightarrow V_1$ jest homeomorfizmem, to $\lambda \circ \phi$ jest też mapą. Jeśli $\phi : U \rightarrow V$ jest mapą oraz $U' \subset U$ jest otwartym podzbiorem, to obcięcie $\phi|_{U'}$ jest mapą na U' o zbiorze parametrów $\phi[U']$ (otwartym w $\mathbb{R}^n$).

rysunki: sfera, torus, wstęga Möbiusa.

Uwaga 2.0.1 Ponieważ topologia w $\mathbb{R}^n$ jest topologią metryczną względem metryki kartezjańskiej $d(x, y) = \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}$ to każdy otwarty podzbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ wraz z punktem q zawiera kulę otwartą $K(q, r)$ o pewnym promieniu dodatnim $r > 0$. Gdy ϕ jest mapą na rozmaitości topologicznej M wokół punktu p to zmniejszając jej dziedzinę można otrzymać mapę której obrazem dziedziny będzie kula otwarta o środku w $\phi(p)$ albo kostka D o środku w $\phi(p)$ i bokach o długości $2a$,

$$D(\phi(a), a) = \{(r_1, \dots, r_n); |r_i - \phi_i(a)| < a\}.$$

Kule otwarte o różnych promieniach są dyfeomorficzne (tym bardziej homeomorficzne) $[\lambda : K(q_1, r_1) \rightarrow K(q_2, r_2), \lambda(x) = q_2 + (x - q_1) \frac{r_2}{r_1}]$, także kostki o różnych bokach są dyfeomorficzne, to składając mapę z odpowiednim λ można otrzymać mapę wycentrowaną w zdanym punkcie i aby obrazem dziedziny była kula o środku w 0 i zadanym z góry promieniu (np. 1 lub 2) lub kostka o środku w 0 i bokach $2a$. Kula o promieniu $\frac{\pi}{2}$ jest dyfeomorficzna z całą przestrzenią $\mathbb{R}^n$ (posługujemy się tangensem i arcusem tangensem - ćwiczenie), kostka o danym boku także, zatem zawsze można otrzymać w otoczeniu danego punktu mapę dla której obrazem dziedziny będzie cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Prz. top. jest T_1 jeśli dla dowolnych dwu punktów $x \neq y$ istnieje otwarte otoczenie punktu x nie zawierające y .

Lemat. Rozmaitość topologiczna jest zawsze T_1 .

Dowód. Niech M będzie rozmaitością topologiczną i niech $x, y \in M$, $x \neq y$. Jeśli x i y leżą w dziedzinie jednej mapy $\phi : U \rightarrow V$, $x, y \in U$ to skoro $\mathbb{R}^n$ jest T_2 to punkty $\phi(x)$ i $\phi(y)$ można oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi $\phi(x) \in V_1$ i $\phi(y) \in V_2$ w V . Wtedy $x \in U_1 := \phi^{-1}[V_1]$ jest otwarty w M i $y \notin U_1$. Jeśli x i y nie leżą w jednej mapie i $\phi : U \rightarrow V$ jest mapą taką, że $x \in U$ oraz $y \notin U$ to U oddziela x i y . ■

O topologii rozmaitości topologicznej zazwyczaj zakłada się więcej niż T_1 , mianowicie że

- a) jest T_2 ,
- b) spełnia drugi aksjomat przeliczalności (tzn. ma bazę przeliczalną).

Przykład 2.0.1 Łatwo podać przykład rozmaitości topologicznej nie Hausdorffa: Rozważamy prostą $\mathbb{R}$ i jeden punkt "zdwajamy"

$$M = (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cup \{a', a''\}.$$

Topologię na M definiujemy następująco: za bazę otoczeń punktu $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} = M \setminus \{a', a''\}$ uznajemy otwarte przedziały zawierające x , $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ i zawarte w $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, natomiast za bazę otoczeń punktu a' uznajemy zbiory postaci $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \cup \{a'\}$ a za bazę otoczeń punktu a'' zbiory $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \cup \{a''\}$. Sprawdzamy aksjomaty BP1 – 3 bazy otoczeń punktów (R.Engelking BM 47, rozdział1) i upewniamy się, że istnieje dokładnie jedna topologia na M dla której wskazane rodziny są bazami otoczeń punktów. Jasne, że dla $x \in M \setminus \{a', a''\}$ otoczenie "małe" $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ jest homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}$ za pomocą $\text{id} : U \rightarrow U$. Dla $x = a' \in M$ otoczenie $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \cup \{a'\}$ jest homeomorficzne z $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ za pomocą

$$\begin{aligned} \phi & : (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \cup \{a'\} \rightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ \phi(y) & = \begin{cases} y, & y \neq a' \\ a, & y = a' \end{cases} \end{aligned}$$

(analogicznie określamy mapę wokół a''). Punktów a' i a'' nie daje się rozdzielić zbiorami otwartymi.

WYKŁAD 2, 15.XI.2011

Twierdzenie 2.0.2 *Jeżeli M jest rozmaitością topologiczną T_2 wówczas warunki są równoważne:*

- (a) *spełnia drugi aksjomat przeliczalności (tzn. ma bazę przeliczalną),*
- b) *jest parazwarta, tzn. ma następującą własność: w każde otwarte pokrycie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ zbiorami otwartymi można wpisać podpokrycie $\mathcal{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ lokalnie skończone, tzn. takie, że i) dla każdego β istnieje α , takie, że $V_\beta \subset U_\alpha$, oraz każdy punkt $p \in M$ ma otwarte otoczenie U takie, że $\text{card}\{\beta; V_\beta \cap U \neq \emptyset\} < \aleph_0$.*

Na razie bez dowodu.

Gdy ϕ jest mapą rozmaitości M to dziedzinę tej mapy oznaczać będziemy także D_ϕ .

Definicja 2.0.5 *Niech ϕ i ψ będą mapami na rozmaitości M . Funkcją przejścia od mapy ϕ do ψ nazywamy homeomorfizm otwartych podzbiorów przestrzeni parametrów $\mathbb{R}^n$*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi [D_\phi \cap D_\psi] \rightarrow \psi [D_\phi \cap D_\psi].$$

Definicja 2.0.6 *Atlasem rozmaitości różniczkowej M nazywamy rodzinę map $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ taką, że $\bigcup_\alpha D_{\phi_\alpha} = M$. Jeśli dziedziną mapy ϕ_α jest zbiór U_α to atlas ten zapisujemy także w postaci układu systemów współrzędnych $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.*

Definicja 2.0.7 *Mówimy, że atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ rozmaitości topologicznej M jest klasy C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, jeżeli dla każdego α, β funkcje przejścia $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ są klasy C^k . Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolnym atlasem klasy C^k na rozmaitości topologicznej M i niech (U, ϕ) będzie dowolnym systemem współrzędnych na M . Mówimy, że mapa ϕ (system współrzędnych (U, ϕ)) jest zgodny klasy C^k z atlasem $\mathcal{A}$ jeżeli $\mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$ jest też atlasem klasy C^k , tzn. gdy $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ oraz $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ są klasy C^k . Atlas $\mathcal{A}$ nazywamy zupełnym (inaczej maksymalnym), jeżeli zawiera wszystkie możliwe systemy współrzędnych na M zgodne klasy C^k z $\mathcal{A}$.*

Jeśli $\phi : U \rightarrow V$ jest mapą z atlasu $\mathcal{A}$ klasy C^k i $\lambda : V \rightarrow V_1$ jest dowolnym dyfeomorfizmem klasy C^k to złożenie $\lambda \circ \phi$ jest mapą zgodną z atlasem $\mathcal{A}$. Obcięcie do otwartego podzbioru $\phi|_{U'}$ jest też mapą zgodną z atlasem $\mathcal{A}$. Wynika stąd, że w otoczeniu każdego punktu istnieje mapa zgodna z danym atlasem $\mathcal{A}$ dla której obrazem dziedziny jest kula $K(0, r)$ o z góry ustalonym promieniu r (np. $r = 1$ lub $r = 2$) a także mapa zgodna z atlasem $\mathcal{A}$ dla której obrazem dziedziny jest kostka $D(0, a)$ lub cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Każdy atlas $\mathcal{A}$ klasy C^k można jednoznacznie rozszerzyć do atlasu zupełnego: gdy $\mathcal{A}$ jest danym atlasem to

$$\mathcal{A}' = \{(U, \phi); \phi \circ \phi_\alpha^{-1} \in C^k \text{ oraz } \phi_\alpha \circ \phi^{-1} \in C^k, \text{ dla każdego } \alpha\}$$

jest atlasem zupełnym.

Dwa atlasy $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ klasy C^k nazywamy zgodne klasy C^k jeśli ich suma $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ jest atlasem zgodnym klasy C^k . Jeśli uzupełnić atlas $\mathcal{A}_1$ do atlasu zupełnego $\mathcal{A}'$ to $\mathcal{A}'$ zawierać musi także ten drugi atlas.

Definicja 2.0.8 *Rozmaitością różniczkową klasy C^k nazywamy parę $(M, \mathcal{A})$ gdzie M jest rozmaitością topologiczną a $\mathcal{A}$ jest atlasem maksymalnym klasy C^k na M .*

Łatwo z wcześniejszych obserwacji zauważyć prawdziwość lematu:

Lemat 2.0.1 *Na każdej rozmaitości różniczkowej klasy C^k istnieje atlas złożony z takich map których obrazem dziedzin są kule $K(0, r)$ o ustalonym z góry promieniu (np. 1 lub 2) lub kostki o środku w 0 i boku $2a$, a także atlas złożony z takich map których obrazem dziedzin jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$.*

Jest twierdzenie którego tu nie będziemy dowodzić, że z każdego atlasu $\mathcal{A}$ klasy C^1 można wybrać podatlas klasy C^∞ (na ogół nie można wybrać podatlasu klasy C^ω). Są też przykłady rozmaitości topologicznych (a więc z atlasem $\mathcal{A}$ klasy C^0 - homeomorfizmów) na której nie istnieje żaden atlas klasy C^1 (Kervaire 1960 - pierwszy przykład w wymiarze 10). Rozmaitości klasy C^∞ są nazywane gładkimi.

Nie jest prawdą że atlas maksymalny klasy C^∞ jest jedyny. Mogą się zdarzyć na danej rozmaitości różne maksymalne atlasy klasy C^∞ , tzn. mogą istnieć atlasy maksymalne $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że funkcje przejścia między mapami z różnych atlasów nie są różniczkowalne.

Przykład 2.0.2 *Rozważmy $\mathbb{R}$ z normalną topologią. Określamy dwie mapy globalnie określone*

$$\begin{aligned}\phi_1, \phi_2 &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi_1(x) &= x \\ \phi_2(x) &= x^3.\end{aligned}$$

Oba odwzorowania są homeomorfizmami. Rozważmy atlas $\mathcal{A}_1 = \{\phi_1\}$ oraz $\mathcal{A}_2 = \{\phi_2\}$.

Każdy z nich rozszerzamy do atlasu maksymalnego otrzymując dwie struktury rozmaitości różniczkowych na $\mathbb{R}$. Pokazać, że atlasy te nie są C^1 zgodne.

UWAGA: za jakiś czas zapoznamy się z pojęciem odwzorowania gładkiego (czy innej klasy C^k) między rozmaitościami i łatwo zauważymy, że obie rozmaitości 1-wymiarowe $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ są dyfeomorficzne.

Nie jest prawdą, że zawsze atlasy maksymalne na danej rozmaitości tworzą rozmaitości różniczkowe dyfeomorficzne. Jest to znacznie trudniejsze zagadnienie z topologii różniczkowej. Np. na sferze S^7 istnieje aż 28 różnych niedyfeomorficznych maksymalnych atlasów ! Jest twierdzenie mówiące, że dla wymiaru < 4 atlas maksymalny klasy C^∞ istnieje i z dokładnością do dyfeomorfizmu jest dokładnie jeden. Na rozmaitościach zwartych wymiaru > 4 istnieje co najwyżej skończona ich ilość takich atlasów. Wymiar 4 jest wyjątkiem. Może być nieprzeliczalna ilość różnych atlasów maksymalnych niedyfeomorficznych. Na $\mathbb{R}^n$ dla $n \neq 4$ jest tylko jeden atlas maksymalny, a dla $\mathbb{R}^4$ jest ich nieprzeliczalnie wiele (Donaldson). Nazywane są egzotycznymi.

3 Elementarne przykłady

Przykład 3.0.3 *Przestrzeń $\mathbb{R}^n$, jej otwarte podzbiory $U \subset \mathbb{R}^n$, oraz ich sumy rozłączne są przykładami n -wymiarowych rozmaitości topologicznych.*

Przykład 3.0.4 Gdy $n = 0$, rozmaitość nazywa się dyskretna i jest to suma rozłącznych 1-punktowych przestrzeni topologicznych, czyli inaczej jest to dowolna przestrzeń topologiczna dyskretna (każdy podzbiór jest otwarty).

Przykład 3.0.5 Każda n -rozmaitość topologiczna z atlasem o jednej mapie $\mathcal{A} = \{\phi\}$, $\phi : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ (mapa globalna) czyli rozmaitość homeomorficzna z $U \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością klasy C^ω bo jedna mapa jest oczywiście C^ω zgodna i wystarczy ten atlas uzupełnić do maksymalnego. Konkretny przykład: jeśli $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest dowolną funkcją ciągłą to jej wykres

$$M = \{(x, f(x)); x \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^m$$

z topologią indukowaną z $U \times \mathbb{R}^m$ jest homeomorficzny z U ; parametryzacją globalną jest

$$\phi : M \rightarrow U, (x, f(x)) \mapsto x.$$

Istotnie, $\phi^{-1} : U \rightarrow M, x \mapsto (x, f(x))$, jest ciągła z założenia ciągłości ϕ , zaś ϕ to po prostu obcięcie do M rzutu $pr : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U$ (rzut jest ciągły - nawet klasy C^∞ - więc jego obcięcie jest ciągłe). M ma więc strukturę rozmaitości różniczkowej każdej klasy, choć jeżeli f nie jest różniczkowalna to M nie będzie tzw. hiperpowierzchnią różniczkowalną w/g definicji niżej.

Przykład 3.0.6 (na ćw.) Pokazać, że zwarta rozmaitość topologiczna M nie ma atlasu złożonego z jednej mapy.

Przykład 3.0.7 Każda skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa V ma strukturę rozmaitości klasy C^∞ . Wybierając bazę $\{e_i\}_{i=1}^n$ możemy określić bijekcję $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(\sum r^i e_i) = (r^1, \dots, r^n)$. Wprowadzamy w V topologię dla której jest to homeomorfizm. Topologia nie zależy od wyboru bazy (proste ćwiczenie). Atlas złożony z jednej mapy rozszerzamy do atlasu maksymalnego danej z góry klasy $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

Przykład 3.0.8 Zamieniając formalnie w definicji rozmaitości n -wymiarowej różniczkowalnej przestrzeń parametrów z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{C}^n$ i różniczkowalność w sensie rzeczywistym na różniczkowalność w sensie zespolonym dochodzimy do pojęcia rozmaitości holomorficznej wymiaru zespolonego n . Ponieważ $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (jako przestrzeń wektorowa) to wymiar rzeczywisty $\mathbb{C}^n$ jest $2n$. Zatem holomorficzna rozmaitość wymiaru zespolonego n jest rozmaitością różniczkową klasy C^ω wymiaru $2n$.

Przykład 3.0.9 Pokazać, że podzbiór $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^2$ nie jest rozmaitością topologiczną 1-wymiarową. (UWAGA: nie jest też rozmaitością topologiczną 2-wymiarową, z jakiego tw. trzeba skorzystać? hint J.Mioduszeowski, Wykłady z topologii, topologia przestrzeni euklidesowych, Katowice 1994, wyd. Uniw. Śląskiego)

Przykład 3.0.10 (na ćwiczenia) Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); \sum x_i^2 = 1\}.$$

Zbudować dwa atlasy (a) za pomocą wykresów funkcji: gdy $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in S^n$ to istnieje indeks i_0 taki, że $a_{i_0} \neq 0$. Rozwiązując równanie $\sum x_i^2 = 1$ względem x_{i_0} dostajemy w otoczeniu $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ dwa rozwiązania

$$\begin{aligned} x_{i_0}^2 &= 1 - \sum_{i \neq i_0} x_i^2 \\ x_{i_0} &= \pm \sqrt{1 - \sum_{i \neq i_0} x_i^2}, \end{aligned}$$

znak $\pm$ zależy od znaku x_{i_0} . W otoczeniu $(a_1, \dots, a_n)$ (w jakim największym możliwym otoczeniu?) sfera jest wykresem tej funkcji i w/g przykładu pierwszego wyżej definiujemy parametryzację (i mapę) a zatem atlas $\mathcal{A}_1$. Sprawdzić, że jest to atlas klasy C^∞ . Z ilu conajmniej map on się musi składać?

(b) za pomocą rzutów stereograficznych z dwu biegunów północnego i południowego. Otrzymamy atlas złożony z dwu map $\mathcal{A}_2$.

(c) sprawdzić, że otrzymane dwa atlasy $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ są C^∞ zgodne (definiują więc tę samą różniczkową klasę C^∞).

Przykład 3.0.11 Okrąg. Jeszcze jeden atlas. Rozważmy $S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ i funkcje

$$f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad f(\theta) = e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Ograniczając się do przedziałów otwartych o długości 2π otrzymujemy bijekcje takiego przedziału na okrąg pozbawiony jednego punktu. Pokazać, że atlas $\mathcal{A}_3$ złożony z odwzorowań odwrotnych do tak określonych obcięć $(f|_{(a, a+2\pi)})^{-1}$ jest klasy C^∞ . Sprawdzić, że jest to atlas C^∞ -zgodny z atlasem $\mathcal{A}_1$ z poprzedniego zadania (dla $n = 1$).

WYKŁAD 3, 22.XI.2011

Przykład 3.0.12 *Produkt rozmaitości różniczkowych.* Niech M_1 i M_2 będą dwoma rozmaitościami różniczkowymi wymiaru n_1 i n_2 odpowiednio klasy C^k o atlasach maksymalnych $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Tworzymy produkt przestrzeni topologicznych $M = M_1 \times M_2$ (z jakich zbiorów składa się ta topologia?) Dla dowolnych map ϕ_1 i ϕ_2 na M_1 i M_2 odpowiednio definiujemy odwzorowanie

$$\phi_1 \times \phi_2 : D_{\phi_1} \times D_{\phi_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad \phi(x, y) = (\phi_1(x), \phi_2(y)).$$

Jest to homeomorfizm otwartego w produkcie $M_1 \times M_2$ podzbioru $D_{\phi_1} \times D_{\phi_2} \subset M_1 \times M_2$ na zbiór otwarty $\phi_1[D_{\phi_1}] \times \phi_2[D_{\phi_2}] \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Pokazać, że atlas $\{\phi_1 \times \phi_2; \phi_1 \in \mathcal{A}_1, \phi_2 \in \mathcal{A}_2\}$ jest klasy C^k . Uzupełniamy go do maksymalnego otrzymując produkt rozmaitości.

Przykład 3.0.13 W szczególności mamy tzw. n -wymiarowy torus $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

Przykład 3.0.14 Pełna grupa liniowa $GL(n)$ macierzy $n \times n$ nieosobliwych tworzy n^2 -wymiarową rozmaitość różniczkową klasy C^ω o jednej mapie. Podać mapę (zauważyć, że obrazem jest otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^{n^2}$).

4 Sklejanie rozmaitości

Przypomnijmy pojęcie topologii ilorazowej. Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną i $R \subset X \times X$ dowolną relacją równoważności na X . Niech X/R będzie zbiorem klas abstrakcji relacji R i oznaczmy przez π odwzorowanie rzutowania

$$\pi : X \rightarrow X/R, \quad \pi(x) = [x].$$

Rozważmy na przestrzeni ilorazowej X/R rodzinę zbiorów

$$\tau_R := \{A \subset X/R; \pi^{-1}[A] \in \tau\}.$$

Wówczas rodzina τ_R jest topologią na przestrzeni ilorazowej X/R , nazywamy ją *ilorazową* i rzutowanie π jest wówczas ciągłe. Poza tym mamy taką charakteryzację topologii ilorazowej: jest to najsilniejsza topologia w zbiorze X/R dla której rzutowanie π jest ciągłe.

Własności topologii ilorazowej:

(a) **ćwiczenia.** Niech Y będzie dowolną przestrzenią topologiczną i $f : X/R \rightarrow Y$ dowolną funkcją. Wtedy f jest ciągła gddo $f \circ \pi$ jest ciągła.

(b) **ćwiczenia.** Cięciem rzutowania π nazywamy funkcję $s : X/R \rightarrow X$ taką, że $\pi \circ s = id$, tzn. gdy $[s(a)] = a$ (inaczej $s(a) \in a$, $s(a)$ jest jakimś reprezentantem klasy a) dla każdego $a \in X/R$. Jeśli istnieje ciągłe cięcie s wówczas dowolna funkcja $g : Y \rightarrow X/R$ jest ciągłą gddo $s \circ g$ jest ciągła.

(c) **ćwiczenia.** Niech $U \subset X$ będzie podzbiorem nasyconym (czyli zawierającym całe klasy abstrakcji które przecinają się z U) z topologią indukowaną z X , $\tau|U = \{U \cap V; V \in \tau\}$. Połóżmy

$$U' = \{[x]; x \in U\} \subset X/R.$$

Skoro U' jest podzbiorem X/R to posiada topologię indukowaną $\tau_R|_{U'} = \{U' \cap W; W \in \tau_R\}$. Z drugiej strony możemy na U rozważać relację równoważności $R_U = R \cap (U \times U)$ a dalej przestrzeń ilorazową U/R_U ze swoją topologią ilorazową. Oczywiście $U' = U/R_U$ - jako zbiory. Sprawdzić, czy obie topologie na U' , indukowana i ilorazowa, pokrywają się. [nie zawsze, ale tak jest gdy $\pi[U]$ jest otwarty lub domknięty w X/R - Engelking, BM 47, rozdział 2, Tw 7]

Rozważmy dwie rozłączne rozmaitości Hausdorffa M_1 i M_2 tego samego wymiaru n i wybierzmy na nich dwie mapy odwzorowujące swoje dziedziny na $\mathbb{R}^n$ (wystarczy żądać aby obrazami były kule $K(0, 2 + \varepsilon)$ dla pewnych dodatnich ε).

$$\begin{aligned} (U_1, \phi_1) & \text{ na } M_1 \\ (U_2, \phi_2) & \text{ na } M_2 \end{aligned}$$

$$\phi_1[U_1] = \phi_2[U_2].$$

Wycinamy z M_1 podzbiór zwarty $K_1 = \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right]$ i analogicznie wycinamy z M_2 podzbiór zwarty $K_2 = \phi_2^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right]$. Zwarte podzbiory przestrzeni Hausdorffa są domknięte, więc $M_1 \setminus K_1$ jest otwartym podzbiorem M_1 oraz $M_2 \setminus K_2$ - otwartym w M_2 . Tworzymy sumę tych rozmaitości

$$M = (M_1 \setminus K_1) \cup (M_2 \setminus K_2).$$

Rozważamy pierścień $P\left(0; \frac{1}{2}, 2\right) = \{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{2} < \|x\| < 2\}$ oraz podzbiory $V_1 \subset U_1$ i $V_2 \subset U_2$ określone następująco

$$\begin{aligned} V_1 &= \phi_1^{-1} \left[P\left(0; \frac{1}{2}, 2\right) \right] \\ V_2 &= \phi_2^{-1} \left[P\left(0; \frac{1}{2}, 2\right) \right] \end{aligned}$$

"Wsuwamy" jedną szyjkę w drugą i skleamy za pomocą odwzorowania które "przestawi" kolejność brzegów pierścieni, dokładniej weźmy dyfeomorfizm $\rho : P\left(0; \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P\left(0; \frac{1}{2}, 2\right)$ określony wzorem

$$\rho(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

(brzeg o promieniu $\frac{1}{2}$ przechodzi na drugi brzeg o promieniu 2 i odwrotnie). Sklejanie polega na utożsamieniu V_1 i V_2 za pomocą bijekcji

$$\begin{aligned} F &: V_1 \rightarrow V_2 \\ F &= \phi_2^{-1} \circ \rho \circ \phi_1. \end{aligned}$$

Dokładniej opisujemy to za pomocą topologii ilorazowej: w zbiór M wprowadzamy relację równoważności R następująco:

$$x \sim y$$

gdzy (a) $x = y$, lub $x \in V_1$, $y \in V_2$ i $y = F(x)$, lub odwrotnie, $y \in V_1$ i $x \in V_2$ oraz $x = F(y)$. Definiujemy przestrzeń ilorazową M/R z topologią ilorazową którą oznaczamy

$M_1 \# M_2$ (oznaczenie jest sensowne, bo okaże się, że otrzymane rozmaitości ilorazowe "nie zależą" od wyboru owych map sklejających, tzn. dokładniej mówiąc dla dwu wyborów takich map otrzymane rozmaitości będą dyfeomorficzne w sensie jaki opiszemy niebawem).

Twierdzenie 4.0.3 M/R jest rozmaitością topologiczną. Jeżeli wychodzimy od atlasów klasy C^k to dostaniemy rozmaitość klasy C^k .

Dowód. Pokażemy, że każdy punkt $[p] \in M/R$ ma otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$. Otrzymana mapa będzie "z dokładnością do sklejeń punktów" obcięciem map z zadanych atlasów (tak, że klasa gładkości pozostanie jaka była).

(a) Rozważmy $[p] \in M$ dla $p \in \left(M_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, 2)} \right] \right) \cup \left(M_2 \setminus \phi_2^{-1} \left[\overline{K(0, 2)} \right] \right) := \Omega$ - jest to zbiór otwarty w M i oczywiście wysycony klasami abstrakcji (bo dla punktów z tego zbioru klasy są jedno-elementowe, nic się tam nie sklejało). Zbiór Ω można traktować jak podzbiór otwarty przestrzeni ilorazowej M/R . Topologia indukowana na Ω z M/R - zgodnie z własnością (c) topologii ilorazowej - jest topologią ilorazową - a że się nic nie sklejało to jest to po prostu topologia indukowna z M . Załóżmy, że $p \in M_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, 2)} \right]$. Wybieramy teraz dowolnie mapę w otoczeniu p (z zadanego atlasu) o dziedzinie zawartej $M_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, 2)} \right]$, mapa ta jest homeomorfizmem z topologii ilorazowej (bo w otoczeniu p jak wyżej pokazaliśmy topologia z M/R i z M pokrywają się).

(b) $p \in U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, \frac{1}{2})} \right]$ (analogicznie dla $p \in U_2 \setminus \phi_2^{-1} \left[\overline{K(0, \frac{1}{2})} \right]$). Po wysyceniu otrzymamy zbiór

$$U := \left(U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right] \right) \cup V_2 \subset M.$$

który jest otwarty w M (oba jego składniki są otwarte w U i w M). Niech $U' \subset M/R$ będzie zbiorem klas abstrakcji elementów z U , ponieważ

$$U' = \{[x]; x \in U\} = \left\{ [x]; x \in U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right] \right\} = \pi^{-1} \left[U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right] \right].$$

to U' jest otwarty w M/R . Z c) topologia na U' indukowana z M/R pokrywa się a topologią ilorazową w przestrzeni $U/R_U = U'$ dla relacji R_U w U która jest przecięciem relacji R ze zbiorem $U \times U$, a więc która utożsamia punkty z $V_1 \subset U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, \frac{1}{2})} \right]$ z punktami z V_2 przez F . Niech $\pi_U : U \rightarrow U'$ będzie rzutowaniem. Za pomocą mapy $\phi_1; U_1 \rightarrow K(0, 2 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ definiujemy odwzorowanie

$$\tilde{\phi}_1 : U' \rightarrow K(0, 2 + \varepsilon) \setminus \overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} =: W$$

wzorem $\tilde{\phi}_1([x]) = \phi_1(x)$ dla $x \in U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K(0, \frac{1}{2})} \right]$. Zauważymy, że jest to homeomorfizm.

ciągłość $\tilde{\phi}_1 : U' \rightarrow W$. Weźmy złożenie

$$U \xrightarrow{\pi_U} U' \xrightarrow{\tilde{\phi}_1} W$$

$$\tilde{\phi}_1 \circ \pi_U(x) = \begin{cases} \phi_1(x); & x \in U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right] \\ \phi_1(F^{-1}(x)) = \rho^{-1} \circ \phi_2(x); & x \in V_2 \end{cases}$$

jest ono ciągle ($\phi_1 \circ F^{-1} = \phi_1 \circ (\phi_2^{-1} \circ \rho \circ \phi_1)^{-1} = \phi_1 \circ \phi_1^{-1} \rho^{-1} \circ \phi_2$),

ciągłość odwrotnego $\tilde{\phi}_1^{-1} : W \rightarrow U'$. Znajdziemy ciągle cięcie $s_1 : U' = U_{/R_U} \rightarrow U$. Określamy je wzorem

$$s_1([x]) = x \quad \text{dla} \quad x \in U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right].$$

Wzór jest dobry bo klasy $[x]$ wyczerpują wszystkie z U' . Zbadamy jego ciągłość: otóż jego obraz jest równy $U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right]$ a ten zbiór jest otwarty w U . Zatem wystarczy zobaczyć, że $s_1^{-1}[B]$ jest otwarty dla otwartych podzbiorów B zawartych w $U_1 \setminus \phi_1^{-1} \left[\overline{K\left(0, \frac{1}{2}\right)} \right]$. Z definicji topologii ilorazowej zbiór $s_1^{-1}[B] \subset U_{/R_U}$ jest otwarty gdy $\pi_U^{-1}[s_1^{-1}[B]] \subset U$ jest otwarty, ale $\pi_U^{-1}[s_1^{-1}[B]]$ to suma klas abstrakcji punktów z $s_1^{-1}[B]$ t.j.

$$\pi_U^{-1}[s_1^{-1}[B]] = B \cup F[B] = B \cup F[B \cap V_1]$$

a to jest zbiór otwarty. Skoro złożenie $s_1 \circ \tilde{\phi}_1^{-1} : W \rightarrow U$ jest dane wzorem

$$(s_1 \circ \tilde{\phi}_1^{-1})(w) = s_1([\phi_1^{-1}(w)]) = \phi_1^{-1}(w)$$

to jest ciągle. ■

WYKŁAD 4, 29.XI.2011

5 Hiperpowierzchnie

Definicja 5.0.9 *Macierzą Jacobiego odwzorowania $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$, w punkcie $x \in U$ nazywamy macierz pochodnych cząstkowych współrzędnych odwzorowania f w punkcie x*

$$(Jf)_x = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \right]_{i \leq m, j \leq n}.$$

(dla skrótu będziemy dalej pochodne cząstkowe oznaczać także inaczej $\frac{\partial f^i}{\partial x_j} = f_{|j}^i$).

Rzędem odwzorowania $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$, w punkcie $x \in U$ nazywamy rząd macierzy Jacobiego odwzorowania ϕ w punkcie x

$$(\text{rank } f)_x = \text{rank} [f_{|j}^i(x)]_{i \leq m, j \leq k}.$$

Z liniowej algebry wiemy, że jest to wymiar obrazu odwzorowania liniowego o macierzy $(Jf)_x$ (czyli wymiar obrazu różniczki [mocnej] $(Df)_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). Z algebry liniowej dalej widzimy, że warunki są równoważne

1) $(\text{rank } f)_x = n$ (zatem w szczególności musi być $n \leq m$),

2) $\dim \operatorname{Im} (Df)_x = n$,

3) $(Df)_x$ jest monomorfizmem, czyli $\ker (Df)_x = 0$.

Gdy $n \leq m$ to odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ które jest w każdym punkcie x maksymalnego rzędu ($\operatorname{rank} f)_x = n$ nazywamy regularnym.

Z twierdzenia o dyfeomorfizmie jest

Wniosek 5.0.1 *Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = m$) regularne i globalnie różnowartościowe jest homeomorfizmem na obraz (jest dyfeomorfizmem tej klasy co ϕ).*

Przykład 5.0.15 *Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $n < m$, regularne i globalnie różnowartościowe nie musi być homeomorfizmem na obraz! (odwrotne może nie być ciągłe!). Weźmy przykład "pętka".*

Twierdzenie 5.0.4 (Tw o odwzorowaniu regularnym) *Jeżeli $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n < m$, jest odwzorowaniem regularnym, to każdy punkt $x \in U$ ma otoczenie G takie, że $f|_G : G \rightarrow f[G]$ jest homeomorfizmem na obraz $f[G] \subset \mathbb{R}^m$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^m$.*

Dowód. (Analiza IV) Niech w punkcie $x \in U$ $\operatorname{rank} \left[f_{|j}^i(x) \right]_{i \leq m, j \leq n} = n$. Wtedy istnieje rosnący ciąg indeksów $I = (i_1, \dots, i_n)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$ taki, że macierz $[f_j^{i_s}(x)]_{j,s}$ jest nieosobliwa. Wybierzmy współrzędne

$$f^I = (f^{i_1}, \dots, f^{i_n}).$$

Z tw o dyfeomorfizmie f^I jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia G punktu x na otoczenie $G' = f^I[G]$ punktu $f^I(x)$. Niech $\pi^I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie rzutem na osie $I = (i_1, \dots, i_n)$. Skoro f jest ciągłe to $f|_G : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ też jest ciągłe, więc $f|_G : G \rightarrow f[G]$ jest też ciągłe gdzie na $f[G]$ rozważamy topologię indukowaną z $\mathbb{R}^m$. Z diagramu

$$\begin{array}{ccc} & f[G] & \\ f|_G \nearrow & \downarrow \pi_{f[G]}^I & \\ G & \xrightarrow[\cong]{f|_G} & G' \end{array} \quad (5.0.1)$$

(zobaczyć przemienność!) $(f|_G)^{-1} = \left(f|_G^I \right)^{-1} \circ \pi_{f[G]}^I$ jest ciągłe gdzie na $f[G]$ rozważamy topologię indukowaną z $\mathbb{R}^m$. ■

Uwaga 5.0.2 *Z dowodu widzimy także, że $f|_G^I \circ (f|_G)^{-1}$ jest rzutem na osie $I = (i_1, \dots, i_n)$.*

Definicja 5.0.10 (1) *Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy n -wymiarową hiperpowierzchnią topologiczną jeżeli wraz z topologią indukowaną jest rozmaitością topologiczną (tzn. jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie U otwarte w M które jest homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Każdy taki homeomorfizm $\phi : U \rightarrow V$, $U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy mapą hiperpowierzchnin M . Odwrotny do niego $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ nazywa się parametryzacją M .*

(2) *Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy n -wymiarową hiperpowierzchnią kl. C^k jeżeli każdy punkt $p \in M$ ma mapę $\phi : M \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ wokół p dla której parametryzacja $\phi^{-1} : V \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna kl. C^k i jest regularna.*

Z uwagi przed definicją mamy natychmiastowy wniosek:

Twierdzenie 5.0.5 *Niech M będzie n wym. podrozmaiłością kl. C^k w $\mathbb{R}^m$. Wtedy każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie U w M na którym istnieje mapa ϕ która jest rzutowaniem na pewne osie, $\phi = \pi|_U^I$. Otoczenie to jest wykresem pewnej funkcji n zmiennych.*

Dowód. Dla mapy ϕ bierzemy parametryzację $f = \phi^{-1}$ i przy oznaczeniach j/w mapą w otoczeniu danego punktu jest $\pi^I|f[G] : f[G] \rightarrow G'$. Po odwróceniu odwzorowanie $g = (\pi^I|f[G])^{-1} = (g^1, \dots, g^m)$ ma współrzędne g^i o numerach innych niż w ciągu $I = (i_1, \dots, i_n)$ które są funkcjami zmiennych $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, jasne też że $g^{i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = x_{i_s}$. ■

Przykład $n = 2$, $m = 3$. M jest lokalnie wykresem funkcji $f(x, y)$ lub $f(x, z)$ lub $f(y, z)$.

Przykład, $n = 1$, $m = 3$, M jest lokalnie wykresem funkcji $(x(z), y(z))$ lub $(y(x), z(x))$ lub $(x(y), z(y))$.

Jeżeli już wiemy, że M jest hiperpowierzchnią to łatwiej sprawdzić aksjomaty na parametryzacje:

Stwierdzenie 5.0.1 *Niech M będzie hiperpowierzchnią n -wymiarową kl. C^k w przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Każde odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ regularne i różnowartościowe takie, że $f[\Omega] \subset M$ jest jej parametryzacją.*

Dowód. Brakuje tylko otwartości $f[\Omega]$ w M i ciągłości odwrotnego f^{-1} . Ustalmy $x \in \Omega$ i $p = f(x)$. Wokół p istnieje mapa $\phi : U \rightarrow V$ która jest rzutowaniem na pewne osie I , $\phi = \pi|_U^I$. Ponieważ na M rozważamy topologię indukowaną z $\mathbb{R}^m$ to $f : \Omega \rightarrow M$ jest ciągle. Zatem $G := f^{-1}[U]$ jest otwarty i zawiera x . Weźmy $f^I = \pi^I \circ f$. Ponieważ mapa $\phi = \pi|_U^I$ jest homeomorfizmem to składając $f|_G^I = \pi|_U^I \circ f|_G$ z lewej strony z ϕ^{-1} dostajemy równość

$$f|_G = \phi^{-1} \circ f|_G^I,$$

skąd

$$(Df)_x = D(\phi^{-1})_{f^I(x)} \circ D(f|_G^I)_x.$$

Ponieważ różniczka $(Df)_x$ jest monomorfizmem, to z tej równości wynika natychmiast to, że różniczka $D(f|_G^I)_x$ jest także monomorfizmem co pociąga za sobą (wobec równości wymiarów) jej izomorficzność. Do f^I i punktu x możemy zatem zastosować twierdzenie o dyfeomorfizmie i znaleźć otoczenie $x \in G' \subset G$ i $f^I(x) \in V' \subset V$ takie, że $f^I : G' \rightarrow V'$ jest dyfeomorfizmem. Ponieważ parametryzacja $\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow U \subset M$ jest homeomorfizmem to $U' := \phi^{-1}[V']$ jest otwarty w U a więc i w M . Ale

$$U' = \phi^{-1}[V'] = \phi^{-1}[f^I[G']] = f[G'] \subset f[\Omega].$$

Dowodzi to otwartości zbioru $f[\Omega]$ (każdy jego punkt ma otoczenie otwarte w nim zawarte). Wreszcie, skoro $f = \phi^{-1} \circ f^I$ na $f^{-1}[U]$ to tym bardziej na G' więc $f|_{U'}^{-1} = (f|_{G'}^I)^{-1} \circ \phi|_{U'}$. Dowodzi to ciągłości f^{-1} na U' a z dowolności p ciągłości f^{-1} . ■

Ćwiczenie 5.0.1 Pokazać, że odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dane wzorami

$$f(u, v) = \left(\frac{4u}{4 + u^2 + v^2}, \frac{4v}{4 + u^2 + v^2}, \frac{4 - u^2 - v^2}{4 + u^2 + v^2} \right)$$

jest parametryzacją sfery S^2 .

Definicja 5.0.11 Niech M będzie hiperpowierzchnią k -wymiarową kl. C^r w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ i niech $\phi_1 : U \rightarrow M$ i $\phi_2 : V \rightarrow M$ będą dwoma parametryzacjami w otoczeniu punktu $p \in M$ (tzn. $p \in W := \phi_1[U] \cap \phi_2[V] \subset M$). Funkcją przejścia od ϕ_1 do ϕ_2 (inaczej zmianą zmiennych) nazywamy odwzorowanie

$$\Lambda = \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}[W] \rightarrow \phi_2^{-1}[W].$$

(Dla map x i y otoczenia punktu p funkcja przejścia $\Lambda = y \circ x^{-1} : x^{-1}[D_x \cap D_y] \rightarrow y^{-1}[D_x \cap D_y]$)

WYKŁAD 5, 7.XII. 2011

Twierdzenie 5.0.6 Niech M będzie hiperpowierzchnią n -wymiarową kl. C^k w przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Funkcja przejścia dla dwu dowolnych map klasy C^k jest dyfeomorfizmem C^k (tej samej co klasa gładkości M).

Dowód. Niech $\phi_1 : M \supset U_1 \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^n$ i $\phi_2 : M \supset U_2 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^n$ będą dwoma mapami klasy C^k takimi, że $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Oczywiście odwzorowanie

$$\Lambda = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1 [U_1 \cap U_2] \rightarrow \phi_2 [U_1 \cap U_2]$$

jako złożenie dwu homeomorfizmów jest homeomorfizmem. Wystarczy pokazać gładkość Λ (z symetrii założeń oznaczać to będzie także gładkość odwrotnego, bo $\Lambda^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$). Weźmy dowolnie punkt $x \in \phi_1 [U_1 \cap U_2]$ i niech $y = \Lambda(x) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x)$. Pokażemy gładkość Λ w otoczeniu punktu x . Z regularności parametryzacji ϕ_2^{-1} wynika, że istnieją indeksy $I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ takie, że $(\phi_2^{-1})^I := \pi^I \circ \phi_2^{-1}$ jest dyfeomorfizmem otoczenia punktu G punktu y na pewien zbiór otwarty Ω w $\mathbb{R}^n$, $(\phi_2^{-1})^I|_G : G \rightarrow \Omega$. Oznaczmy odwrotny do niego dyfeomorfizm przez $\rho : \Omega \rightarrow G$, wtedy w otoczeniu punktu $p = \phi_2^{-1}(y)$ mamy równość

$$\phi_2 = \rho \circ \pi^I$$

skąd w otoczeniu punktu x mamy

$$\Lambda = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \rho \circ \pi^I \circ \phi_1 = \rho \circ \phi_1^I$$

a to jest gładkie, co dowodzi gładkości Λ na otoczeniu punktu x . ■

Wniosek 5.0.1 Hiperpowierzchnia n -wymiarowa klasy C^k w $\mathbb{R}^m$ jest w naturalny sposób rozmaitością różniczkową klasy C^k (wszystkie mapy klasy C^k tworzą atlas klasy C^k).

Zadanie dla młodych fizyków (aby wzmocnili siły a analizy wielu zmiennych).

Twierdzenie 5.0.7 (O funkcji uwikłanej) Korzystając z twierdzenia o dyfeomorfizmie udowodnić twierdzenie o funkcji uwikłanej: jeżeli $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ jest funkcją klasy C^k taką, że $f(a, b) = 0$ i $\det \left[f_{|j}^i(a, b) \right]_{i,j \leq p} \neq 0$ {dziedzina f może być mniejsza - otoczenie punktu (a, b) } to istnieje otoczenie $a \in V \subset \mathbb{R}^p$ i otoczenie $b \in W \subset \mathbb{R}^q$ takie, że jeżeli $w \in W$ to istnieje jedyny punkt $v(w) \in V$ dla którego $f(v(w), w) = 0$. Funkcja $W \rightarrow V$ określona wzorem $w \mapsto v(w)$ jest klasy C^k .

Jako zastosowanie rozwiązać zadanie:

Ćwiczenie 5.0.2 a) Korzystając wyłącznie z tw. o funkcji uwikłanej pokazać, że zbiór

$$T = \left\{ (x, y, z); (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

jest 2-wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^∞ .

b) Pokazać, że jest to powierzchnia obrotowa powstała przez obrót okręgu $(y-2)^2 + z^2 = 1$ wokół osi OZ (jest to więc torus).

c) Znaleźć atlas złożony z trzech map.

Ćwiczenie 5.0.3 Niech $p(t) = (y(t), z(t))$ będzie funkcją [przebiegiem] klasy C^∞ w $\mathbb{R}^2$ (o zmiennych (y, z)) różnowartościowym i takim, że $y(t) > 0$. Pokazać, że po obrocie wokół osi OZ otrzymamy powierzchnię klasy C^∞ . Znaleźć atlas złożony z dwu map.

6 Odwzorowania gładkie między rozmaitościami

Definicja 6.0.12 *Odwzorowaniem klasy C^k z rozmaitości różniczkowej M klasy C^k o atlasie $\mathcal{A}$ w rozmaitość N klasy C^k o atlasie $\mathcal{B}$ nazywamy funkcje $F : M \rightarrow N$ taką, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje mapa $\phi \in \mathcal{A}$ i mapa $\psi \in \mathcal{B}$ takie, że*

- a) $p \in D_\phi$, $F(p) \in D_\psi$,
- b) $F(D_\phi) \subset D_\psi$,
- c) odwzorowanie $\psi \circ F \circ \phi^{-1} \in C^k$ (jako odwzorowanie między podzbiórmi otwartymi w przestrzeniach kartezjańskich $\mathbb{R}^{\dim M}$ w $\mathbb{R}^{\dim N}$).

Odwzorowanie $F : M \rightarrow N$ jest ciągle. Jeżeli $F : M \rightarrow N$ jest ciągle to jest klasy C^k gddy dla każdego $\phi \in \mathcal{A}$ i $\psi \in \mathcal{B}$ odwzorowanie $\psi \circ F \circ \phi^{-1} \in C^k$ (z ciągłości F mamy $F^{-1}(D_\psi)$ jest otwarty, więc dla dowolnego $p \in F^{-1}(D_\psi)$ znajdziemy mapę $\phi \in \mathcal{A}$ taką, że $D_\phi \subset F^{-1}(D_\psi)$, skąd $F(D_\phi) \subset D_\psi$).

Definicja 6.0.13 *Odwzorowanie $F : M \rightarrow N$ nazywamy dyfeomorfizmem klasy C^k jeśli jest bijekcją oraz F i F^{-1} są klasy C^k .*

Ćwiczenie 6.0.4 *Weźmy $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone wzorem*

$$P(x, y) = (ax^3 - 3axy^2 + bx^2 - by^2 + xx + d, 3ax^2y - ay^2 + 2bxy + cy),$$

gdzie $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Za pomocą rzutu stereograficznego h_+ określamy odwzorowanie

$$f : S^2 \rightarrow S^2$$

wzorem

$$f(p) = \begin{cases} h_+^{-1} \circ P \circ h_+(p), & p \neq (0, 0, 1) \\ (0, 0, 1), & p = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Pokazać, że $f : S^2 \rightarrow S^2$ jest klasy C^∞ .

Ćwiczenie 6.0.5 *Uogólnienie powyższego: Niech $\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie ustalonym wielomianem zespolonym różnym od stałej.*

$$\omega(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ dla $i = 0, 1, \dots, z \in \mathbb{C}$. Utożsamiamy $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Rozważmy rzut stereograficzny h_+ z bieguna północnego i połączmy $f : S^2 \rightarrow S^2$ określone wzorem

$$g(p) = \begin{cases} h_+^{-1} \circ \omega \circ h_+(p), & p \neq (0, 0, 1) \\ (0, 0, 1), & p = (0, 0, 1). \end{cases}.$$

Pokazać gładkość (klasę C^∞) odwzorowania g między hiperpowierzchniami - sferami S^2 . Podać przykład odwzorowania $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ którego współrzędne są wielomianami rzeczywistymi, dla którego teza nie zachodzi.

Ćwiczenie 6.0.6 *Kontynuacja zadania (5.0.2). Pokazać, że powierzchnia T jest dyfeomorficzna z produktem kartezjańskim $S^1 \times S^1$.*

Kolejne ważne pytanie: Czy każda spójna rozmaitość różniczkowa jest dyfeomorficzna z hiperpowierzchnią? Otóż tak jest gddy topologia rozmaitości jest parazwarta. (parazwartość wprowadził Dieudonne, zaś twierdzenia o zanurzaniu pochodzą od Whitneya, koniec lat 40-tych).

Twierdzenie 6.0.8 (Twierdzenie o zanurzaniu) Każda spójna n wymiarowa rozmaitość różniczkowa Hausdorffa i parazwarta jest dyfeomorficzna z pewną hiperpowierzchnią n wymiarową w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$.

7 Zbiory mieralne na rozmaitości, miara i całka Lebesque'a na hiperpowierzchni

Definicja 7.0.14 Niech M będzie n -wymiarową rozmaitością topologiczną. Podzbiór $A \subset M$ nazywamy *mieralny w sensie Lebesque'a* jeżeli w $\mathbb{R}^n$ dla każdej parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$ zbiór $\phi^{-1}[A \cap \phi[V]]$ jest mieralny w sensie Lebesque'a w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy rodzinę tych zbiorów przez $\mathfrak{M}_M$. Podzbiór $A \subset M$ nazywamy *zbiorem miary 0* jeżeli dla każdej parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$ zbiór $\phi^{-1}[A \cap \phi[V]] \subset \mathbb{R}^n$ ma zerową miarę Lebesque'a w $\mathbb{R}^n$.

Pytanie. Czy jest prawdą, że jeżeli dla ustalonej parametryzacji ϕ na rozmaitości topologicznej M i podzbioru $A \subset \phi[D_\phi]$ mamy $\phi^{-1}[A \cap \phi[D_\phi]]$ jest mieralny to czy zbiór $A \in \mathfrak{M}_M$? Czy dla $M = \mathbb{R}^n$ rodzina $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^n}$ powyżej zdefiniowana = rodzina zbiorów mieralnych w sensie Lebesque'a na $\mathbb{R}^n$?

Twierdzenie 7.0.9 (i) Rodzina $\mathfrak{M}_M$ jest σ -ciałem (czyli przeliczalnie addytywnym ciałem) zbiorów zawierającym wszystkie zbiory borelowskie (tzn. zbiory z najmniejszego σ -ciała podzbiorów M zawierającego zbiory otwarte).

(ii) Rodzina $\mathfrak{M}_M$ jest zupełna, tzn. każdy podzbiór zbioru miary zero jest mieralny i ma miarę 0.

Dowód. (i)

1) $\mathfrak{M}_M$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni M .

a) $\emptyset \in \mathfrak{M}_M$,

b) gdy $A \in \mathfrak{M}_M$ to $M \setminus A \in \mathfrak{M}_M$,

c) gdy $A_n \in \mathfrak{M}_M$, $n = 1, 2, \dots$ to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}_M$.

Niech ϕ będzie dowolną parametryzacją na M . a) $\phi^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, b) $\phi^{-1}[M \setminus A] = \phi^{-1}[M] \setminus \phi^{-1}[A] = V \setminus \phi^{-1}[A]$ jest mieralny, c) $\phi^{-1}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}[A_n]$ jest mieralny.

2) każdy zbiór A otwarty w M należy do $\mathfrak{M}_M$ bo $\phi^{-1}[A]$ jest otawarty w $\mathbb{R}^n$,

3) każdy podzbiór borelowski należy do $\mathfrak{M}_M$. Istotnie, skoro $\tau_M \subset \mathfrak{M}_M$ a $\mathfrak{M}_M$ jest σ -ciałem to najmniejsze σ -ciało zawierające τ_M musi być zawarte w $\mathfrak{M}_M$.

(ii) Niech A będzie miary 0 i niech $B \subset A$. Wówczas dla dowolnej parametryzacji ϕ mamy $\phi^{-1}[B \cap \phi[D_\phi]] \subset \phi^{-1}[A \cap \phi[D_\phi]]$. Ten drugi jest mieralny, więc z zupełności miary Lebesque'a na $\mathbb{R}^n$ mamy mieralność i miarę zero dla $\phi^{-1}[B \cap \phi[D_\phi]]$. ■

Twierdzenie 7.0.10 (O istnieniu miary i całki Lebesque’a na hiperpowierzchni)
MIARA) Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ będzie n -wymiarową hiperpowierzchniową klasy C^1 . Wówczas istnieje dokładnie jedna miara μ_M określona na σ -ciele $\mathfrak{M}_M$ taka, że

(*) dla dowolnej parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$ [klasy C^1] jeżeli $A \subset \phi[V]$ i $A \in \mathfrak{M}_M$ to jego miara jest równa

$$\mu_M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} |\phi'|$$

gdzie $|\phi'|$ oznacza tzw. moduł pochodnej określony następująco: gdy $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ to

$$|\phi'| = \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \begin{vmatrix} \phi_{|1}^{i_1} & \dots & \phi_{|1}^{i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{|n}^{i_1} & \dots & \phi_{|n}^{i_n} \end{vmatrix}^2}.$$

CAŁKA) Funkcja rzeczywista $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ określona na zbiorze mierzalnym $A \subset M$ hiperpowierzchni M wymiaru n jest mierzalna w/g miary gddy dla każdej parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$ superpozycja $f \circ \phi$ jest mierzalna względem n -wymiarowej miary Lebesque’a na $\mathbb{R}^n$. W szczególności każda funkcja ciągła na M jest mierzalna. Jeśli $A \in \mathfrak{M}_M$ i $A \subset \phi[V]$, gdzie $\phi : V \rightarrow U \subset M$ jest parametryzacją, to dla dowolnej funkcji rzeczywistej $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mierzalnej w sensie miary μ_M zachodzi wzór

$$\int_A f \, d\mu_M = \int_{\phi^{-1}[A]} f \circ \phi \cdot |\phi'|.$$

W szczególności

$$|A| = \int_A 1 \cdot d\mu_M = \int_{\phi^{-1}[A]} |\phi'|.$$

WYKŁAD 6, 13.XII. 2011

Dowód. Przestrzeń $\mathbb{R}^m$ z naturalną topologią jest ośrodkowa. Istotnie, prostopadłościany o wymiernych bokach $\{(x_1, \dots, x_n); a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ są rodziną przeliczalną i rodzina ta stanowi bazę. Podzbiór M przestrzeni ośrodkowej jest przestrzenią ośrodkową (przecięcia $B_n \cap M$ stanowią bazę dla M).

Twierdzenie Lindelöfa. Dla każdej rodziny $(A_t)_{t \in T}$ podzbiorów otwartych przestrzeni ośrodkowej istnieje podzbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że $\bigcup_{t \in T_0} A_t = \bigcup_{t \in T} A_t$.

Dowód nietrudny, patrz np. Sikorski BM 28, Tw. III, 5.1.

Hiperpowierzchnia M jest ośrodkowa (jako podzbiór $\mathbb{R}^m$). M jest sumą otwartych w M podzbiorów U które są dziedzinami map. Z Tw. Lindelöfa wynika, że z rodziny tych otwartych podzbiorów U pokrywających M można wybrać ciąg przeliczalny U_n . Tzn. istnieje ciąg parametryzacji $\phi_n : V_n \rightarrow U_n \subset M$ taki, że $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n[V_n]$. Określamy rodzinę podzbiorów:

- $B_1 = \phi_1[V_1]$,
- $B_n = \phi_n[V_n] \setminus (\phi_1[V_1] \cup \dots \cup \phi_{n-1}[V_{n-1}])$ dla $n > 1$.

Zbiory te należą do $\mathfrak{M}_M$ (bo są borelowskie), są rozłączne oraz $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}_M$ oznaczmy $C_n = B_n \cap A$. Oczywiście $C_n \in \mathfrak{M}_M$. Kładziemy

$$\mu_M(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\phi_n^{-1}[C_n]} |\phi'_n|.$$

Łatwo sprawdzamy, że μ_M jest miarą (dla $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ podzbiorów rozłącznych mierzalnych zachodzi $\mu_M(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_M(A_m)$ - sprawdzić!). Teraz sprawdzamy spełnienie warunku (*). Niech $A \subset \phi[V]$ gdzie $A \in \mathfrak{M}_M$ i parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$. Oznaczmy przez Λ_n funkcje przejścia dla ϕ_n i ϕ , $\Lambda_n = \phi_n^{-1} \circ \phi$. Wtedy dla $C_n = B_n \cap A$ mamy $C_n \subset U \cap U_n$ oraz

$$\Lambda_n[\phi^{-1}[C_n]] = \phi_n^{-1}[C_n].$$

Z Tw o całkowaniu przez podstawienie

$$\int_{\phi_n^{-1}[C_n]} |\phi'_n| = \int_{\phi^{-1}[C_n]} (|\phi'_n| \circ \Lambda_n) \cdot |\Lambda'_n| = \int_{\phi^{-1}[C_n]} |\phi'|$$

(bo $(|\phi'_n| \circ \Lambda_n) \cdot |\Lambda'_n| = |\phi'|$ - patrz szczegóły Sikorski V 3.5 - na mocy prostych własności wyznaczników). Sumując po n otrzymujemy $\mu_M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} |\phi'|$. Warunek (*) określa miarę jednoznacznie.

CAŁKA) Najpierw pomocniczy lemat:

Lemat. Dowolna hiperpowierzchnia M' wymiaru $< n$ zawarta w hiperpowierzchni n -wymiarowej M ma miarę μ_M równą zeru.

Dowód lematu. Wystarczy pokazać, że dla dowolnej parametryzacji $\phi : V \rightarrow U \subset M$ zbiór $\phi^{-1}[M']$ ma miarę zero. Oczywiście $\phi^{-1}[M']$ jest hiperpowierzchnią w V (**ćwiczenie!**). Zagadnienie sprowadza się zatem do pokazania, że hiperpowierzchnia M w $\mathbb{R}^m$ wymiaru $< m$ ma miarę Lebesgue'a m -wymiarową równą zeru. Tak jest w istocie, bo z tw. Lindelöfa M jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych w M które są wykresami funkcji kl. C^k . Wiemy z klasycznej teorii że wykres taki (nawet dla funkcji mierzalnej) ma miarę zero.

Cd dowodu. Dowód klasyczny: najpierw dla funkcji charakterystycznych zbioru mierzalnego, potem dla funkcji prostej, potem przez przejście graniczne dla funkcji mierzalnych nieujemnych i wreszcie dla dowolnych mierzalnych przez rozłożenie na sumę części niedodatniej i nieujemnej. ■

Ćwiczenie 7.0.7 (1) Gdy $n = 1$, tzn. $M = L$ jest krzywą w $\mathbb{R}^m$ o parametryzacji ϕ to dla mierzalnego zbioru $A \subset \phi(D_\phi)$ i funkcji mierzalnej $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\int_A f d\mu_M = \int_{\phi^{-1}[A]} f \circ \phi(t) \cdot \sqrt{(\phi^1)'(t)^2 + \dots + (\phi^m)'(t)^2} dt.$$

(2) dla $n = 2$ i $m = 3$ (powierzchnia 2-wymiarowa w $\mathbb{R}^3$) dostajemy wzór (ϕ , A i f jak wyżej)

$$\int_A f d\mu_M = \int_{\phi^{-1}[A]} f \circ \phi(x, y) \cdot \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| dx dy.$$

Ćwiczenie 7.0.8 Obliczyć pole powierzchni równoległoboku w $\mathbb{R}^4$ rozpiętego na wektorach $[1, 2, -3, 4]$, $[2, 0, 2, -3]$ (równoległobok jest mierzalnym podzbiorem na odpowiedniej płaszczyźnie - 2-wymiarowej hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^4$). Uogólnić rezultat na obliczenie objętości k -wymiarowego równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ w przestrzeni n -wymiarowej $\mathbb{R}^n$.

8 Przeciwobraz wartości regularnej

Poznamy tu tylko najprostszą wersję twierdzenia o przeciwobrazach. Dla dużo ogólniejszej patrz znakomita książka

— R.Narasimhan *Analysis on complex and real manifolds*.

Definicja 8.0.15 Niech $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem kl. C^k . Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ nazywamy punktem krytycznym jeżeli różniczka $(DF)_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nie jest epimorfizmem. Równoważnie, jeżeli macierz Jacobiego $(JF)_{\mathbf{x}}$ ma rząd mniejszy od m . Obraz $F(\mathbf{x})$ punktu $\mathbf{x}$ nazywamy wartością krytyczną odwzorowania F . Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ który nie jest wartością krytyczną nazywa się wartością regularną.

W szczególności, każdy punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus F[\Omega]$ jest wartością regularną. Zauważmy też, że punkt $\mathbf{y} \in F[\Omega]$ jest wartością regularną jeżeli żaden punkt $\mathbf{x} \in F^{-1}[\{\mathbf{y}\}]$ nie jest krytyczny.

Przykład 8.0.16 Weźmy $F(x, y) = x^2 + y^2$. Czy 1 jest wartością regularną? Zbadamy punkty z przeciwobrazu $F^{-1}[\{1\}] = S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$. Niech $(x_0, y_0) \in S^1$. Obliczamy macierz Jacobiego $(JF)_{(x_0, y_0)} = [2x_0, 2y_0]$. Jej rząd jest mniejszy od 1 gdy jest równy 0 t.j. gdy $x_0 = 0 = y_0$. Ale $(0, 0)$ nie należy do S^1 . Zatem 1 jest wartością regularną.

Twierdzenie 8.0.11 Jeżeli $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem kl. C^k i $a \in \mathbb{R}^m$ jest wartością regularną taką, że $F^{-1}[\{a\}] \neq \emptyset$ to przeciwobraz $F^{-1}[\{a\}]$ jest hiperpowierzchnią $n - m$ -wymiarową klasy C^k .

Dowód. Niech $\mathbf{x}_0 \in F^{-1}[\{a\}]$. Z założenia, że a jest wartością regularną mamy $(DF)_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest epimorfizmem, tzn. jego rząd (czyli rząd macierzy Jacobiego) jest równy m . Oczywiście $n \geq m$. Z definicji rzędu macierzy wynika, że istnieją indeksy $j_1 < \dots < j_m$ ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\det [F_{|j_s}^i(\mathbf{x}_0)]_{i,s \leq m} \neq 0.$$

Dla uproszczenia rozważań, zmienimy numerację zmiennych, tak aby $j_1, \dots, j_m$ były ostatnimi m indeksami spośród $\{1, 2, \dots, n\}$, t.j. aby to były to $n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$. Weźmy pomocniczo odwzorowanie

$$G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, F^1(x_1, \dots, x_n), \dots, F^m(x_1, \dots, x_n)).$$

Obliczmy jego macierz Jacobiego w punkcie $\mathbf{x}_0$

$$(JG)_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & F^1_{|n-m+1} & \cdots & F^m_{|n-m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F^1_{|n} & \cdots & F^m_{|n} \end{bmatrix}$$

(w lewym górnym rogu jest macierz jednostkowa wymiaru $n - m$).

$$\det (JG)_{\mathbf{x}_0} = 1 \cdot \det [F^i_{|n-m+s}]_{1 \leq i, s \leq m} \neq 0.$$

Z Tw. o dyfeomorfizmie G jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia Ω' punktu $\mathbf{x}_0$ na otoczenie Ω'' punktu $G(\mathbf{x}_0) = (x_{01}, \dots, x_{0n-m}, a_1, \dots, a_m)$

$$G|_{\Omega'} : \Omega' \rightarrow \Omega''.$$

Wykażemy, że

$$G[\Omega' \cap F^{-1}(a)] = \Omega'' \cap H$$

gdzie H jest $n - m$ wymiarową hiperpowierzchnią (hiperpłaszczyzną) o równaniu

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = a_1 \\ x_{n-m+2} = a_2 \\ \cdots \\ x_n = a_m. \end{cases}$$

" $\subset$ " Niech $b \in \Omega' \cap F^{-1}(a)$. Wtedy $G(b) \in G[\Omega'] = \Omega''$. Poza tym $F(b) = a$ więc

$$G(b) = (b_1, \dots, b_{n-m}, F^1(b), \dots, F^m(b)) = (b_1, \dots, b_{n-m}, a_1, \dots, a_m) \in H.$$

" $\supset$ ". Niech $y \in \Omega'' \cap H$. Wówczas

$$y_{n-m+1} = a_1, \dots, y_{n-m+m} = a_m$$

oraz skoro $\Omega'' = G[\Omega']$ to $y = G(b)$ dla pewnego $b \in \Omega'$. Zatem

$$(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{n-m}, a_1, \dots, a_m) = G(b) = (b_1, \dots, b_{n-m}, F^1(b), \dots, F^m(b)).$$

Stąd

$$a_i = F^i(b)$$

t.j.

$$a = F(b)$$

co oznacza, że $b \in F^{-1}(a)$. Zatem $y = G(b)$ dla $b \in F^{-1}(a) \cap \Omega'$. Dowodzi to szukanej równości.

Weźmy

$$V = \{(x_1, \dots, x_{n-m}); (x_1, \dots, x_{n-m}, a_1, \dots, a_m) \in \Omega'' \cap H\}$$

i homeomorfizm (obcięcie rzutu na pierwsze $n - m$ osi)

$$pr|H : H \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}, \quad (x_1, \dots, x_{n-m}, a_1, \dots, a_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-m}),$$

oraz

$$U = \Omega' \cap F^{-1}(a) \subset F^{-1}(a) - \text{otwarty podzbiór w } F^{-1}(a).$$

Pokażemy, że

$$f = G^{-1} \circ (pr|H)^{-1}|V$$

dane wzorem

$$f(x_1, \dots, x_{n-m}) = G^{-1}(x_1, \dots, x_{n-m}, a_1, \dots, a_m)$$

jest parametryzacją zbioru $F^{-1}(a)$ w otoczeniu $\mathbf{x}_0$.

1) ϕ jest kl. C^k bo G^{-1} jest kl. C^k .

2) ϕ jest homeomorfizmem $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow F^{-1}(a) \cap V \subset F^{-1}(a)$ jako złożenie homeomorfizmów.

3) ϕ jest regularne ponieważ jego macierz Jacobiego zbudowana jest w ten sposób, że wierszami są pochodne cząstkowe G^{-1} po $x_1, \dots, x_{n-m}$ a one są liniowo-niezależne. ■

WYKŁAD 7, 20.XII. 2011

Uogólnienie bez dowodu (ćwiczenie)

Twierdzenie 8.0.12 (a) Jeżeli $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^k i $Q \subset \mathbb{R}^m$ jest hiperpowierzchnią wymiaru r . Jeżeli $F^{-1}[Q] \neq \emptyset$ i każdy punkt $y \in Q$ jest wartością regularną odwzorowania F to $F^{-1}[Q]$ jest też hiperpowierzchnią kl. C^k i obie Q oraz $F^{-1}[Q]$ mają ten sam kowymiar, tzn $n - \dim F^{-1}[Q] = m - \dim Q$.

UWAGA. Po wprowadzeniu wektorów stycznych do rozmaitości i przestrzeni stycznych oraz różniczki odwzorowania między rozmaitościami oraz pojęcia podrozmaitości można będzie łatwo uogólnić powyższe dwa twierdzenia na odwzorowanie F między rozmaitościami. Poza tym można iść jeszcze dalej w kierunku twierdzenia

Twierdzenie. Niech $F : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem klasy C^k , $Q \subset N$ podrozmaitością N . Jeżeli F jest transversalne do Q , tzn. dla każdego $x \in F^{-1}[Q]$ zachodzi równość przestrzeni wektorowych

$$\text{Im}(DF)(x) + T_{F(x)}Q = T_{F(x)}N,$$

wówczas $F^{-1}(Q)$ jest podrozmaitością rozmaitości M .

Dowód w Narasimhanie.

Ćwiczenie 8.0.9 Zadanie 58. Znaleźć wartości regularne odwzorowania

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 4a(x^3 + y^2(a + x)), \quad a \neq 0.$$

Ćwiczenie 8.0.10 Zadanie 59. Znaleźć wartości regularne odwzorowania

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 4a(x^3 + y^2(a + x)), \quad a \neq 0.$$

Ćwiczenie 8.0.11 Zadanie 60. Znaleźć wartości regularne odwzorowania

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x(x^2 + y^2) - 2ay^2, \quad a \neq 0.$$

Ćwiczenie 8.0.12 Zadanie 61. Czy 0 jest wartością regularną odwzorowania

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^3 - a^2 x^2 y^2, \quad a \neq 0.$$

Przykład 8.0.17 62 Czy zbiór $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy = z^3 - 3, yz = x + x^2\}$ jest hiperpowierzchnią?

Ćwiczenie 8.0.13 Zadanie 63. Pokazać, że podzbiory $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$, $h^{-1}(0)$ są hiperpowierzchniami kl. C^∞ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - a^2, \\ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto y - \sinh \frac{z}{b}, \\ h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(x^2 + y^2 - a^2, y - \sinh \frac{z}{b}\right).$$

Pokazać, że $h^{-1}(0)$ jest linią śrubową.

Ćwiczenie 8.0.14 Zadanie 64. Pokazać, że podzbiory $M = f^{-1}(0)$, $N = g^{-1}(0)$, oraz $M \cap N$ są hiperpowierzchniami kl. C^∞ ($a > 0$)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - a^2, \\ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - ax.$$

Ćwiczenie 8.0.15 Zadanie 65. Sprawdzić, że zbiór

$$x^2 - y^2 + z^3 = -1$$

opisuje powierzchnie. Znaleźć jej dowolną parametryzację w otoczeniu punktu $(0, 1, 0)$.

Ćwiczenie 8.0.16 Zadanie 66. Pokazać, że $M = h^{-1}(0)$ jest krzywą kl. C^∞ dla

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - 2x).$$

9 Grupy Liego

9.1 Definicja i wstępne własności

Rozmaitości różniczkowe i odwzorowania klasy C^∞ będziemy nazywać krótko *gładkimi*.

Definicja 9.1.1 Grupą Liego nazywamy grupę G która ma strukturę gładkiej rozmaitości różniczkowej [nie zakładamy apriori **żadnych** aksjomatów oddzielania ani II aksjomatu przeliczalności - będzie to wynikało z aksjomatów] i dla której grupowe działanie

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

jest gładkie.

Przykład 9.1.1 Grupa $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem i standardową strukturą gładkiej rozmaitości w $\mathbb{R}^n$ jest grupą Liego bo dodawanie $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem gładkim.

Przykład 9.1.2 Grupa macierzy rzeczywistych nieosobliwych $GL(n, \mathbb{R})$ jako otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^{n^2}$ jest gładką rozmaitością, mnożenie macierzy $(AB)_i^j = \sum_k A_i^k B_k^j$ jest określone po współrzędnych jako funkcja wielomianowa, jest więc gładka. Zatem $GL(n, \mathbb{R})$ jest grupą Liego.

Ćwiczenie 9.1.1 Jeżeli $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem klasy C^k oraz $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $N \subset \mathbb{R}^m$ są hiperpowierzchniami klasy C^k takimi, że $F[M] \subset N$, to indukowane odwzorowanie $F : M \rightarrow N$ jest klasy C^k .

Przykład 9.1.3 Hiperpowierzchnia gładka $S^1 \subset \mathbb{C}$ z mnożeniem liczb zespolonych $(z, w) \mapsto z \cdot w$ (w zapisie wykładniczym dla liczb o module 1 $e^{ti} \cdot e^{\tau i} = e^{(t+\tau)i}$) tworzy grupę Liego. Dlatego, że mnożenie liczb zespolonych $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) jest gładkie więc jego obcięcie do $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ na mocy poprzedniego ćwiczenia jest też gładkie.

Przykład 9.1.4 Jeśli G_1 i G_2 są grupami Liego, to produkt kartezjański $G_1 \times G_2$ z produktem rozmaitości i produktem mnożenia grupowego jest grupą Liego.

Niech G będzie grupą Liego. Lewa translacja $L_a : G \rightarrow G$, $L_a(g) = ag$, jest gładka ($G \xrightarrow{g \mapsto (a, g)} G \times G \xrightarrow{\cdot} G$); skoro $L_{a^{-1}}$ też jest gładka oraz $L_{a^{-1}}$ jest odwrotne do L_a , $L_a \circ L_{a^{-1}} = Id$ oraz $L_{a^{-1}} \circ L_a = Id$ to L_a jest gładkim dyfeomorfizmem.

Analogicznie prawa translacja $R_a : G \rightarrow G$, $R_a(g) = ga$, jest też dyfeomorfizmem.

Twierdzenie 9.1.1 Jeżeli G jest grupą Liego to operacja odwracania elementów $^{-1} : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Ponieważ $^{-1} : G \rightarrow G$ jest bijekcją oraz odwrotną jest ona sama to wystarczy pokazać gładkość odwracania. Pokażemy, że wystarczy udowodnić gładkość w otoczeniu jednostki $e \in G$. Weźmy dowolnie $g \in G$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} ^{-1} &= R_{g^{-1}} \circ ^{-1} \circ L_{g^{-1}}, \\ R_{g^{-1}} \circ ^{-1} \circ L_{g^{-1}}(h) &= R_{g^{-1}} \circ ^{-1}(g^{-1}h) = R_{g^{-1}}\left((g^{-1}h)^{-1}\right) = R_{g^{-1}}(h^{-1}g) \\ &= h^{-1}gg^{-1} = h^{-1} = ^{-1}(h), \end{aligned}$$

poza tym $L_{g^{-1}}$ przeprowadza otoczenie punktu g na otoczenie jedności e , więc jeśli $^{-1}$ jest gładka w otoczeniu jedności e to $^{-1} = R_{g^{-1}} \circ ^{-1} \circ L_{g^{-1}}$ jest gładka w otoczeniu g .

Do pokazania gładkości $^{-1}$ w otoczeniu jedności e weźmy dowolną mapę $\phi : U \rightarrow V$ w otoczeniu $e \in U$. Ponieważ mnożenie $\cdot : G \times G \rightarrow G$ jest gładkie, to jest ciągłe, więc $(\cdot)^{-1} U \subset G \times G$ jest otwartym otoczeniem (e, e) a, że na produkcie mamy topologię produktową, to istnieje otoczenie $e \in V$ takie, że $V \times V \subset (\cdot)^{-1} U$ czyli $V^2 \subset U$. Przenieśmy mnożenie $\cdot : V \times V \rightarrow U$ za pomocą mapy $\phi|_V$ i ϕ do otwartych podzbiorów przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$)

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\cdot} & U \\ \phi \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \phi[V] \times \phi[V] & \xrightarrow{f} & \phi[U]. \end{array}$$

Ponieważ $g \cdot e = g$ to $f(w, 0) = w$ dla wszystkich $w \in \phi[V]$. Stąd w szczególności $f_{|j}^i(0, 0) = \delta_i^j$ czyli $\det \left[f_{|j}^i(0, 0) \right]_{i,j \leq n} \neq 0$. Dla lepszego oglądu oznaczymy identyczne czynniki w $V \times V$ przez V_1 i V_2 kolejno. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieją otoczenia $0 \in V_1' \subset V$ oraz $0 \in V_2' \subset V$ i jednoznacznie określone gładkie odwzorowanie $\rho : V_2' \rightarrow V_1'$ które jest uwikłane w równanie $f(x, y) = 0$ czyli spełniające równość

$$f(\rho(y), y) = 0.$$

Pozostaje zauważyć, że odwzorowanie ρ odpowiada w mapie ϕ odwracaniu elementów w grupie G , $\phi^{-1} \circ \rho \circ \phi = ^{-1}$. Istotnie, z przemienności diagramu mamy

$$\phi^{-1}(f(x, y)) = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y),$$

zatem, skoro $\phi(e) = 0$, to $f(x, y) = 0$ gdd $\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y) = e$, skąd z równości $f(\rho(y), y) = 0$ otrzymujemy

$$\phi^{-1}(\rho(y)) \cdot \phi^{-1}(y) = \phi^{-1}(0) = e.$$

Dla $y = \phi(g)$ jest

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\rho(\phi(g))) \cdot \phi^{-1}(\phi(g)) &= e \\ \phi^{-1}(\rho(\phi(g))) \cdot g &= e \\ \phi^{-1}(\rho(\phi(g))) &= g^{-1}. \end{aligned}$$

■

9.2 Grupy topologiczne, podstawowe własności topologiczne.

Uwaga 9.2.1 W definiowaniu grupy topologicznej trzeba dołożyć aksjomat o ciągłości odwracania - nie ma z czego tego wywnioskować /powinien być przykład grupy na prz. top. dla której mnożenie jest ciągłe a odwracanie nie - nie znam.

Lemat 9.2.1 *Elementarne własności topologiczne grupy topologicznej [w szczególności grupy Liego]. Niech G będzie grupą topologiczną i niech U, V będą jej otwartymi podzbiórmi.*

- Dla $a \in U$ zbiór

$$aU := L_a[U]$$

jest otwarty / L_a jest homeo.

-

$$UV = \{gh; g \in U, h \in V\} = \bigcup_g gV$$

jest otwarty.

- Jeśli $e \in U$ to istnieje otwarte otoczenie jednośc $e \in W$ takie, że $W^2 \subset U$ / z ciągłości mnożenia.

-

$$U^{-1} = \{g^{-1}; g \in U\}$$

jest też otwarty / bo $^{-1}$ jest homeo.

- Jeśli $e \in U$ to istnieje otwarte otoczenie jednośc $e \in V$ takie, że $V = V^{-1}$ i $V^2 \subset U$ / bierzemy najpierw otoczenie $e \in W$ takie, że $W^2 \subset U$ a następnie $V = W \cap W^{-1}$.

Uwaga 9.2.2 Oczywiście: jeśli G jest grupą topologiczną i $H \subset G$ jest podgrupą, to H z topologią indukowaną jest podgrupą topologiczną. Podgrupę która jest otwartym podzbiorem nazywamy otwartą podgrupą, zaś która jest domkniętym podzbiorem - domkniętą podgrupą.

Lemat 9.2.2 Podgrupa otwarta H grupy topologicznej G jest też domknięta.

Dowód. Pokażemy że $G \setminus H$ jest podzbiorem otwartym. Niech $g \notin H$. Wtedy $gH \subset (G \setminus H)$. Istotnie, niech $x \in gH$ i przypuśćmy, że $x \notin G \setminus H$, czyli $x \in H$ wówczas $x = gh$ dla pewnego $h \in H$ i $g = xh^{-1} \in H$ wbrew założeniu. Stąd

$$G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} (gH)$$

jest otwarty. ■

Stwierdzenie 9.2.1 Spójna grupa topologiczna G jest generowana przez dowolne otoczenie otwarte jednośc.

Dowód. Niech U będzie otwartym otoczeniem jednośc $e \in U \subset G$. Oznaczmy przez H najmniejszą podgrupę G zawierającą U (jest to podgrupa generowana przez U). H jest otwarta bo dla dowolnego $h \in H$ zachodzi $hU \subset H$. Z lematu H jest też domknięta, więc ze spójności $H = G$. ■

Lemat 9.2.3 Jeśli G jest grupą topologiczną T_1 to jest T_2 .

Dowód. Najpierw założmy, że $g \neq e$. Pokażemy, że istnieją otwarte otoczenia e i g rozłączne. Z założenia T_1 istnieje otoczenie $e \in U$ nie zawierające g , $g \notin U$. Z ciągłości mnożenia i odwracania (elementarne własności) znajdujemy otoczenie $e \in V$ takie, że

$$V^{-1}V \subset U.$$

Wówczas $Vg \cap V = \emptyset$. Istotnie, gdyby istniał $x \in Vg \cap V$ to $x = hg$ dla pewnego $h \in V$ stąd $g = h^{-1}x \in V^{-1}V \subset U$ wbrew założeniu. Zbiory V i Vg oddzielają więc e i g .

Ogólnie, niech $g, g' \in G$. Z poprzedniego istnieją otoczenia W i W' oddzielające e i $g^{-1}g'$. Wtedy gW i gW' oddzielają g i g' . ■

9.3 Grupy Liego - własności topologiczne cd.

Uwaga 9.3.1 Dowolna rozmaitość topologiczna M (bez zakładania aksjomatów oddzielania) jest T_1 . Istotnie, niech $x, y \in M$, $x \neq y$. Jeśli x i y leżą w dziedzinie jednej mapy $\phi : U \rightarrow V$, $x, y \in U$ to skoro $\mathbb{R}^n$ jest T_2 to punkty $\phi(x)$ i $\phi(y)$ można oddzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi $\phi(x) \in V_1$ i $\phi(y) \in V_2$ w V . Wtedy $x \in U_1 := \phi^{-1}[V_1]$ jest otwarty w M i $y \notin U_1$. Jeśli x i y nie leżą w jednej mapie i $\phi : U \rightarrow V$ jest mapą taką, że $x \in U$ oraz $y \notin U$ to U oddziela x i y .

Jako wniosek dostajemy

Stwierdzenie 9.3.1 Każda grupa Liego jest T_2 .

Trochę trudniej jest udowodnić

Twierdzenie 9.3.1 Każda spójna grupa Liego G ma bazę przeliczalną.

Dowód. Szkic:

1. $e \in U = U^{-1}$ - otoczenie współrzędnościowe, homeomorficzne z $V \subset \mathbb{R}^n$, ma ośrodek $S' \subset U$ (przel i gęsty),
2. $S := S' \cup (S')^{-1} = S^{-1} \subset U$ jest przeliczalny i gęsty w U ,
3. H podgrupa generowana przez S , jest przeliczalna.
4. $\bar{H} = G$. Istotnie: niech $g \in G$ i niech $g \in V \subset G$ dowolne otwarte otoczenie g w G . Pokażemy, że istnieje $h \in H$ taki, że $h \in V$. U generuje G więc $g = g_1 \dots g_p$, $g_i \in U$. Z ciągłości mnożenia znajdziemy otoczenia $g_i \in V_i \subset U$ takie, że $V_1 \cdot \dots \cdot V_p \subset V$. Skoro S jest gęsty w U to istnieją $h_1, \dots, h_p \in S$ takie, że $h_i \in V_i$. Stąd $h := h_1 \cdot \dots \cdot h_p \in H \cap V$. ■

WYKŁAD 8, 4.I. 2012

10 Wektory i przestrzenie styczne do hiperpowierzchni

Definicja 10.0.1 Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ będzie n - wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^k , $k \geq 1$, i niech $p \in M$. Weźmy dowolną parametryzację $g : \mathbb{R}^n \supset V \xrightarrow{\cong} U \subset M$ hiperpowierzchni M obejmującą p , $p \in U$, i niech $p \in g(x)$ dla $x \in V$. Przez $(Dg)_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oznaczmy różniczkę odwzorowania w punkcie x . Przestrzenią styczną do hiperpowierzchni M w punkcie y nazywamy obraz różniczki odwzorowania g w punkcie x

$$T_p M = \text{Im} (Dg)_x \subset \mathbb{R}^m.$$

Zauważmy, że definicja przestrzeni stycznej do hiperpowierzchni M jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru parametryzacji.

W tym celu weźmy dwie parametryzacje $g_1 : V_1 \xrightarrow{\cong} U_1 \subset M$, $g_2 : V_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \subset M$ otoczeń punktu $p \in U_1 \cap U_2$ i niech $p = g_1(x_1) = g_2(x_2)$. Weźmy $(Dg)_{x_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $(Dg)_{x_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, różniczki odwzorowań g_1 i g_2 w punktach odpowiednio x_1 i x_2 .

Weźmy funkcję przejścia $\Lambda = g_2^{-1} \circ g_1$, jest to dyfeomorfizm otoczenia punktu x_1 na otoczenie punktu x_2 , jego różniczka w każdym punkcie jest izomorfizmem. Stąd skoro $g_1 = g_2 \circ \Lambda$ (w otoczeniu x_1), to

$$\text{Im}(Dg_1)_{x_1} = \text{Im}(D(g_2 \circ \Lambda)_{x_1}) = (Dg_2)_{x_2} [\text{Im}(D\Lambda)_{x_1}] = (Dg_2)_{x_2}(\mathbb{R}^n) = \text{Im}(Dg_2)_{x_2}.$$

Dla parametryzacji $g : V \rightarrow U \subset M$ hiperpowierzchni M i punktu $x \in V$ oznaczmy przez $(dg)_x : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} T_{g(x)}M$ izomorfizm liniowy taki, że

$$(Dg)_x : \mathbb{R}^n \xrightarrow{(dg)_x} T_{g(x)}M \hookrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Jasne, że gdy M jest podprzestrzenią wektorową lub jest hiperpowierzchnią - warstwą względem M (czyli równoległym przesunięciem M , $v + M$ - a więc hiperpłaszczyzną o przestrzeni wektorów równoległych M) to przestrzeń styczna do M w każdym punkcie jest równa M .

Wniosek 10.0.2 *Standardowa notacja bazy przestrzeni stycznej T_pM za pomocą mapy x . Niech $x = (x_1, \dots, x_n) : M \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ będzie mapą na rozmaitości M w otoczeniu punktu $p \in U$, weźmy parametryzację x^{-1} . Niech e_i będzie bazą $\mathbb{R}^n$ wersorów osi współrzędnych. Wektory (stanowią bazę)*

$$(dx^{-1})_{x(p)}(e_i) \in T_pM$$

oznaczamy

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = (dx^{-1})_{x(p)}(e_i).$$

Dla funkcji gładkiej $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ przez pochodną w kierunku wektora $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ rozumiemy liczbę $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ określoną wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = (f \circ x^{-1})_{|i}(x(p))$$

czyli $D(f \circ x^{-1})_{x(p)}(e_i)$. Oznaczając zwykłe pochodne cząstkowe w $\mathbb{R}^n$ (czyli j/w dla mapy identyczności $x = (x_1, \dots, x_n) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ można też tradycyjnie napisać $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))$.

Definicja 10.0.2 Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ i $N \subset \mathbb{R}^l$ będą hiperpowierzchniami klasy C^k wymiarów n i k odpowiednio, oraz $f : M \rightarrow N$ niech będzie odwzorowaniem gładkim. Weźmy $p \in M$ i $q = f(p) \in N$. Przez $df_p : T_pM \rightarrow T_qN$ oznaczmy pochodną (różniczkę) odwzorowania w punkcie p zdefiniowaną jak następuje. Weźmy dwie dowolne parametryzacje: $g : V \rightarrow U \subset M$, $h : V' \rightarrow U' \subset N$ otoczenia punktu p i q , odpowiednio, takie, że $f[U] \subset U'$.

Stąd $\tilde{f} = h^{-1} \circ f \circ g : V \rightarrow V'$ jest dobrze określonym przekształceniem gładkim, oraz w otoczeniu p

$$f = h \circ \tilde{f} \circ g^{-1}.$$

Niech $x = g^{-1}(p)$ i $y = h^{-1}(q)$. Kładziemy

$$df_p = dh_y \circ \left(D\tilde{f} \right)_x \circ (dg)_x^{-1} : T_p M \rightarrow T_q N.$$

Bardzo łatwo sprawdzamy (Ćwiczenie) poprawność definicji, czyli niezależność od wyboru parametryzacji.

Równie łatwo obserwujemy, że dla odwzorowania $F : \mathbb{R}^m \supset \Omega \rightarrow N \subset \mathbb{R}^l$ i punktu $x \in \Omega$

$$(DF)_x(\mathbb{R}_m) \subset T_{F(x)}N,$$

czyli

$$(DF)_x : \mathbb{R}^m \xrightarrow{(dF)_x} T_{F(x)}N \hookrightarrow \mathbb{R}^l.$$

Łatwo sprawdzamy regułę łańcuchową $d(f \circ g)_p = (df)_{g(p)} \circ (dg)_p$ dla superpozycji odwzorowań między hiperpowierzchniami.

Opiszemy różniczkę $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ w terminach wektorów bazowych dla map wokół p i $f(p)$.

Lemat 10.0.1 Niech $f : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem klasy C^k między hiperpowierzchniami M i N i niech $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_k)$ będą mapami na M i N w otoczeniach punktów p i $f(p)$. Wtedy

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} (p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}. \quad (10.0.1)$$

Dowód. Dla odwzorowania F między przestrzeniami Euklidesowymi $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ różniczką dF_x jest odwzorowaniem liniowym o macierzy Jacobiego. Oznaczmy bazy wektorów w $\mathbb{R}^n$ przez e_i zaś w $\mathbb{R}^k$ przez e'_j . Wtedy jeżeli $dF_x(e_i) = \sum_j a^j e'_j$ to $a^j = dF_x^j(e_i) = F_{|i}^j(x)$, zatem $dF_x(e_i) = \sum_j F_{|i}^j(x) e'_j$. Wracając do rozważań o $f : M \rightarrow N$ oraz map x i y mamy $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = d(x^{-1})_{x(p)}(e_i)$ oraz $\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} = d(y^{-1})_{y(f(p))}(e'_j)$ oraz z definicji różniczki $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ mamy $df_p = d(y^{-1})_{y(f(p))} \circ (Dy \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \circ (dx^{-1})_{x(p)}^{-1}$. Stąd

$$\begin{aligned} df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) &= d(y^{-1})_{y(f(p))} \circ (Dy \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \circ (dx^{-1})_{x(p)}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \\ &= d(y^{-1})_{y(f(p))} \circ (Dy \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}(e_i) \\ &= d(y^{-1})_{y(f(p))} \left(\sum_j (y^j \circ f \circ x^{-1})_i(x(p)) e'_j \right) \\ &= \sum_j (y^j \circ f \circ x^{-1})_i(x(p)) d(y^{-1})_{y(f(p))}(e'_j) \\ &= \sum_j (y^j \circ f \circ x^{-1})_i(x(p)) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} = \sum_j \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} (p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}. \end{aligned}$$

■

Wnioskiem jest: rząd odwzorowania f w punkcie p to rząd macierzy $\left[\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}(p) \right]_{\substack{i \leq n \\ j \leq k}}$.

Używając różniczki $(df)_x$ odwzorowania między hiperpowierzchniami analogicznie definiujemy punkt krytyczny, wartość krytyczną i wartość regularną. Bez problemu możemy nieco uogólnić twierdzenie o przeciwobrazie wartości regularnej.

Twierdzenie 10.0.3 *Niech $F : \mathbb{R}^m \supset \Omega \rightarrow N \subset \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem kl. C^k o wartościach w hiperpowierzchni N i $a \in N$ niech będzie wartością regularną taką, że $F^{-1}[\{a\}] \neq \emptyset$ (tzn. dla każdego $x \in F^{-1}[\{a\}]$ różniczka $(dF)_x : \mathbb{R}^m \rightarrow T_a N$ jest epimorfizmem). Wówczas przeciwobraz $F^{-1}[\{a\}]$ jest hiperpowierzchnią $m - \dim N$ wymiarową klasy C^k .*

Dowód. Dla dowolnej parametryzacji mapy $\phi : U \rightarrow V$ hiperpowierzchni N w otoczeniu a mamy

$$F^{-1}[\{a\}] = (\phi \circ F|_{F^{-1}[U]})^{-1}[\{a'\}], \quad \text{gdzie } a' = \phi(a),$$

dla $x \in F^{-1}[\{a\}]$ różniczka

$$d(\phi \circ F)_x = (d\phi)_a \circ (dF)_x$$

jest epimorfizmem. Zatem a' jest wartością regularną odwzorowania $\phi \circ F|_{F^{-1}[U]}$. Z pierwszego tw. o przeciwobrazie $(\phi \circ F|_{F^{-1}[U]})^{-1}[\{a'\}]$ jest hiperpowierzchnią wymiaru $m - \dim N$ kl. C^k , a że jest to równe $F^{-1}[\{a\}]$ to otrzymujemy tezę. ■

11 Podgrupy Liego grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$

11.1 Podstawowe twierdzenie o tworzeniu podgrup Liego grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$

Twierdzenie 11.1.1 *Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ będzie hiperpowierzchnią gładką wymiaru k i niech $\nu : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem gładkim o wartościach w hiperpowierzchni M o którym zakładamy, że jest rzędu $k = \dim M$ w jedności*

$$e = \mathbf{1}_n$$

grupy Liego $GL(n, \mathbb{R})$ (tzn. dla $p = \nu(e)$ mamy $(d\nu)_e : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow T_p M$ jest epimorfizmem - $\text{Im}(d\nu)_e \subset T_p M$ i $\dim \text{Im}(d\nu)_e = k$).

Niech

$$H := \nu^{-1}(p)$$

oraz załóżmy, że

$$\nu(hg) = \nu(g), \quad \text{dla } h \in H, g \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Wówczas

(a) H jest podgrupą grupy $GL(n, \mathbb{R})$,

(b) H jest hiperpowierzchnią i ze strukturą grupy jest grupą Liego wymiaru $\dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim M = n^2 - k$.

Dowód. Sprawdzamy, że H jest podgrupą.

Niech $h_1, h_2 \in H$, wówczas $\nu(h_1 h_2) = \nu(h_2) = p$, skąd $h_1 h_2 \in H$,

Niech $h \in H$, wówczas $\nu(e) = \nu(h h^{-1}) = \nu(h^{-1})$ skąd $h^{-1} \in H$.

Zgodnie z twierdzeniem 10.0.3 aby pokazać, że H jest hiperpowierzchnią wystarczy zauważyć, że p jest wartością regularną odwzorowania $\nu : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M$. Niech $h \in H$. Wtedy równość $\nu(h^{-1}g) = \nu(g)$ oznacza $\nu \circ L_{h^{-1}} = \nu$. zatem

$$(d\nu)_h = d(\nu \circ L_{h^{-1}})_h = (d\nu)_e \circ (dL_{h^{-1}})_h$$

ma rząd k jako złożenie liniowego izomorfizmu $(dL_{h^{-1}})_h : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ z odwzorowaniem liniowym $(d\nu)_e : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow T_p M \subset \mathbb{R}^m$ rzędu $k = \dim M$.

Ponieważ mnożenie $\cdot : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ jest gładkie, to jego obcięcie do hiperpowierzchni $\cdot : H \times H \rightarrow H$ jest też gładkie (ćw. 9.1.1). Zatem H jest grupą Liego. ■

Stwierdzenie 11.1.1 Niech $n > 1$. Grupa $SL(n, \mathbb{R})$ macierzy o wyznaczniku 1 jest grupą Liego wymiaru $n^2 - 1$.

Dowód. Rozważmy $m = 1$ i odwzorowanie $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ i $M = \mathbb{R}$. Pokażemy, że są spełnione założenia ostatniego twierdzenia. Najpierw pokażemy, że $\text{rank}(\det)_e = 1$, czyli któraś pochodna cząstkowa $\frac{\partial}{\partial x_i^j}(\det)_e \neq 0$. Ponieważ z rozwinięcia Laplace'a względem i -tego wiersza dla $A = [x_i^j]$ mamy

$$\det A = \sum_j x_i^j \cdot (M_A)_i^j$$

gdzie $(M_A)_i^j$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu x_i^j (czyli $(-1)^{i+j} \cdot \det(\text{macierz po usunięciu } i\text{-tego w } j\text{-kol})$) to

$$\frac{\partial}{\partial x_i^j}(\det)_A = (M_A)_i^j$$

(wyznacznik $(M_A)_i^j$ nie zawiera zmiennej x_i^j). W szczególności (macierz po usunięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny w e jest nadal jednostkowa wymiaru $n - 1$ na $n - 1$ i jej wyznacznik jest $+1$)

$$\frac{\partial}{\partial x_1^1}(\det)_e = 1.$$

Warunek $\det(hg) = \det(g)$ to twierdzenie Cauchy'ego. cnu. ■

WYKŁAD 9, 11.I. 2012

11.2 Grupa obrotów

Powróćmy na moment do Tw. 11.1.1.

Lemat 11.2.1 Przestrzeń styczna do H w jedności e jest równa $\ker(d\nu)_e$.

Dowód. Niech $j : H \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ będzie inkluzją. Ponieważ $\nu \circ j$ jest odwzorowaniem stałym to $d(\nu \circ j)_e = 0$ skąd

$$(dj)_j [T_e H] \subset \ker(d\nu)_e,$$

ale obie przestrzenie wektorowe mają ten sam wymiar równy $\dim H = n^2 - \dim M$ więc się pokrywają. ■

Poniższy przykład hiperpowierzchni (hiperpłaszczyzny $\frac{n(n+1)}{2}$ - wymiarowej w $\mathbb{R}^{n^2}$ a jeszcze dokładniej podprzestrzeni wektorowej) będzie potrzebny niżej w badaniu grupy ortogonalnej $O(n, \mathbb{R})$. Jasne, że gdy $M \subset \mathbb{R}^l$ jest podprzestrzenią wektorową lub jest hiperpowierzchnią - warstwą względem M (czyli równoległym przesunięciem M , $v + M$) a więc hiperpłaszczyzną o przestrzeni wektorów równoległych M) to przestrzeń styczna do M w każdym punkcie jest równa M .

Przykład 11.2.1 Macierze symetryczne $S(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_i^j] \in M(n, \mathbb{R}); a_i^j = a_j^i\} \subset M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ nie są grupą (co łatwo sprawdzić na przykładach) ale stanowią hiperpowierzchnię wymiaru $\frac{n(n+1)}{2}$ (podprzestrzeń wektorową) z jedną globalną mapą

$$\begin{aligned} y &: S(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= [a_i^j] \mapsto (a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, a_2^2, a_2^3, \dots, a_2^n, \dots, a_n^n). \end{aligned}$$

y jest ciągła - obcięcie rzutowania $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ na wszystkie osie o bi-numerach $\binom{j}{i}$ dla $i \leq j$ do podzbioru $S(n, \mathbb{R})$. Odwzorowanie odwrotne

$$g = y^{-1} : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow S(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$$

jest liniowe dane wzorem

$$g_i^j(a) = \begin{cases} a_i^j, & \text{gdy } i \leq j \\ a_j^i, & \text{gdy } i > j \end{cases},$$

jest ono monomorfizmem więc jego rząd jest $\frac{n(n+1)}{2}$. Zatem g jest globalną parametryzacją $S(n, \mathbb{R})$.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy A wymiaru $n \times n$ macierz $A^T A$ jest symetryczna

$$(A^T A)_i^j = \sum_k (A^T)_i^k A_k^j = \sum_k A_k^i A_k^j = \sum_k A_k^j A_k^i = \sum_k (A^T)_j^k A_k^i = (A^T A)_j^i.$$

Definicja 11.2.1 Macierz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ nazywa się ortogonalna jeżeli $A^T A = e$, tzn. gdy $A^{-1} = A^T$ (wiersze i kolumny są ortonormalne). Macierze ortogonalne tworzą grupę $O(n, \mathbb{R})$.

Stwierdzenie 11.2.1 Niech $n > 1$. Grupa $O(n, \mathbb{R})$ macierzy ortogonalnych jest grupą Liego wymiaru $\frac{n(n-1)}{2}$. Przestrzeń styczna do $O(n, \mathbb{R})$ w jedności e to przestrzeń macierzy $\{\lambda; \lambda^T + \lambda = 0\}$ - macierzy skośnie symetrycznych $\lambda_i^j = -\lambda_j^i$.

Dowód. Rozważmy $m = n^2$, $M = S(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ - hiperpowierzchnię wymiaru $\frac{n(n+1)}{2}$ w $\mathbb{R}^{n^2}$ i odwzorowanie gładkie

$$\nu : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T A.$$

Mamy

$$O(n, \mathbb{R}) = \nu^{-1}(e).$$

Łatwo sprawdzamy $\nu(hg) = \nu(g)$, dla $h \in O(n, \mathbb{R})$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$:

$$\nu(hg) = (hg)^T hg = g^T h^T hg = g^T (h^T h) g = g^T e g = g^T g = \nu(g).$$

Zatem $O(n, \mathbb{R})$ jest podgrupą.

[Dodatkowo spostrzegamy, że ν indukuje bijekcję $[\nu] : GL(n, \mathbb{R}) / O(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R})$, $[\nu](X \cdot O(n, \mathbb{R})) = \nu(X)$.]

Pozostaje pokazać, że różniczka $(d\nu)_e : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow T_e M$ jest epimorfizmem (czyli rzędu $\dim M$). W tym celu weźmy "kanoniczne" mapy x i y na $GL(n, \mathbb{R})$ i $S(n, \mathbb{R})$, $x = (x_i^j)_{i,j \leq n}$, $y = (y_i^j)_{i \leq j \leq n}$. Do policzenia postaci tej różniczki obliczymy najpierw $(d\nu)_e \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_e \right)$, $r, s \leq n$. Z wzoru 10.0.1 $df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}$

$$\begin{aligned} (d\nu)_e \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_e \right) &= \sum_{i \leq j} \frac{\partial(y_i^j \circ \nu)}{\partial x_r^s}(e) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ / y_i^j \circ \nu(X) &= (X^T X)_i^j = \sum_k x_k^i x_k^j \\ &= \sum_{i \leq j} \left(\frac{\partial(\sum_k x_k^i x_k^j)}{\partial x_r^s} \right)(e) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ &= \sum_{i \leq j} (\sum_k (\delta_{kr} \delta^{is} x_k^j + x_k^i \delta_{kr} \delta^{sj}))(e) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ &= \sum_{i \leq j} (\delta^{is} x_r^j + x_r^i \delta^{sj})(e) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ &= \sum_{i \leq j} (\delta^{is} \delta_r^j + \delta_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)}. \end{aligned}$$

Pozwala to znaleźć wzór na różniczkę

$$\begin{aligned} (d\nu)_e \left(\sum_{r,s} \lambda_r^s \frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_e \right) &= \sum_{r,s} \lambda_r^s (d\nu)_e \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_e \right) \\ &= \sum_{r,s} \lambda_r^s \sum_{i \leq j} (\delta^{is} \delta_r^j + \delta_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ &= \sum_{i \leq j} \sum_{r,s} \lambda_r^s (\delta^{is} \delta_r^j + \delta_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \\ &= \sum_{i \leq j} (\lambda_j^i + \lambda_i^j) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(e)} \end{aligned}$$

Zatem $(d\nu)_e$ za pomocą współrzędnych w bazach wyraża się wzorem

$$(d\nu)_e \left([\lambda_r^s]_{r,s} \right) = [\lambda_j^i + \lambda_i^j]_{i \leq j},$$

Jest widoczne, że jest to epimorfizm; wystarczy dla górnótrójkątnej macierzy $[a_i^j]_{i \leq j}$ wziąć

$$\lambda_r^s = \begin{cases} \frac{1}{2}a_r^s, & r \leq s \\ \frac{1}{2}a_s^r, & r > s \end{cases}. \text{ Wtedy}$$

$$(d\nu)_e \left([\lambda_r^s]_{r,s} \right) = \left[\frac{1}{2}a_i^j + \frac{1}{2}a_i^j \right]_{i \leq j} = [a_i^j]_{i \leq j}.$$

W konkluzji $O(n, \mathbb{R})$ jest hiperpowierzchnią i grupą Liego wymiaru $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Rozważając odwzorowanie gładkie w przestrzeń wszystkich macierzy

$$\nu : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}, \quad A \mapsto A^T A,$$

i powtarzając rozumowanie z dowodu Tw 11.1.1 dla map kanonicznych x i y na $GL(n, \mathbb{R})$ i $M_{n \times n}$ (czyli identyczności) otrzymamy wzór na różniczkę $(d\nu)_e : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$

$$(d\nu)_e(\lambda) = \lambda^T + \lambda.$$

Zatem przestrzeń styczna w jedności do $O(n, \mathbb{R})$ oznaczana $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ lub $Sk(n, \mathbb{R})$ to przestrzeń wektorowa $\ker(d\nu)_e = \{\lambda; \lambda^T + \lambda = 0\} = \{\lambda; \lambda_i^j = -\lambda_j^i\}$ macierzy skośnie-symetrycznych. ■

Widzimy dodatkowo, że $\text{Im}(d\nu)_e$ to są macierze symetryczne stanowiące oczywiście przestrzeń styczną do przestrzeni liniowej macierzy symetrycznych $S(n, \mathbb{R})$

$$\text{Im}(d\nu)_e = T_e(S(n, \mathbb{R})) = S(n, \mathbb{R}).$$

Ćwiczenie 11.2.1 Sprawdzić, że przestrzeń wektorowa macierzy skośnie-symetrycznych $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ względem tzw. nawiasu Liego $[A, B] = AB - BA$ jest algebrą Liego, tzn. nawias $[\cdot, \cdot]$ spełnia aksjomaty:

- jest skośnie symetryczny,
- spełnia tożsamość Jacobiego $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$ ($[[A, B], C] + \text{cycl} = 0$).

Ćwiczenie 11.2.2 Różniczka odwzorowania ν w dowolnym punkcie X wynosi

$$(d\nu)_X(\lambda) = \lambda^T X + X^T \lambda = (X^T \lambda)^T + X^T \lambda$$

i jasne, że jej obraz to też macierze symetryczne. Pokazać, że obraz (skąd także rząd) tego odwzorowania nie zależy od $X \in GL(n, \mathbb{R})$. Czyli że

$$\text{Im}(d\nu)_X = \text{Im}(d\nu)_e.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
(d\nu)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \right) &= \sum_{i \leq j} (\delta^{is} X_r^j + X_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(X)} \\
(d\nu)_X \left(\Sigma_{r,s} \lambda_r^s \frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_X \right) &= \Sigma_{r,s} \lambda_r^s (d\nu)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \Big|_e \right) \\
&= \Sigma_{r,s} \lambda_r^s \sum_{i \leq j} (\delta^{is} X_r^j + X_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(X)} \\
&= \sum_{i \leq j} \Sigma_{r,s} \lambda_r^s (\delta^{is} X_r^j + X_r^i \delta^{sj}) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(X)} \\
&= \sum_{i \leq j} \Sigma_r (\lambda_r^i X_r^j + \lambda_r^j X_r^i) \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(X)} \\
&= \sum_{i \leq j} (\lambda^T X)_i^j + (X^T \lambda)_i^j \frac{\partial}{\partial y_i^j} \Big|_{\nu(X)}
\end{aligned}$$

Zatem $(d\nu)_X$ za pomocą współrzędnych w bazach wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}
(d\nu)_X \left([\lambda_r^s]_{r,s} \right) &= \left[(\lambda^T X)_i^j + (X^T \lambda)_i^j \right]_{i \leq j}, \\
(d\nu)_X (\lambda) &= \lambda^T X + X^T \lambda = (X^T \lambda)^T + X^T \lambda.
\end{aligned}$$

Co do niezależności rzędu od $(d\nu)_X$ od X $((d\nu)_e(\lambda) = \lambda^T + \lambda)$

$$\begin{aligned}
(d\nu)_X (\lambda) &= (X^T \lambda)^T + X^T \lambda = (d\nu)_e (X^T \lambda) = (d\nu)_e \circ L_{X^T} (\lambda), \\
(d\nu)_X &= (d\nu)_e \circ L_{X^T}.
\end{aligned}$$

Skoro $L_X : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ jest liniowym izomorfizmem dla macierzy nieosobliwej X to $\text{Im}(d\nu)_X = \text{Im}(d\nu)_e$.

Uwaga 11.2.1 Grupa Liego $O(n, \mathbb{R})$ ma dwie składowe: jedną jest $SO(n, \mathbb{R})$ grupa macierzy ortogonalnych o wyznaczniku $+1$ (dowód nie jest trywialny i tu jest za wcześniej na łatwy dowód) a drugą składową jest podzbiór macierzy o wyznaczniku -1 . $SO(n, \mathbb{R})$ jest oczywiście otwarcie domknięta, ma wymiar taki jak $O(n, \mathbb{R})$. Grupa macierzy zespolonych $GL(n, \mathbb{C})$ jest spójna i jest to zasadnicza różnica między geometrią rzeczywistą a zespoloną.

Dlaczego grupa obrotów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma akurat tyle wymiarów?

ŁYK GEOMETRII ANALITYCZNEJ Przestrzeni Euklidesowych:

Z wykładu geometrii analitycznej (sem II) wiemy:

Odwzorowanie liniowe o macierzy ortogonalnej jest izometrią i odwrotnie: izometria jest złożeniem izomorfizmu o macierzy ortogonalnej z przesunięciem. Formalniej: oznaczmy przez $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ standardowy iloczyn skalarny $\langle v, w \rangle = \Sigma_i v^i w^i$.

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem liniowym. Trzy warunki są różnoważne (patrz Geometria Analityczna przestrzeni Euklidesowych) - jest to banalny fakt typu "ćwiczenia":

- f jest izometrią (czyli zachowuje odległość $d_e(v, w) = d_e(f(v), f(w))$)
- f zachowuje iloczyn skalarny $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$
- jego macierz w bazie e_i jest ortogonalna.

Inzaczej mówiąc: utożsamiając macierz z odwzorowaniem liniowym o tej macierzy mamy

$$O(n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ jest izomorfizmem liniowym i } \forall_v \forall_w (\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle)\} \quad (11.2.1)$$

Nawet więcej (mniej trywialny fakt) - jeżeli odwzorowanie dowolne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $f(0) = 0$ jest izometrią to jest liniowe i dalej j/w; dowolna izometria $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest postaci $g(x) = g(0) + f(x)$ dla pewnej izometrii liniowej f (czyli $f(x) := g(x) - g(0)$) jest liniowa i jest izometrią, czyli ma macierz ON.

Zobaczmy ortogonalność macierzy izometrii względem standardowego iloczynu skalarnego $\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i$. Dla wersorów e^i mamy $\langle e^i, e^j \rangle = \delta^{ij}$. Zatem macierz odwzorowania dwuliniowego -iloczyn skalarny- to macierz jednostkowa $\mathbf{1}_n$. Jeżeli zapisać wektory z $\mathbb{R}^n$ w postaci macierzy 1-kolumnowych to $\langle v, w \rangle = v^T \cdot \mathbf{1}_n \cdot w$, istotnie

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i = [v_1, \dots, v_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v^T \cdot \mathbf{1}_n \cdot w.$$

Zdefiniujemy macierz A izomorfizmu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ w taki sposób aby zachodziła równość $f(v) = A \cdot v$. Wybieramy sposób taki: niech $f(e^i) = \sum_j a_j^i e^j$, wtedy określamy macierz A w postaci $A = [a_j^i]$. [Druga metoda da macierz transponowaną $f(e_i) = \sum_j a_i^j e_j$]. Sprawdzamy

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = f\left(\sum_i v_i e^i\right) = \sum_i v_i f(e^i) = \sum_i v_i \sum_j a_j^i e^j = \sum_j \sum_i a_j^i v_i e^j \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i a_1^i v_i \\ \vdots \\ \sum_i a_n^i v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & & a_1^n \\ & \ddots & \\ a_n^1 & & a_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = A \cdot v. \end{aligned}$$

Z dwuliniowości $\langle, \rangle$ widzimy, że warunek $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ jest równoważny warunkom tylko dla bazy e^i , $\langle e^i, e^j \rangle = \langle f(e^i), f(e^j) \rangle$. Istotnie, gdy dla bazy zachodzi to

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \sum_i v_i e^i, \sum_j w_j e^j \rangle = \sum_{i,j} v_i w_j \langle e^i, e^j \rangle = \sum_{i,j} v_i w_j \langle f(e^i), f(e^j) \rangle \\ &= \langle \sum_i v_i f(e^i), \sum_j w_j f(e^j) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle. \end{aligned}$$

Dla macierzy $A = [a_j^i]$, $f(e^i) = \sum_j a_j^i e^j$ jest to równoważne

$$\begin{aligned} \delta_i^j &= \langle e^i, e^j \rangle = \langle f(e^i), f(e^j) \rangle = \langle \sum_k a_k^i e^k, \sum_r a_r^j e^r \rangle \\ &= \sum_{k,r} a_k^i a_r^j \langle e^k, e^r \rangle = \sum_{k,r} a_k^i a_r^j \delta^{kr} = \sum_k a_k^i a_k^j \\ &= \sum_k (a^T)_i^k a_k^j = \sum_k (A^T \cdot A)_i^j. \end{aligned}$$

Czyli

$$\mathbf{1} = A^T \cdot A$$

Rozpatrzmy tylko izometrie posiadające 0 jako punkt stały. Są to wszystkie izomorfizmy liniowe o macierzy ortogonalnej.

1. *Obrotem elementarnym* w $\mathbb{R}^n$ rozumiemy izometrię $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ która jest obrotem względem pewnych dwu współrzędnych i identycznością względem pozostałych współrzędnych.

2. *Izometrią elementarną* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy złożenie skończonej ilości obrotów elementarnych i przesunięcia.

3. Izometrię $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *zwykłą* (albo *zachowującą orientację*) jeżeli jej wyznacznik jest równy +1 i nazywamy *zwierciadlaną* (albo *zmieniającą orientację*) jeżeli jej wyznacznik jest równy -1.

4. Izometrie zwykłe tworzą grupę. Wszystkie macierze izometrii zwykłych $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tworzą grupę $SO(n)$.

5. Każda izometria zwykła (czyli zachowująca orientację) jest izometrią elementarną, czyli jest złożeniem obrotów elementarnych z przesunięciem. Zatem wymiar $SO(n, \mathbb{R})$ to ilość wyborów dwu zmiennych spośród n .

Ile jest wyborów dwu zmiennych spośród n ? Odpowiedź $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim SO(n, \mathbb{R}) = \dim O(n, \mathbb{R})$. Dla $n = 2$ mamy wymiar 1, dla $n = 3$ mamy wymiar 3, dla $n = 4$ mamy wymiar 6.

11.3 Podgrupy macierzy niezmienniczych względem odwzorowania dwuliniowego

Wiecej grup Liego dostaniemy uogólniając w powyższej definicji iloczyn skalarny $\langle, \rangle$ na dowolne odwzorowanie dwuliniowe $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Po pierwsze ogół izomorfizmów $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachowujących ω niezmienniczo

$$\{f; \omega(v, w) = \omega(f(v), f(w)) \text{ dla dowolnych } v, w\}$$

jest grupą -trywiał. Niech e^i będzie bazą $\mathbb{R}^n$ i niech $a_i^j = \omega(e^i, e^j)$ będzie macierzą odwzorowania ω . Wówczas

$$\omega(v, w) = v^T \cdot a \cdot w.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \omega(v, w) &= \omega(\sum_i v_i e^i, \sum_j w_j e^j) = \sum_{ij} v_i w_j \omega(e^i, e^j) = \sum_{ij} v_i w_j a_i^j = \sum_{ij} v_i a_i^j w_j \\ &= [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} a_1^1 & & a_1^n \\ & \ddots & \\ a_n^1 & & a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v^T \cdot a \cdot w. \end{aligned}$$

Lemat 11.3.1 Niech e^i będzie bazą $\mathbb{R}^n$ i niech $\omega_i^j = \omega(e^i, e^j)$ będzie macierzą odwzorowania ω . Wówczas f o macierzy A zachowuje niezmienniczo ω gddy

$$A^T \omega A = \omega.$$

Dowód. $\Leftarrow$ Załóżmy, że $A^T \omega A = \omega$. Wtedy

$$\begin{aligned}\omega(f(v), f(w)) &= f(v)^T \omega f(w) = (A \cdot v)^T \omega A \cdot w \\ &= v^T A^T \omega A w = v^T \omega w = \omega(v, w).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Załóżmy, że f zachowuje ω niezmienniczo, tzn. $\omega(v, w) = \omega(f(v), f(w))$. Biorąc wektory bazowe e^i mamy

$$\begin{aligned}a_i^j &= \omega(e^i, e^j) = \omega(f(e^i), f(e^j)) = \omega(\Sigma_k a_k^i e^k, \Sigma_r a_r^j e^r) = \Sigma_{kr} a_k^i a_r^j \omega(e^k, e^r) \\ &= \Sigma_{kr} (a^T)_i^k \omega(e^k, e^r) a_r^j = \Sigma_{kr} (a^T)_i^k \omega_k^r a_r^j = (A^T \omega A)_i^j\end{aligned}$$

czyli

$$A = A^T \omega A.$$

■

Rozważmy gładkie odwzorowanie

$$\nu : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M \subset M_{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}$$

$$\nu(A) = A^T \omega A.$$

Mamy $\nu(e) = \omega$. Definiujemy

$$H = \nu^{-1}(\omega).$$

Łatwo sprawdzamy warunek $\nu(hg) = \nu(g)$, dla $h \in H, g \in GL(n, \mathbb{R})$. Stąd H jest podgrupą $GL(n, \mathbb{R})$. Jasne, że H jest domknięta, więc z ogólnego twierdzenia o domkniętej podgrupie grupy Liego, H jest grupą Liego. Czy można to zobaczyć i obliczyć jej wymiar na podstawie Tw. 11.1.1. Nie jest to ogólnie łatwe i nie ma w żadnym podręczniku.

Obliczamy różniczkę $(d\nu)_e$

Ćwiczenie 11.3.1 $(d\nu)_e : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ jest zadana wzorem

$$(d\nu)_e(\lambda) = \lambda^T \omega + \omega \lambda = (\omega^T \lambda)^T + \omega \lambda.$$

W dowolnym punkcie X wynosi

$$(d\nu)_X(\lambda) = \lambda^T \omega X + X^T \omega \lambda = (X^T \omega^T \lambda)^T + X^T \omega \lambda.$$

$$\begin{aligned}
(d\nu)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \right) &= \sum_{ij} (\Sigma_t \delta_{si} \omega_r^t X_t^j + \Sigma_k X_k^i \omega_k^r \delta_{sj}) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
(d\nu)_X \left(\Sigma_{r,s} \lambda_r^s \frac{\partial}{\partial x_r^s|_X} \right) &= \Sigma_{r,s} \lambda_r^s (d\nu)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_r^s} \right) \\
&= \Sigma_{r,s} \lambda_r^s \sum_{ij} (\Sigma_t \delta_{si} \omega_r^t X_t^j + \Sigma_k X_k^i \omega_k^r \delta_{sj}) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
&= \sum_{ij} \Sigma_{r,s} \lambda_r^s (\Sigma_t \delta_{si} \omega_r^t X_t^j + \Sigma_k X_k^i \omega_k^r \delta_{sj}) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
&= \sum_{ij} (\Sigma_t \Sigma_{r,s} \lambda_r^s \delta_{si} \omega_r^t X_t^j + \Sigma_k \Sigma_{r,s} \lambda_r^s X_k^i \omega_k^r \delta_{sj}) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
&= \sum_{ij} (\Sigma_t \Sigma_r \lambda_r^i \omega_r^t X_t^j + \Sigma_k \Sigma_r \lambda_r^j X_k^i \omega_k^r) \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
&= \sum_{ij} (\lambda^T \omega X)_i^j + (X^T \omega \lambda)_i^j \frac{\partial}{\partial x_i^j} \\
(d\nu)_X (\lambda) &= \lambda^T \omega X + X^T \omega \lambda.
\end{aligned}$$

Problem 11.3.1 Czy ogół macierzy $M := \left\{ A^T \omega A; A \in M_{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2} \right\} (\cong GL(n, \mathbb{R})/H)$ stanowi hiperpowierzchnię? I jakiego wymiaru? Pytanie wystarcza rozpatrzyć lokalnie, tzn. czy pewne otoczenie macierzy $\omega \in M$ jest dyfeomorficzne z otw podzbiorem w $\mathbb{R}^N$ dla pewnego N ? Jaki jest obraz odwzorowania liniowego $(d\nu)_e$? Powinien być przestrzenią styczną do M (tzn. rząd $(d\nu)_e$ powinien być $\dim M$

$$T_\omega M = \text{Im} (d\nu)_e$$

i ogólniej

$$T_{\nu(X)} M = \text{Im} (d\nu)_X.$$

Wniosek 11.3.1 Jak to będzie wiadome, to z ogólnego tw. mielibyśmy że H jest podgrupą Liego wymiaru $n^2 - \dim M$ a także, że przestrzeń styczna w jedności e do H [algebra Liego grupy Liego H] jest równa $\mathfrak{g} := \ker (d\nu)_e = \{ \lambda; \lambda^T \omega + \omega \lambda = 0 \} = \{ \lambda; \lambda^T \omega = -\omega \lambda \}$. Sprawdzić jako ćwiczenie że $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego.

Ćwiczenie 11.3.2 Rozważyć banalny przykład $n = 2$ i formy symetrycznej zdegenerowanej $\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pokazać, że M jest dwuwymiarową hiperpowierzchnią (przynajmniej w otoczeniu ω) i **nie jest** to płaszczyzna.

Ćwiczenie 11.3.3 * Jak wyżej dla niesymetrycznej zdegenerowanej $\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - nie umiem rozwiązać (tzn. pokazać, że M jest hiperpowierzchnią wymiaru $\dim \text{Im} (d\nu)_e$).

Dlaczego dla $O(n, \mathbb{R})$ hiperpłaszczyzna M była przestrzenią wektorową? Otóż $SO(n, \mathbb{R})$ jest maksymalną zwartą podgrupą spójną a jest ogólniejsze twierdzenie dotyczące dowolnej grupy Liego spójnej G . Jeśli H jest jej maksymalną zwartą podgrupą to topologicznie G jest produktem H i przestrzeni euklidesowej. U nas było $G = GL_+(n, \mathbb{R}) \supset SO(n, \mathbb{R})$. Stąd bez zdziwienia mamy $M = GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R}) = GL_+(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ to przestrzeń euklidesowa $S(n, \mathbb{R})$. Dla innej podgrupy H przestrzeń ilorazowa $M = GL(n, \mathbb{R})/H$ już nie musi być "trywialna".

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

Uogólniona grupa ortogonalna to grupa $O_\omega(n, \mathbb{R})$ utworzona w powyższy sposób dla symetrycznej macierzy $\omega = \omega^T$ ($\omega_i^j = \omega_j^i$). Składa się z macierzy A dla których

$$A^T \omega A = \omega.$$

Przykład 11.3.1 Grupa $O_\omega(n, \mathbb{R})$ jest grupą Liego a jej przestrzeń styczna w jednośc $[algebra\ Liego\ grupy\ Liego\ O_\omega(n, \mathbb{R})]$ jest równa /zapisując kolumny macierzy a przez $a^i/$

$$\{\lambda; \lambda^i \bullet \omega^j = -\lambda^j \bullet \omega^i \text{ dla wszystkich } i, j\}.$$

Istotnie, przestrzeń styczna do $O_\omega(n, \mathbb{R})$ w e to $\ker(d\nu)_e = \{\lambda; \lambda^T \omega + \omega \lambda = 0\} = \{\lambda; \lambda^T \omega = -\omega \lambda\}$. Obliczając $\lambda^T \omega = -\omega \lambda$ mamy

$$\begin{aligned} (\lambda^T \omega)_i^j &= -(\omega \lambda)_i^j \\ (\lambda^T)_i^k \omega_k^j &= -\omega_i^k \lambda_k^j \quad /z\ umow\u0105\ Einsteina \\ \Sigma_k \lambda_k^i \omega_k^j &= -\Sigma_k \omega_k^i \lambda_k^j = -\Sigma_k \lambda_k^j \omega_k^i \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, mamy równości względem kanonicznego iloczynu skalarnego związek

$$\lambda^i \bullet \omega^j = -\lambda^j \bullet \omega^i,$$

w szczególności dla $i = j$ mamy $\lambda^i \bullet \omega^i = 0$. Gdy $\omega = \mathbf{1}_n$ otrzymujemy poprzedni warunek skośnej symetrii macierzy λ .

Uwaga 11.3.1 Czym zastąpić warunek dodatniości (niezdegenerowania) iloczynu skalarnego? Otóż, gdy ω jest dwuliniowe symetryczne i nieujemne $\omega(v, v) \geq 0$ to ω jest dodatnie [czyli $\omega(v, v) > 0$ dla $v \neq 0$, tzn. jest iloczynem skalarnym] gdd ω jest macierzą nieosobliwą, $\det \omega \neq 0$. (Nietrywialne twierdzenie - patrz książki z algebry). Dlatego uogólniamy warunek niezdegenerowania iloczynu skalarnego do warunku $\det \omega \neq 0$.

Dotyczyć będą niezdegenerowanych odwzorowań dwuliniowych. Czyli takich $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dla których indukowane odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad v \longmapsto \omega(v, \cdot),$$

izomorfizmem, czyli równoważnie gdy jego macierz $[a_i^j] = [\omega(e^i, e^j)]$ jest nieosobliwa. Najpierw przypomnijmy co oznacza niezdegenerowanie w przypadku odwzorowania dwuliniowego symetrycznego $\langle, \rangle$ nieujemnego $\langle v, v \rangle \geq 0$. Otóż (nie jest to oczywisty fakt,

dowodzi się indukcją względem n): $\langle, \rangle$ jest nie degenerowane gddy gdy jest dodatnie, tzn. $\langle v, v \rangle > 0$ dla $v \neq 0$. [jako ćwiczenie odszukać dowód w jakiejś książce z algebry].

Jesli ω jest symetryczna i nie degenerowana w tym sensie, ze $\det \omega \neq 0$ to dla macierzy $A \in O_\omega$ mamy $\det(A^T \omega A) = \det A^T \det \omega \det A = \det \omega$, $\det A^T \det A = 1$, $(\det A)^2 = 1$, zatem $\det A = \pm 1$ (tak jak i dla macierzy ortogonalnych).

Grupa Lorentza $O(p, q)$.

Przykład 11.3.2 Dla formy symetrycznej ω indeksu (p, q) t.j. o macierzy nieosobliwej

$$\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix}$$

grupą izometrii względem pseudo iloczynu skalarnego o macierzy ω równego (ta sama litera na oznaczenie)

$$\begin{aligned} & \omega \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \omega(v, w) = v^T \cdot \omega \cdot w \\ &= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ -y_{p+1} \\ \vdots \\ -y_{p+q} \end{bmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n. \end{aligned}$$

[inaczej mówiąc, względem formy kwadratowej $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$] jest grupą zwana grupą Lorentza $O(p, q)$. Za pomocą pseudo iloczynu skalarnego: $A \in O(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); \omega(Av, Aw) = \omega(v, w) \text{ dla wszystkich } v \text{ i } w\}$ otrzymujemy warunki (równoważne z niezmienniczością względem ω)

$$\omega(A^i, A^j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ +1, & \text{gdy } i = j \leq p \\ -1, & \text{gdy } i = j \geq p+1. \end{cases}$$

Przestrzeń styczną [algebra Liego grupy $O(p, q)$] w jedności składa się z macierzy λ spełniających warunki $\lambda^i \bullet \omega^j = -\lambda^j \bullet \omega^i$ dla i, j . Dokładniej rozpisując mamy

$$\lambda_i^j = \begin{cases} -\lambda_j^i, & i, j \leq p, \text{ lub } i, j > p+1 \\ \lambda_j^i, & i \leq p, j > p, \text{ lub } i > p, j \leq p \end{cases}.$$

Inaczej mówiąc algebra Liego grupy Lorentza składa się z macierzy

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

takich, że λ_1 i λ_4 są skośnie symetryczne [w szczególności zerowe na diagonalu] oraz $\lambda_3 = \lambda_2^T$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_1^T, & \lambda_4 &= -\lambda_4^T, \\ \lambda_3 &= \lambda_2^T. \end{aligned}$$

Zatem wymiar grupy Lorentza jest równy (ilości niezależnych parametrów w macierzach klatkowych λ_i

$$pq + \frac{p^2 - p}{2} + \frac{q^2 - q}{2} = p(n - p) + \frac{p^2 + (n - p)^2 - n}{2}.$$

Najważniejszym przykładem w fizyce grupy Lorentza jest grupa $O(3, 1)$ izometrii względem formy kwadratowej indeksu $(3, 1)$ postaci

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Jej wymiar jest równy

$$3 + \frac{9 + 1 - 4}{2} = 6$$

czyli tyle samo co wymiar grupy obrotów euklidesowych w $\mathbb{R}^4$. Jest ciekawe że dla $p = n - 1$, $q = 1$, wymiar $O(n - 1, 1)$ wynosi tyle samo co wymiar obrotów euklidesowych.

Forma $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ jest podstawą w teorii względności: gdy mamy $\mathbb{R}^3$ i wypuszczamy światło z początku układu współrzędnych przy czym jednostki tak dobieramy aby światło przebiegło drogę o długości 1 w czasie 1 wówczas gdy światło po promyku osiągnie punkt (x, y, z) to potrzebuje czasu

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t$$

czyli jest spełniony warunek

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

Pojawia się forma kwadratowa 4 zmiennych $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ o sygnaturze $(3, 1)$ i dlatego w $\mathbb{R}^4$ rozważamy nie metrykę euklidesową a pseudometrykę Minkowskiego o formie kwadratowej j/w.

Bourbaki, tom I str 420

grupa Lorentza Hall str 7 Heizenberg grupa str 8

Ćwiczenie 11.3.4 Przebadać grupę izometrii względem formy ω o macierzy

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(jedynki na drugiej przekątnej).

Grupa symplektyczna

Ćwiczenie 11.3.5 Dla formy skośnie symetrycznej J niezdegenerowanej (na przestrzeni wymiaru $2n$) o macierzy

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix}$$

określamy grupę Liego izometrii względem tej formy, nazywamy ją grupą symplektyczną i oznaczamy $Sp(n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$. Obliczyć jej wymiar i przestrzeń styczną w e . W tym przypadku M będzie łatwe, $M = A(2n, \mathbb{R})$ jest hiperpłaszczyzną macierzy skośnie symetrycznych.

Algebra symplektyczna (algebra Liego $Sp(n, \mathbb{R})$) składa się z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}$$

w których B i C są symetryczne.

12 Grupy transformacji

Definicja 12.0.1 Transformacją rozmaitości M nazywamy dyfeomorfizm $M \rightarrow M$. Ogół transformacji rozmaitości M tworzy grupę $Aut(M)$. [Jest to za duża grupa aby miała strukturę grupy Liego, ale jest wielka teoria wprowadzająca w tę grupę strukturę rozmaitości (i grupy Liego) nieskończonej wymiarowej]. Mówimy, że grupa G (abstrakcyjna), działa (lewostronnie) na rozmaitość M jako grupa transformacji {krótko: mamy lewe działanie G na M } jeżeli dane jest globalne odwzorowanie

$$\Phi : G \times M \rightarrow M$$

takie, że

(i) dla dowolnego $g \in G$ odwzorowanie $\Phi_g : M \rightarrow M$, $x \mapsto \Phi(g, x)$, jest transformacją rozmaitości M ,

(ii) dla dowolnych $g, h \in G$ jest równość

$$\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{gh}.$$

W zapisie krótszym $\Phi(g, x) = g \cdot x = gx$ mamy $ex = x$, $g(hx) = (gh)x$.

UWAGA: dla działania prawego $M \times G \rightarrow M$ będzie $xe = x$, $(xg)h = x(gh)$, czyli $\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{hg}$.

Proste własności: (1)

$$\Phi_e = Id_M.$$

Istotnie

$$\Phi_e(x) = \Phi_e(\Phi_e((\Phi_e)^{-1}(x))) = \Phi_{ee}((\Phi_e)^{-1}(x)) = \Phi_e((\Phi_e)^{-1}(x)) = x,$$

w konsekwencji

(2)

$$(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}.$$

(3) Indukowane odwzorowanie $G \rightarrow Aut(G)$, $g \mapsto \Phi_g$, jest homomorfizmem grup.

Definicja 12.0.2 Mówimy, że grupa G działa

(a) efektywnie na M , jeżeli e jest jedynym takim elementem z G , że $\Phi_g = id$, (t.j. że $\forall_x (\Phi_g(x) = x)$) inaczej. że indukowane odwzorowanie $G \rightarrow Aut(G)$, $g \mapsto \Phi_g$, jest monomorfizmem,

(b) wolno na M , jeżeli dla dowolnego (ustalonego) $x \in M$ z tego, że $\Phi_g(x) = x$ wynika, że $g = e$ [czyli, dla $g \neq e$ transformacja Φ_g nie ma punktów stałych].

Ćwiczenie 12.0.6 Pokazać, że grupa $SO(2, \mathbb{R})$ działa efektywnie jako grupa transformacji na $\mathbb{R}^2$ względem odwzorowania $(A, x) \mapsto A \cdot x$.

Ćwiczenie 12.0.7 Niech $\Phi : G \times M \rightarrow M$ będzie dowolnym lewym działaniem G na M i niech

$$H = \{h \in G; \Phi_h = id\}.$$

Wtedy H jest normalną podgrupą G i działanie Φ indukuje efektywne działanie grupy ilorazowej G/H na M .

Definicja 12.0.3 Niech $\Phi : G \times M \rightarrow M$ będzie dowolnym działaniem grupy G na M . Podzbiór $M' \subset M$ nazywamy niezmienniczym względem działania Φ (także G -niezmienniczym [względem działania Φ]) jeżeli dla dowolnego $g \in G$ zachodzi

$$\Phi_g[M'] \subset M'.$$

Ćwiczonko: Φ indukuje działanie na dowolny G -niezmienniczny podzbiór M' .

Ćwiczenie 12.0.8 Skonfrontować z Problemem 11.3.1. Pokazać, że grupa Liego $GL(n, \mathbb{R})$ działa na rozmierność macierzy $M_{n \times n}$ względem odwzorowania $(A, \omega) \mapsto A\omega A^T$. Działanie nie jest efektywne. Odwzorowanie $(\omega, A) \mapsto A^T \omega A$ jest działaniem prawym. Podrozmierność $S(n, \mathbb{R})$ macierzy symetrycznych jest niezmiennicza, istnieje więc indukowane działanie $GL(n, \mathbb{R})$ na $S(n, \mathbb{R})$.

Definicja 12.0.4 Mówimy, że grupa Liego G , działa (lewostronnie) na rozmierność M jako grupa Liego transformacji {krótko: mamy lewe działanie grupy Liego G na M } jeżeli dane jest gładkie działanie G na M

$$\Phi : G \times M \rightarrow M.$$

Przykład 12.0.3 Pokazać, że grupa Liego $GL(n, \mathbb{R})$ działa na $\mathbb{R}^n$ jako grupa transformacji względem odwzorowania $(A, v) \mapsto A \cdot v$. To samo dotyczy dowolnej podgrupy Liego H grupy $GL(n, \mathbb{R})$, np. grupy obrotów $O(n, \mathbb{R})$.

Przykład 12.0.4 Pokazać, że dla działania $O(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$ sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem niezmienniczym i indukowane działanie $O(n, \mathbb{R}) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ jest gładkie.

Przykład 12.0.5 Grupa Liego G działa na siebie jako grupa Liego transformacji względem działania - mnożenia w grupie -

$$\Phi = \cdot : G \times G \rightarrow G.$$

Definicja 12.0.5 Niech G działa z lewa na rozmaitość M . Wówczas na M mamy relacje równoważności

$$x \sim y \iff \exists_{g \in G} (gx = y).$$

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy orbitami działania. Orbita punktu x jest równa $[x] = G \cdot x = \{gx; g \in G\}$. Identyfikujemy orbity prawego działania.

Ćwiczenie 12.0.9 Znaleźć orbity standardowego działania $GL(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$ oraz działania $O(n, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

Uwaga 12.0.2 Obserwujemy, że odwzorowanie ν dla ustalonej macierzy ω rozpatrywane w problemie 11.3.1 prowadzi do prawego działania $M_{n \times n} \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}$, $(\omega, A) \mapsto A^T \omega A$, i że zbiór M [dla ustalonej macierzy ω] rozpatrywany w tym problemie to orbita tego działania przechodząca przez ω , zaś podgrupa H to grupa izotropii tego działania w punkcie ω .

Uwaga 12.0.3 Zawsze orbita działania grupy Liego G na rozmaitość M ma strukturę podrozmaitości (ale nie zawsze z topologią indukowaną, może być tzw. podrozmaitością imersyjną, czyli gdy inkluzja jest odwzorowaniem regularnym - różniczka mono, a topologia jest wtedy lokalnie indukowana z M). Wymiary tych orbit nie muszą być takie same. Można zapytać o "wzajemne położenie" wszystkich orbit danego działania. Tworzą tzw. foliacje z osobliwościami w sensie Stefano, zaś gdy wszystkie wymiary są jednakowe to foliacje regularną.

13 Pojęcie wiązki, wiązki z grupą strukturalną

GHV I §9

Definicja 13.0.6 Gładką wiązką nazywamy układ

$$(E, \pi, M, F)$$

w którym E, M, F są rozmaitościami gładkimi, $\pi : E \rightarrow M$ jest odwzorowaniem gładkim takim, że

– dla każdego punktu $x \in M$ istnieje zbiór otwarty $x \in U \subset M$ oraz dyfeomorfizm

$$\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$$

taki, że $\pi(\varphi(x, v)) = x$ czyli $\pi \circ \varphi = \text{pr}_1 : U \times F \rightarrow U$.

Każdy dyfeomorfizm φ j/w nazywamy lokalną trywializacją wiązki, rozmaitość E nazywa się przestrzenią totalną, B - przestrzenią bazową, F - włóknem typowym, dla dowolnego $x \in M$ podzbiór $E_x := \pi^{-1}[\{x\}]$ nazywamy włóknem wiązki nad x .

Odwzorowanie $\varphi(x, \cdot) : F \rightarrow \pi^{-1}[\{x\}]$ jest bijekcją, i na $\pi^{-1}[\{x\}]$ wprowadza strukturę rozmaitości z topologią indukowaną z E , oraz inkluzja $E_x \rightarrow E$ jest odwzorowaniem gładkim (i homeomorfizmem na obraz). Jeśli $\varphi_1 : U_1 \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_1]$ i $\varphi_2 : U_2 \times F \rightarrow$

$\pi^{-1}[U_2]$ są dwoma lokalnymi trywializacjami wiązki E to $(\varphi_1)^{-1}[\pi^{-1}[U_1] \cap \pi^{-1}[U_2]] = (U_1 \cap U_2) \times F$ jest otwartym podzbiorem $U_1 \times F$ i odwzorowanie

$$(\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1 : (U_1 \cap U_2) \times F \rightarrow (U_1 \cap U_2) \times F, \quad (x, v) \mapsto (\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1(x, v)$$

jest dyfeomorfizmem.

Stwierdzenie 13.0.1 *Niech M, F będą rozmaitościami, E - zbiorem i $\pi : E \rightarrow M$ surjektywną funkcją. Załóżmy, że dane jest pokrycie $\{U_\alpha\}$ rozmaitości M i rodzina $\{\psi_\alpha\}$ bijekcji, $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_\alpha]$ taka, że*

- (a) $\pi \circ \psi_\alpha(x, v) = x$, $(x, v) \in U_\alpha \times F$, i każdego α ,
- (b) dla α i β

$$\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F, \quad (x, v) \mapsto \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta(x, v),$$

są dyfeomorfizmami, gdzie $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.

Wówczas istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości na E dla której (E, π, M, F) jest gładką wiązką, zaś ψ_α są lokalnymi trywializacjami.

UWAGA: Rodzina $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ ma własność "kołańcuchową" tzn.

$$\psi_{\alpha\alpha} = Id, \quad \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma},$$

na $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma}(x, v) &= \psi_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\gamma(x, v)) = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta(\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\gamma(x, v)) \\ &= \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\gamma(x, v) = \psi_{\alpha\gamma}(x, v). \end{aligned}$$

Dowód. GHV I, 1.13 Prop. 10 + 1.6 Prop. VII. Ponieważ funkcje przejścia $\psi_{\beta\alpha}$ są dyfeomorfizmami, wystarczy pokazać istnienie i jednoznaczność topologii τ na E dla której $\pi^{-1}[U_\alpha]$ są otwarte i ψ_α są homeomorfizmami $U_\alpha \times F$ z $\pi^{-1}[U_\alpha]$. Zatem topologia τ indukowana na $\pi^{-1}[U_\alpha]$, oznaczana przez $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]}$, ma pokrywać się z topologią na $\pi^{-1}[U_\alpha]$ dla której ψ_α jest homeomorfizmem, którą oznaczymy przez τ_α , t.j. szukana topologia τ musi spełniać równość $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]} = \tau_\alpha$.

Jednoznaczność τ . Gdy τ jest dowolną topologią na E dla której $\pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau$ i $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]} = \tau_\alpha$ to

$$\tau = \{A \subset E; \forall \alpha (A \cap \pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau_\alpha)\}$$

skąd jednoznaczność. " $\subset$ " Gdy $A \in \tau$ to dla dowolnego α $A \cap \pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]}$ ale $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]} = \tau_\alpha$ więc $A \cap \pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau_\alpha$. " $\supset$ " Gdy $A \subset E$ i $\forall \alpha (A \cap \pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau_\alpha)$ to skoro $\pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau$ i $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]} = \tau_\alpha$ to $A \cap \pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau$ i $A = \bigcup_\alpha (A \cap \pi^{-1}[U_\alpha]) \in \tau$.

Istnienie τ . Określamy τ powyższym wzorem. Banalnie sprawdzamy, że rodzina τ jest topologią. Pokażemy, że

(a) $\pi^{-1}[U_\alpha] \in \tau$,

(b) $\tau_{|\pi^{-1}[U_\alpha]} = \tau_\alpha$. /Ćw/

a: Należy pokazać, że dla dowolnego β zachodzi $\pi^{-1}[U_\alpha] \cap \pi^{-1}[U_\beta] \in \tau_\beta$. Ale $\psi_\beta : U_\beta \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_\beta]$ jest homeo gdzie na $\pi^{-1}[U_\beta]$ jest topologia τ_β więc skoro $\pi^{-1}[U_\alpha] \cap \pi^{-1}[U_\beta] =$

$\pi^{-1}[U_\alpha \cap U_\beta] = \psi_\beta[(U_\alpha \cap U_\beta) \times F]$ i $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ jest otwarty w $U_\beta \times F$ to $\pi^{-1}[U_\alpha] \cap \pi^{-1}[U_\beta] \in \tau_\beta$.

b: Z określenia τ jest inkluzja $\tau|_{\pi^{-1}[U_\alpha]} \subset \tau_\alpha$. Pokażemy w drugą stronę. Weźmy $A \in \tau_\alpha$, w szczególności $A \subset \pi^{-1}[U_\alpha]$. Pokażemy, że $A \in \tau$, będzie stąd wynikać, że $A \in \tau|_{\pi^{-1}[U_\alpha]}$. W tym celu należy wziąć dowolnie β i pokazać, że $A \cap \pi^{-1}[U_\beta] \in \tau_\beta$ czyli, że $\psi_\beta^{-1}[A \cap \pi^{-1}[U_\beta]]$ jest otwarty w $U_\beta \times F$. Ale z definicji $\psi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ mamy wprost

$$\psi_\beta^{-1}[A \cap \pi^{-1}[U_\beta]] = \psi_{\beta\alpha}[\psi_\alpha^{-1}[A] \cap ((U_\alpha \cap U_\beta) \times F)]$$

ale zbiór $\psi_\alpha^{-1}[A]$ jest otwarty w $U_\alpha \times F$ więc $\psi_\alpha^{-1}[A] \cap ((U_\alpha \cap U_\beta) \times F)$ jest otwarty w $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ a dalej jego obraz przez dyfeomorfizm $\psi_{\beta\alpha}$ jest też otwarty. ■

Definicja 13.0.7 Gładką wiązką z grupą Liego strukturalną G (krótko G -wiązką) nazywamy wiązkę (E, π, M, F) z włóknom typowym F dla której określone jest lewe działanie efektywne $\cdot : G \times F \rightarrow F$ grupy Liego G na włókno typowe F oraz zadany jest układ lokalnych trywializacji $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_\alpha]\}$, $\alpha \in I$, dla których funkcje przejścia $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$, $(x, v) \mapsto \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta(x, v)$, mają następującą własność: istnieje gładkie odwzorowanie

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$$

takie, że

$$\psi_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$$

czyli

$$\psi_{\alpha|_x}^{-1} \circ \psi_{\beta|_x}(v) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot v$$

[z efektywności działania funkcja $g_{\alpha\beta}$ jest wyznaczona jednoznacznie].

Zaobserwujmy warunek **G -kołańcucha** dla rodziny $\{g_{\alpha\beta}\}$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}(x) &= e, \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} &= g_{\alpha\gamma} \quad / \text{na } U_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma}(x, v) &= \psi_{\alpha\beta}(x, g_{\beta\gamma}(x) \cdot v) = (x, (g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x)) \cdot v) = \psi_{\alpha\gamma}(x, v) \\ &= (x, g_{\alpha\gamma}(x) \cdot v), \end{aligned}$$

czyli $(g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x)) \cdot v = g_{\alpha\gamma}(x) \cdot v$ dla dowolnego v , z efektywności działania $g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$ czyli $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

UWAGA: jest Tw Ehresmanna o istnieniu wiązki które mówi, że znając kołańcuch $\{g_{\alpha\beta}\}$, włókno typowe F i działanie $\cdot : G \times F \rightarrow F$ można jednoznacznie odzyskać [zdefiniować] wiązkę dla której $\{g_{\alpha\beta}\}$ będzie G -kocyklem dla pewnej rodziny lokalnych trywializacji. Zatem wszystko co dotyczy G -wiązki musi siedzieć w dowolnym G -kocyklu tej wiązki. Np. kohomologie, klasy charakterystyczne patrz. np.

R.Bott, L.Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, GTM, 82, 1982 /ostatnie dwie strony 304-305. Wzory uzyskane są klasyczną geometrią i topologią różniczkową. Ostatnio badania moje i N.Telemana wykorzystują metody geometrii nieprzemiennej, homologii cyklicznych.

Jean-Louis Loday, *Cyclic Homology*, Springer, 1992.

Traktujemy kocykl jako obiekt geometrii nieprzemiennej (G jest na ogół grupą nieabelową) i chcemy zbudować kompleks tylko i wyłącznie przy pomocy kocyklu $g_{\alpha\beta}$ (bez udziału funkcji 0-1) a w nim klasy kohomologii które w odpowiednim włożeniu kohomologii de-Rhama w kohomologie tego nowego kompleksu będą odpowiadać klasycznym klasom charakterystycznym (kilka ostatnich referatów w tym kierunku na konf międzynarodowych w Krakowie, Islamabadzie i Harbinie jeszcze na swoją stronę nie włożyłem).

Dwie ważne klasy wiązek:

- a) wektorowe,
- b) główne.

Definicja 13.0.8 *Wiązka wektorowa to taka wiązka (E, π, M, F) w której każde włókno $E|_x$ jest przestrzenią wektorową, włókno typowe F jest przestrzenią wektorową (nad danym ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) oraz lokalne trywializacje $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$ są we włóknach izomorfizmami przestrzeni wektorowych $\varphi|_x : F \rightarrow E|_x$. W takiej sytuacji funkcje przejścia $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$, $(x, v) \mapsto \psi_{\alpha}^{-1} \circ \psi_{\beta}(x, v)$, są we włóknach izomorfizmami liniowymi $\psi_{\alpha\beta}|_x : F \rightarrow F$ czyli elementami grupy Liego $GL(F)$ liniowych izomorfizmów F na siebie, a zatem określone jest odwzorowanie $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(V)$ takie, że $\psi_{\alpha\beta}|_x(v) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot v$ względem kanonicznego działania $GL(V)$ na V .*

Definicja 13.0.9 *G -wiązką główną nazywamy G -wiązkę w której włókno typowe jest grupą Liego G , działanie lewe G na G jest mnożeniem w grupie, czyli układ (P, π, M, G) , oraz zadane są lokalne trywializacje $\varphi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}[U]$ takie, że $\varphi(x, g) \cdot h = \varphi(x, g \cdot h)$ dla $g, h \in G$.*

Przykład 13.0.6 *Wiązka wektorowa styczna TM do rozmaitości M wymiaru n z atlasem maksymalnym $\mathcal{A}$. Przestrzeń styczna $T_p M$ do M w punkcie $p \in M$ jest przestrzenią wektorową rozpiętą przez wektory bazowe dla danej mapy x wokół p równe $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Przy czym wektory te przy zmianie mapy x na y transformują się w/g reguły [otrzymanej dla różniczeki odwzorowania $id : M \rightarrow M$ w mapach x i y - patrz lemat] $df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}|_{f(p)}$*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}|_p.$$

Otrzymaliśmy to dla hiperpowierzchni ale to samo będzie dla abstrakcyjnej rozmaitości jak tylko zdefiniujemy wektory $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ w terminach wewnętrznych rozmaitości - niżej. Rozważamy

$$\begin{aligned} TM &= \bigsqcup_{p \in M} T_p M, \\ \pi &: TM \rightarrow M \text{ - rzutujemy prz styczną nad } p \text{ w punkt } p \end{aligned}$$

Każda mapa x na $U_x \subset M$ określa lokalną trywializację

$$\tilde{x} : U_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U_x]$$

wzorem

$$\tilde{x}|_p(r^1, \dots, r^n) = \sum_i r^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p.$$

Zatem

$$(\tilde{x}|_p)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right) = e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad 1 \text{ jest na miejscu } i$$

Biorąc dwie mapy x i y o niepustej wspólnej części dziedzin $U_{xy} = U_x \cap U_y$ widzimy, że funkcje przejścia

$$\psi_{yx} = \tilde{y}^{-1} \circ \tilde{x} : U_{xy} \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_{xy} \times \mathbb{R}^n$$

są równe

$$\begin{aligned} \psi_{yx}(p, (r^1, \dots, r^n)) &= \tilde{y}^{-1} \circ \tilde{x}(p, (r^1, \dots, r^n)) = \tilde{y}^{-1} \left(p, \sum_i r^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right) \\ &= \sum_i r^i \tilde{y}^{-1} \left(p, \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right) = \sum_i r^i \tilde{y}^{-1} \left(p, \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}|_p \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \tilde{y}^{-1} \left(p, \frac{\partial}{\partial y_j}|_p \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) e_j \\ &= \left(p, \left(\sum_{i=1}^n r^i \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(p), \dots, \sum_{i=1}^n r^i \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(p) \right) \right) \end{aligned}$$

im odwzorowanie to jest dyfeomorfizmem (odwrotnym jest ψ_{yx}). Zatem w TM istnieje struktura rozmaiłości dla której $\tilde{x}$ są dyfeomorfizmami. Co więcej $\tilde{x}|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ jest liniowym izomorfizmem oraz $(\psi_{xy})|_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dane wzorem

$$(\psi_{yx})|_x(r^1, \dots, r^n) = \left(\sum_{i=1}^n r^i \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(p), \dots, \sum_{i=1}^n r^i \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(p) \right)$$

jest izomorfizmem liniowym (bo macierz $\left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \right]$ jest nieosobliwa. Definiujemy

$$g_{yx} : U_{xy} \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$$

wzorem

$$g_{yx}(p) = \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \right]$$

(utożsamiając izomorfizm liniowy z jego macierzą) i dla standardowego działania $\cdot : GL(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mamy

$$(\psi_{yx})|_x(r) = g_{yx}(p) \cdot r = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r^1 \\ r^n \end{bmatrix}.$$

Zatem TM jest $GL(n, \mathbb{R})$ - wiązką wektorową.

Przykład 13.0.7 Rozważając dowolną wiązkę wktorową E o włóknie typowym $\mathbb{R}^m$ tworzymy nową wiązkę P dla której włóknom będzie zbiór uporządkowanych baz włókna $E|_p$. Utworzymy tak wiązkę główną o grupie Liego strukturalnej $GL(n)$ - zobaczyć np. książkę Lee, albo cokolwiek innego z geometrii różniczkowej współczesnej.

14 Quaterniony

14.1 Algebra quaternionów

Niech H będzie zorientowaną 4-wymiarową (nad $\mathbb{R}$) prz. wektorową z iloczynem skalarnym $\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ i wyróżnionym elementem e jednostkowym (o długości 1 względem $\langle, \rangle$). Określamy

$$K = e^\perp$$

ortogonalne uzupełnienie $\text{Lin}(e)$ do H , $H = \text{Lin}(e) \oplus K$. Orientujemy K przez bazę e_1, e_2, e_3 tak, aby (e, e_1, e_2, e_3) należało do zadanej orientacji H . Niech $\times : K \times K \rightarrow K$ będzie iloczynem wektorowym w K . Definiujemy odwzorowanie dwuliniowe nad $\mathbb{R}$

$$\phi : H \times H \rightarrow H$$

wzorem

$$\phi(p, q) = p \cdot q = \begin{cases} -\langle p, q \rangle \cdot e + p \times q, & \text{gdy } p, q \in K \\ q \cdot p = p, & \text{gdy } q = e. \end{cases}$$

Definicja 14.1.1 Układ $\mathbb{H} = (H, \phi)$ tworzy 4-wymiarową $\mathbb{R}$ -algebrę quaternionów. Każdy quaternion q jest postaci

$$q = a \cdot e + p$$

dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $p \in K$. Oznaczamy

$$\begin{aligned} a &= \text{Re } q \\ p &= \text{Im } q. \end{aligned}$$

Elementy z K nazywamy czystymi quaternionami. Elementy z $\text{Lin}(e)$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi.

Ćwiczenie 14.1.1 $\mathbb{H}$ jest algebrą łączną, z rozdzielnością mnożenia względem dodawania, oraz nie jest algebrą przemenną. Np.

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= -\langle p_1, p_2 \rangle \cdot e + p_1 \times p_2 = -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e + p_1 \times p_2 \\ p_2 \cdot p_1 &= -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e + p_2 \times p_1 = -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e - p_1 \times p_2 \neq p_1 \cdot p_2. \end{aligned}$$

Definicja 14.1.2 Sprzężenie quaternionowe

$$\overline{a \cdot e + p} = a \cdot e - p.$$

Ćwiczenie 14.1.2 Sprzężenie ma własności a) $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 + \|p\|^2 \geq 0$ ($q \cdot \bar{q} \in \text{Lin}(e) = \mathbb{R}$) b) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$, c) $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$, d) $\langle q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{2} (q_1 \cdot \bar{q}_2 + q_2 \cdot \bar{q}_1) = \text{Re}(q_1 \cdot \bar{q}_2)$.

Definicja 14.1.3 Norma quaternionowa

$$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}.$$

Ćwiczenie 14.1.3 Własności normy 1) $|q| \geq 0$, 2) $|q| = 0$ gddy $q = 0$, 3) $|q + q'| \leq |q| + |q'|$, 4) $|q| = |\bar{q}|$, 5) $\langle p \cdot r, q \cdot r \rangle = \langle p, q \rangle \cdot |r|^2$, $p, q, r \in \mathbb{H}$, [zachodzi także dla zespolonych (i rzeczywistych) co sprawdzamy bezpośrednio] 6) $|pr| = |p| \cdot |r|$, $p, r \in \mathbb{H}$, 7) $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\langle q, q \rangle}$.

Ćwiczenie 14.1.4 (Twierdzenie) Algebra quaternionów $\mathbb{H}$ ma własności

a) jest algebrą z dzieleniem (tzn. równania $q_2 \cdot x = q_1$ oraz $x \cdot q_2 = q_1$ mają dokładnie po jednym rozwiązaniu).

b) nie ma dzielników zera, tzn. jeśli $q_1 \cdot q_2 = 0$ i $q_1 \neq 0$ to $q_2 = 0$.

c) $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ z mnożeniem quaternionowym jest grupą i to grupą Liego bo mnożenie ϕ jest gładkie.

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

d) [przypomnijmy: Elementy z $\text{Lin}(e)$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi] Kładziemy $q^2 = q \cdot q$.

Jeśli $q \neq 0$ jest quaternionem czystym ($q \in K$) to $q^2 = -\langle q, q \rangle < 0$ ($q^2 \in \text{Lin}(e) = \mathbb{R}$),

Jeśli $|q| = 1$ i q jest czysty to $q^2 = -1$.

Ćwiczenie 14.1.5 Pokazać, że zbiór macierzy 2×2 quaternionowych o wyznaczniku 1 nie tworzy grupy.

14.2 Grupa jednostkowych quaternionów

Rozważmy $\mathbb{R}^4$ ze zwykłym iloczynem skalarnym i wyróżnionym elementem $e = (1, 0, 0, 0)$. Wtedy $K = e^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ rozważana jest z dodatnią orientacją przez wersory osi współrzędnych e_1, e_2, e_3 . Niech $\mathbb{H}$ będzie algebrą quaternionów dla powyższego iloczynu skalarnego. Mnożenie kwaternionowe w K pokrywa się z iloczynem wektorowym $\times$. Łatwo sprawdzamy, że $(\mathbb{R}^3, \times)$ jest algebrą Liego. Z własności normy $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{a^2 + \|p\|^2}$ dla $q = a \cdot e + p$, $a \in \mathbb{R}$, $p \in K$, gdy $q = a_0 \cdot e + \sum_{i=1}^3 a_i \cdot e_i$ mamy

$$|q| = \sqrt{\sum_{i=0}^3 (a_i)^2} = \|(a_0, \dots, a_3)\| \text{ -zwykła norma w } \mathbb{R}^4$$

Zatem $\{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\} = S^3$. Ponieważ mnożenie quaternionowe w ramach quaternionów jednostkowych dzięki własności 6) normy nie wyprowadza poza quaterniony jednostkowe oraz S^3 jest hiperpowierzchnią, to mnożenie quaternionowe w S^3 wprowadza strukturę grupy Liego w sferę S^3 . Przestrzeń styczna do sfery w jedynce $T_e S^3 = e^\perp = K$ czyli jest równa K . Dlatego algebrą Liego tej grupy Liego będzie algebra Liego $(\mathbb{R}^3, \times)$.

Zauważmy, że także w prostszej sytuacji $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ dla $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, skąd $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = S^1$ i mnożenie zespolone nie wyprowadza poza jednostkowe, więc S^1 jest grupą Liego względem mnożenia liczb zespolonych.

Uwaga 14.2.1 W zasadzie nie podałem wcześniej formalnej definicji algebry Liego grupy Liego więc jest luka. Robi się to tak: każde pole wektorowe X na rozmaitości M określa

różniczkowanie algebry funkcji gładkich $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $(Xf)_p = (df)_p(X_p)$, i odwrotnie; dlatego najpierw na dowolnej hiperpowierzchni (rozmaitości) wprowadzmy nawias Liego pól wektorowych stycznych $[X, Y]$ jako pole które na funkcji gładkiej f jest równe $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Pokazujemy że jest to różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$ a więc jest polem. Następnie sprawdzamy, że pola z nawiasem tworzą algebrę Liego. Na grupie Liego rozważamy tzw. pola prawo (albo lewo) niezmiennicze, następnie zauważamy że nawias Liego pól prawych (lewych) jest polem prawnym (lewym). Algebra Liego pól prawych (lewych) na grupie Liego nazywa się algebrą prawną (lewą) grupy Liego. W końcu łatwo obserwujemy, że wektor styczny w jedyńce grupy Liego rozszerza się jednoznacznie do pola prawego (lewego) na całej grupie Liego. Zatem wymiar algebry Liego grupy Liego jest równy wymiarowi grupy Liego, co więcej w przestrzeń styczną do jedyńki wprowadzamy algebrę Liego tak, aby była izomorficzna z algebrą pól prawych (albo lewych). Na $GL(n, \mathbb{R})$ przestrzeń styczna w jedyńce to po prostu $\mathbb{R}^{n^2} = \text{End}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i pokazuje się rachunkiem, że algebra Liego grupy $GL(n, \mathbb{R})$ jest zadana jako algebra endomorfizmów z nawiasem $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Takim samym rachunkiem pokazujemy, że algebra Liego grupy Liego niezerowych quaternionów $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ma algebrę Liego $\mathbb{R}^4$ z mnożeniem $[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha$. Stąd rzeczywiście algebra Liego grupy Liego S^3 będzie podalgebrą Liego K z mnożeniem wektorowym.

14.3 Grupa quaternionowa $Q(n)$.

Niech $\Gamma = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i rozważmy n -wymiarową Γ -przestrzeń wektorową Γ^n z mnożeniem przez skalary po współrzędnych z lewej strony $p \cdot (x^1, \dots, x^n) = (p \cdot x^1, \dots, p \cdot x^n)$. Przestrzeń Γ^n ma także oczywiście strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej która oznaczymy przez $\Gamma_{\mathbb{R}}^n$ (dla $\Gamma = \mathbb{C}$ ma ona wymiar $2n$, zaś dla $\Gamma = \mathbb{H}$ ma wymiar $4n$). W przestrzeń Γ^n wprowadzmy kanoniczne iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$

- a) gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ to zwykły iloczyn skalarny rzeczywisty $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n x^i \cdot y^i$, $x^i, y^i \in \mathbb{R}$,
- b) gdy $\Gamma = \mathbb{C}$ to iloczyn skalarny hermitowski $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^n z^i \cdot \overline{w^i}$, $z^i, w^i \in \mathbb{C}$,
- c) gdy $\Gamma = \mathbb{H}$ to iloczyn skalarny quaternionowy $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^n p^i \cdot \overline{q^i}$, $p^i, q^i \in \mathbb{H}$.

Uwaga 14.3.1 Zauważamy / $\acute{C}$ W/, że $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : \Gamma_{\mathbb{R}}^n \times \Gamma_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest rzeczywistym iloczynem skalarnym. Dla $n = 1$ z własności (d) sprzężenia otrzymujemy związek z wyjściowym rzeczywistym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w H :

$$\text{Re} \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \text{Re} (q_1 \cdot \overline{q_2}) = \langle q_1, q_2 \rangle, \quad q_i \in H$$

a dalej z indukowanym w potęgze $H^n / q^i = q_0^i e + \sum q_j^i e_j \in \Gamma$, $q_j^i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \text{Re} \langle (q_1^1, \dots, q_1^n), (q_2^1, \dots, q_2^n) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \text{Re} \sum_i q_1^i \cdot \overline{q_2^i} \quad \text{/liniowość operatora Re} \\ &= \sum_i \text{Re} q_1^i \cdot \overline{q_2^i} = \sum_i \langle q_1^i, q_2^i \rangle = \sum_{ij} (q_1^i)_j \cdot (q_2^i)_j \end{aligned}$$

Dlatego norma quaternionowa $|(q^1, \dots, q^n)|$ elementu $(q^1, \dots, q^n) \in \Gamma^n$ to po prostu zwykła euklidesowa norma po wszystkich współrzędnych ponieważ $q \cdot \bar{q}$ jest rzeczywisty, $q \cdot \bar{q} =$

$$\operatorname{Re}(q \cdot \bar{q}),$$

$$\begin{aligned} & |(q^1, \dots, q^n)| \\ &= \sqrt{\langle (q^1, \dots, q^n), (q^1, \dots, q^n) \rangle_{\mathbb{H}}} = \sqrt{\sum_i q^i \cdot \bar{q}^i} = \sqrt{\sum_i \operatorname{Re}(q^i \cdot \bar{q}^i)} \\ &= \sqrt{\sum_{ij} (q^i)_j \cdot (q^i)_j} = \sqrt{\sum_{ij} \left((q^i)_j \right)^2} = \|(q_0^1, q_1^1, q_2^1, q_3^1, \dots, q_0^n, q_1^n, q_2^n, q_3^n)\|. \end{aligned}$$

Dlatego sfera w Γ^n względem normy quaternionowej $\{q \in \Gamma^n; |q| = 1\}$ jest sferą S^{4n-1} w $\mathbb{R}^{4n}$.

Tak samo dla zespolonych sfera w $\mathbb{C}^n$ względem normy hermitowskiej jest sferą S^{2n-1} w $\mathbb{R}^{2n}$. (W $\Gamma = \mathbb{R}$ sfera to sfera S^{n-1})

Dla $n+1$ (będzie użyteczne dalej) sfera w Γ^{n+1} jest równa odpowiednio

$$\begin{aligned} S^n &\subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^{2n+1} &\subset \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^{4n+3} &\subset \mathbb{H}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Definicja 14.3.1 Odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe $\alpha : \Gamma^n \rightarrow \Gamma^n$ nazywamy

(a) Γ -liniowe (odpowiednio $\mathbb{R}$ -liniowe, $\mathbb{C}$ -liniowe, quaternionowe) jeżeli

$$\alpha(q \cdot x) = q \cdot \alpha(x), \quad q \in \mathfrak{d}, \quad x \in \Gamma^n.$$

(b) Γ -izometrią (izometrią, izometrią unitarną, izometrią quaternionową) jeżeli

$$\langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_{\Gamma} = \langle x, y \rangle_{\Gamma}, \quad x, y \in \Gamma^n.$$

Ćwiczenie 14.3.1 (Tw) Na to aby $\alpha : \Gamma^n \rightarrow \Gamma^n$ było Γ -izometrią potrzeba i wystarcza aby α było Γ -liniowe oraz aby

$$\operatorname{Re} \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_{\Gamma} = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle_{\Gamma},$$

tzn. aby $\alpha \in O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$ - grupa obrotów rzeczywistej przestrzeni $\Gamma_{\mathbb{R}}^n$.

Ćwiczenie 14.3.2 Wszystkie Γ -izometrie przestrzeni Γ^n tworzą grupę i jest to domknięta podgrupa w zwartej grupie obrotów $O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$, zatem sama jest zwarta (i Liego). Gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ oznaczamy grupę $O(n)$ [obroty właściwe zachowujące orientację mają wyznacznik $+1$ i tworzą grupę Liego $SO(n)$], gdy $\Gamma = \mathbb{C}$ oznaczamy grupę $U(n)$ i nazywamy unitarną, gdy $\Gamma = \mathbb{H}$ oznaczamy $Q(n)$ i nazywamy quaternionową. Stąd $U(n)$ i $Q(n)$ jako domknięte podgrupy w $O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$ są zwarte.

Ćwiczenie 14.3.3 Wybierzmy w Γ^n bazę wersorów. Utożsamijmy każdy obrót z $O(n)$, $U(n)$, $Q(n)$ z macierzą względem tej bazy. Wówczas

$$\begin{aligned} A &\in O(n) \iff A^T \cdot A = \mathbf{1}, \quad O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}), \\ A &\in SO(n) \iff A^T \cdot A = \mathbf{1}, \quad \det A = +1, \quad O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\in U(n) \iff A^T \cdot \bar{A} = \mathbf{1}, \quad U(n) \subset GL(n, \mathbb{C}), \\ A &\in Q(n) \iff A^T \cdot \bar{A} = \mathbf{1}, \quad Q(n) \subset GL(n, \mathbb{H}). \end{aligned}$$

Niech $n = 1$.

Lemat 14.3.1 *Odwzorowanie $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ jest Γ -liniowe gdddy $\alpha(q) = q \cdot \alpha(1)$.*

Kiedy $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ dane wzorem $\alpha(q) = q \cdot p$ dla pewnego $p \in \Gamma$ jest Γ -izometrią?
Z własności (5) normy quaternionowej (zespólonej, rzeczywistej) otrzymujemy

Lemat 14.3.2 *$\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ dane wzorem $\alpha(q) = q \cdot p$ dla pewnego $p \in \Gamma$ jest Γ -izometrią gdddy $|p| = 1$.*

Istotnie, bycie Γ -izometrią oznacza bycie Γ -liniowe i izometrią względem wyjściowego rzeczywistego iloczynu skalarnego $\operatorname{Re} \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \operatorname{Re} (q_1 \cdot \overline{q_2}) = \langle q_1, q_2 \rangle$, co pozwala stosować (5) dla normy: $\langle \alpha(q), \alpha(q') \rangle = \langle q, q' \rangle \iff \langle q \cdot p, q' \cdot p \rangle = \langle q, q' \rangle \iff \langle q, q' \rangle \cdot |p|^2 = \langle q, q' \rangle \iff |p| = 1$.

Wniosek 14.3.1 *Dla $\Gamma = \mathbb{R}$ mamy $O(1) \cong \{-1, +1\}$,*

Dla $\Gamma = \mathbb{C}$ mamy $U(1) \cong \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = S^1$, $U(1) = SO(2)$ - obroty właściwe $\mathbb{R}^2$.

Dla $\Gamma = \mathbb{H}$ mamy $Q(1) \cong \{p \in \mathbb{H}, |p| = 1\} = S^3$.

Izomorfizmami grup Liego są

(a) $\gamma : O(1) \rightarrow \{-1, +1\}$, $\gamma(\alpha) = \alpha(1)$,

(b) $\gamma : U(1) \rightarrow S^1$, $\gamma(\alpha) = \alpha(1)$ oraz na jedno wychodzi $\gamma_1(\alpha) = \overline{\alpha(1)}$ (bo mnożenie liczb zespolonych jest przemienne),

$\gamma(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \beta(1) \cdot \alpha(1) = \alpha(1) \cdot \beta(1) = \gamma(\alpha) \cdot \gamma(\beta)$, tak samo ze sprzężeniem $\gamma_1(\alpha\beta) = \overline{(\alpha\beta)(1)} = \overline{\alpha(\beta(1))} = \overline{\beta(1) \cdot \alpha(1)} = \overline{\alpha(1) \cdot \beta(1)} = \gamma_1(\alpha) \cdot \gamma_1(\beta)$.

(c) $\gamma : Q(1) \rightarrow S^3$, musi być ze sprzężeniem bo sprzężenie iloczynu quaternionów przemienia liczby

$$\gamma_1(\alpha\beta) = \overline{(\alpha\beta)(1)} = \overline{\alpha(\beta(1))} = \overline{\beta(1) \cdot \alpha(1)} = \overline{\alpha(1) \cdot \beta(1)} = \gamma(\alpha) \cdot \gamma(\beta).$$

14.4 Związek grupy Liego S^3 z grupą obrotów przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Traktujmy $\mathbb{R}^3$ jako $K = e^\perp \subset \mathbb{H}$. Rozważmy dla punktu $p \in S^3$ odwzorowanie

$$\tau_p : K \rightarrow K, \quad x \mapsto p x p^{-1}.$$

Twierdzenie 14.4.1 a) $p x p^{-1}$ dla $p \in S^3$ jest czystym quaternionem, $p x p^{-1} \in K$,

b) τ_p jest obrotem przestrzeni K , $\langle \tau_p(x), \tau_p(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, tzn. $\tau_p \in O(3)$,

c) $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest homomorfizmem grup, $\tau(p \cdot q) = \tau(p) \cdot \tau(q)$,

d) $\tau : S^3 \times K \rightarrow K$, $(p, x) \mapsto p x p^{-1}$, jest gładkie, skąd $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest gładkim homomorfizmem grup Liego, a że S^3 jest spójna, to jego wartości muszą leżeć w spójnej składowej jedyńki grupy Liego $O(3)$ czyli w $SO(3)$, tzn. τ_p jest obrotem właściwym,

e) $\tau(p) = \tau(-p)$,

f)* $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest surjekcją i $\ker \tau = \{e, -e\}$, skąd warstwami S^3 względem $\ker \tau$ są zbiory punktów antypodycznych $p \cdot \{e, -e\} = \{p, -p\}$.

W takim razie $S^3/\ker \tau \cong SO(3)$. Jak zrobić rozmaitość $S^3/\ker \tau$? Otóż w S^3 wprowadzamy relację równoważności $\cong$ utożsamiającą punkty antypodyczne $p \cong -p$. Tworzymy przestrzeń ilorazową $S^3/\cong$ z której trzeba zrobić rozmaitość. Utożsamienie na sferze punktów antypodycznych tworzy tzw. przestrzeń (rozmaitość) rzutową $\mathbb{R}P^3$. Niech $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ będzie kanonicznym rzutowaniem, wówczas istnieje bijekcja (dyfeomorfizm)

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\tau} & SO(3) \\ \downarrow & \nearrow \sigma & \\ \mathbb{R}P^3 & & \end{array}$$

Tak oto przydały się quaterniony do zobaczenia grupy obrotów właściwych w $\mathbb{R}^3$: jest to jako rozmaitość tzw. przestrzeń rzutowa rzeczywista 3-wymiarowa $\mathbb{R}P^3$. Darujemy sobie dojście do grupy obrotów $\mathbb{R}^4 : SO(4)$ jako rozmaitość jest dyfeomorficzna z $\mathbb{R}P^3 \times S^3$.

Przestrzeń $\mathbb{R}P^3 = S^3/\cong$ można odtworzyć bardziej "liniowo", mianowicie przez dwa punkty antypodyczne $\{p, -p\}$ przechodzi dokładnie jedna prosta przechodząca przez 0 (a więc 1-wym podprzestrzeń wektorowa). Można by zatem pomyśleć, aby w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zawierającą sferę S^3 utożsamiać/ściągnąć proste przechodzące przez 0 (czyli 1-wymiarowe podprzestrzenie wektorowe) do punktu. Ale wszystkie takie proste zawierają wektor zerowy, więc trzeba go usunąć przed utożsamieniami. Bierzymy zatem $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ i wprowadzamy relację utożsamiającą punkty na prostej przechodzącej przez 0 (dwa niezerowe wektory x, y leżą w tej samej 1-wym podprz wektorowej gddy są proporcjonalne)

$$x \cong y \iff \exists_{\mathbb{R} \ni t \neq 0} (y = tx).$$

Zauważymy, że przestrzenie ilorazowe $S^3/\cong$ i $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$ są homeomorficzne.

Lemat 14.4.1 Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \rho : S^3/\cong &\rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong \\ \rho([x]) &= [x] \end{aligned}$$

jest homeomorfizmem. Odwrotne dane jest wzorem

$$\rho^{-1}([x]) = \left[\frac{x}{\|x\|} \right].$$

Dowód. Rozważmy kanoniczne rzutowania $\pi_1 : S^3 \rightarrow S^3/\cong$, $\pi_2 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$, topologia ilorazowa jest najsilniejsza przy których rzutowania są ciągłe. Aby sprawdzić, czy ρ jest ciągle wystarczy złożyć z rzutowaniem π_1 i rozważyć diagram w którym $\rho_1 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ jest inkluzją

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} & & \\ & \nearrow \rho_1 & & \searrow \pi_2 & \\ S^3 & \xrightarrow{\pi_1} & S^3/\cong & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong \end{array}$$

Otóż, ρ jest ciągle gddy $\rho \circ \pi_1$ jest ciągle, ale $\rho \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \rho_1$ jest ciągle.

Teraz odwrotnie, rozważmy ciągle odwzorowanie $\rho_2 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow S^3$, $\rho_2(x) = \frac{x}{\|x\|}$ i diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 & & \\ & \nearrow \rho_2 & & \searrow \pi_1 & \\ \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong & \xrightarrow{\rho^{-1}} & S^3 / \cong \end{array}$$

■

Niżej zbiór (który okaże się rozmaiutością) 1-wymiarowych rzeczywistych prostych $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$ w $\mathbb{R}^4$ uogólnimy na k -wymiarowe Γ -płaszczyzny przechodzące przez 0 w n -wymiarowej Γ -przestrzeni wektorowej Γ^n

$$(\Gamma^n \setminus \{0\}) / \cong$$

gdzie dla $\Gamma^n \ni x, y \neq 0$

$$x \cong y \iff \exists_{\Gamma \ni q \neq 0} (y = qx).$$

Gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ i $n = 4$, $k = 1$, otrzymamy to co wyżej.

15 Grassmanniany, w szczególności przestrzenie rzutowe

15.1 Grassmanniany

Definicja 15.1.1 k -płaszczyzną [przechodzącą przez 0 - co dla skrótu będziemy pomijać] w Γ^n nazywamy Γ -podprzestrzeń w Γ^n Γ -wymiaru k . Oznaczamy przez $G_\Gamma(n, k)$ zbiór k -wymiarowych Γ -płaszczyzn w Γ^n . Dodatkowo gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ wprowadzamy zorientowane k -płaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ czyli k -płaszczyzny rzeczywiste w $\mathbb{R}^n$ zaopatrzone w pewną orientację. Ich zbiór oznaczamy $\tilde{G}(n, k)$.

Gdybyśmy dysponowali twierdzeniem, że dla domkniętej podgrupy Liego $H \subset G$ przestrzeń ilorazowa G/H ma strukturę rozmaiutości (i to jedyną dla której rzutowanie $G \rightarrow G/H$ jest koregularne) wówczas można standardowo wprowadzić w $G_\Gamma(n, k)$ strukturę rozmaiutości i wówczas będzie ona nazywana grassmannianem k -wymiarowych Γ -płaszczyzn w Γ^n . Mianowicie tak:

Oznaczmy przez $I_\Gamma(n)$ jedną z grup Liego izometrii $O(n)$, $U(n)$, $Q(n)$ czyli grupę izometrii Γ^n odpowiednio dla $\Gamma = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Aby policzyć wymiary tych grup Liego należy najpierw znaleźć ich algebry Liego. Podamy rezultaty bez pokazywania. Oznaczamy algebrę Liego grupy $I_\Gamma(n)$ przez $Sk(n, \Gamma)$ i mamy kolejno - utożsamiając Γ -liniowe odwzorowanie z $Sk(n, \Gamma)$ z macierzą

$$\begin{aligned} A &\in Sk(n, \mathbb{R}) \quad \text{gd}dy \quad A + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{R}) &= \dim O(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{macierze skośnie symetryczne} \\ A &\in Sk(n, \mathbb{C}) \quad \text{gd}dy \quad \bar{A} + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{C}) &= \dim U(n) = n^2, \quad \text{macierze skośnie hermitowskie} \quad (\dim = \dim_{\mathbb{R}}) \\ A &\in k(n, \mathbb{H}) \quad \text{gd}dy \quad \bar{A} + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{H}) &= \dim Q(n) = n(2n+1), \quad \text{macierze skośnie quaternionowe} \end{aligned}$$

Lemat 15.1.1 *Odwzorowanie*

$$T : I_{\Gamma}(n) \times G_{\Gamma}(n, k) \longrightarrow G_{\Gamma}(n, k), \quad (\varphi, F) \longmapsto \varphi[F],$$

jest lewym działaniem tranzytywnym.

To, że T jest lewym działaniem jest oczywiste. Tranzytywność jest otrzymana w sposób standardowy w geometrii analitycznej: każda k -wymiarowa podprzestrzeń wektorowa jest obrazem przez pewną izometrię standardowej k -wymiarowej podprzestrzeni $\Gamma_0^k = \{(q_1, \dots, q_k, 0, \dots, 0), \quad q_i \in \Gamma\}$. Biorąc dwie podprzestrzenie F_1 i F_2 i składając jedną z takich izometrii z odwrotną do drugiej dostaniemy izometrię przekształcającą F_1 na F_2 . Konstrukcja takich Γ -izometrii jest ułatwiona dzięki temu, że ma być po prostu Γ -liniowa i $\mathbb{R}$ -izometria względem wyjściowego rzeczywistego iloczynu skalarnego (czyli tak jak w rzeczywistej geometrii analitycznej).

Wnioskiem z tego lematu jest

Wniosek 15.1.1 *Odwzorowanie*

$$\alpha_k : I_{\Gamma}(n) \longrightarrow G_{\Gamma}(n, k), \quad \varphi \longmapsto \varphi[\Gamma_0^k],$$

jest surjektywne.

Znajdziemy niżej $\alpha_k^{-1}[\Gamma_0^k]$.

Podprzestrzenią ortogonalną do $\Gamma_0^k = \{(q_1, \dots, q_k, 0, \dots, 0), \quad q_i \in \Gamma\}$ jest

$$(\Gamma_0^k)^{\perp} = \Gamma_1^{n-k} = \{(0, \dots, 0, q_{k+1}, \dots, q_n); \quad q_i \in \Gamma\},$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_0^k)^{\perp} &= \Gamma_1^{n-k}, \\ \Gamma^n &= \Gamma_0^k \oplus \Gamma_1^{n-k}. \end{aligned}$$

Zanurzamy $I_{\Gamma}(k)$ w $I_{\Gamma}(n)$ w zapisie macierzowym $A \longmapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ oraz $I_{\Gamma}(n-k)$ w $I_{\Gamma}(n)$ w zapisie macierzowym $B \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ oraz bierzemy zanurzenie

$$I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k) \longrightarrow I_{\Gamma}(n)$$

$$(A, B) \longmapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Jest to homomorfizm grup (mono) co pozwala widzieć $I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k)$ jako podgrupę w $I_{\Gamma}(n)$ (Liego) i zrobić przestrzeń ilorazową (rozmaitość bo $I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k)$ jest domknięta) $I_{\Gamma}(n)_{/I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k)}$.

Stwierdzenie 15.1.1 $\alpha_k^{-1}[\Gamma_0^k] = I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k)$.

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że jeżeli dla Γ -izometrii $\varphi \in I_\Gamma(n)$ przestrzeni Γ^n mamy $\varphi[\Gamma_0^k] \subset \Gamma_0^k$ to musi być

$$\varphi[(\Gamma_0^k)^\perp] \subset (\Gamma_0^k)^\perp$$

czyli

$$\varphi[\Gamma_1^{n-k}] \subset \Gamma_1^{n-k}.$$

" $\subset$ " Niech $\varphi \in \alpha^{-1}[\Gamma_0^k]$, czyli $\varphi[\Gamma_0^k] \subset \Gamma_0^k$, z powyższego rozumowania $\varphi[\Gamma_1^{n-k}] \subset \Gamma_1^{n-k}$ a zatem macierz φ jest postaci $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dla macierzy A i B izometrii z $I_\Gamma(k)$ i $I_\Gamma(n-k)$, co oznacza, że $\varphi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$.

" $\supset$ " - oczywiste, bo gdy $\varphi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ to w szczególności przeprowadza Γ_0^k w Γ_0^k . ■

Kluczem (dość ogólnym) do znalezienia struktury rozmaitości w $G_\Gamma(n, k)$ jest poniższe twierdzenie

Twierdzenie 15.1.1 *Istnieje dokładnie jedna bijekcja (homeomorfizm)*

$$\beta_k : I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)} \longrightarrow G_\Gamma(n, k)$$

taka, że

$$\begin{array}{ccc} & I_\Gamma(n) & \\ \swarrow \pi & & \searrow \alpha_k \\ I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)} & \xrightarrow{\beta_k} & G_\Gamma(n, k) \end{array}$$

Dowód. Jednoznaczność: $\beta_k([\varphi]) = \alpha_k(\varphi)$.

Poprawność definicji, tzn. niezależność powyższego wzoru od reprezentanta φ klasy $[\varphi]$. Weźmy $\psi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$. Wtedy $\psi[\Gamma_0^k] = \Gamma_0^k$ skąd

$$\alpha_k(\varphi \circ \psi) = \varphi \circ \psi[\Gamma_0^k] = \varphi[\psi[\Gamma_0^k]] = \varphi[\Gamma_0^k] = \alpha_k(\varphi).$$

Surjektywność β_k wynika z surjektywności α_k .

Injektywność β_k . Niech $\beta_k([\varphi]) = \beta_k([\psi])$, zatem $\alpha_k(\varphi) = \alpha_k(\psi)$, czyli $\varphi[\Gamma_0^k] = \psi[\Gamma_0^k]$. Weźmy $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi \in I_\Gamma(n)$. Wówczas

$$\theta[\Gamma_0^k] = \psi^{-1} \circ \varphi[\Gamma_0^k] = \psi^{-1}[\psi[\Gamma_0^k]] = \Gamma_0^k$$

a dalej z faktu, że θ jest Γ -izometrią wynika, że także $\theta[\Gamma_1^{n-k}] = \theta[(\Gamma_0^k)^\perp] = (\Gamma_0^k)^\perp = \Gamma_1^{n-k}$ co implikuje, że $\theta \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$. Zatem skoro $\varphi = \psi \circ \theta$ i $\theta \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ to $[\varphi] = [\psi]$.

Jest oczywiste, że β_k jest homeomorfizmem. ■

Ponieważ $I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)}$ jest rozmaitością (dzielenie grupy Liego przez domkniętą podgrupę Liego) oraz π jest koregularne, to struktura rozmaitości w $G_\Gamma(n, k)$ dla której β_k jest dyfeomorfizmem jest tą jedyną dla której α_k jest koregularne. Ponieważ grupy $I_\Gamma(n)$ są zwarte to grassmanniany są też zwarte.

Lemat 15.1.2 Dla dowolnej Γ -izometrii $\varphi_0 \in I_\Gamma(n)$ odwzorowanie $(\varphi_0)_* : G_\Gamma(n, k) \rightarrow G_\Gamma(n, k)$, $F \mapsto \varphi_0[F]$, jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Wystarczy pokazać gładkość. W tym celu wystarczy pokazać gładkość złożenia $(\varphi_0)_* \circ \alpha_k$.

$$\begin{aligned} (\varphi_0)_* \circ \alpha_k(\varphi) &= (\varphi_0)_*[\varphi[\Gamma_0^k]] = (\varphi_0 \circ \varphi)[\Gamma_0^k] = \alpha_k(\varphi_0 \circ \varphi) = \alpha_k \circ l_{\varphi_0}(\varphi) \\ (\varphi_0)_* \circ \alpha_k &= \alpha_k \circ l_{\varphi_0} \quad \text{jest gładkie /lewa translacja jest gładka} \end{aligned}$$

■

Definicja 15.1.2 Grassmannianem k -płaszczyzn w Γ^n nazywamy rozmaitość różniczkową $G_\Gamma(n, k)$ dla której β_k jest dyfeomorfizmem.

Zatem mamy

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{R}}(n, k) &= O(n)_{/O(k) \times O(n-k)}, \\ \dim G_{\mathbb{R}}(n, k) &= \dim O(n) - \dim O(k) - \dim O(n-k) = k(n-k), \\ G_{\mathbb{C}}(n, k) &= U(n)_{/U(k) \times U(n-k)}, \quad \dim G_{\mathbb{C}}(n, k) = 2k(n-k), \\ G_{\mathbb{H}}(n, k) &= Q(n)_{/Q(k) \times Q(n-k)}, \quad \dim G_{\mathbb{H}}(n, k) = 4k(n-k). \end{aligned}$$

W szczególności dla $k = 1$ oraz $n := n+1$ mamy tzw. przestrzenie rzutowe i ich rzeczywiste wymiary są równe

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(n+1, 1) &= 1 \cdot (n+1-1) = n, \\ \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}(n+1, 1) &= 2n, \\ \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{H}}(n+1, 1) &= 4n. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 15.1.2 Odwzorowanie

$$\gamma : G_\Gamma(n, k) \rightarrow G_\Gamma(n, n-k), \quad F \mapsto F^\perp,$$

jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Weźmy Γ -izometrię $\theta \in I_\Gamma(n)$ o macierzy

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_k \\ \mathbf{1}_{n-k} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-k} \\ \mathbf{1}_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta^T(e_i) = \sum_j \theta_i^j e_j$$

$$(\theta^T)_i^j = \begin{cases} 0, & i \leq n-k, \quad j \leq k \\ \delta_i^{j-k}, & i \leq n-k, \quad j \geq k+1 \\ \delta_{i-n+k}^j, & i \geq n-k+1, \quad j \leq k \\ 0, & i \geq n-k+1, \quad j \geq k+1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \theta^T(e_1) &= e_{k+1}, \quad \theta^T(e_{n-k}) = e_n \\ \theta^T[\Gamma_0^{n-k}] &= \Gamma_1^{n-k}. \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $\theta_* \circ \gamma$ jest gładka.

Definiujemy

$$\varphi_\theta : I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)$$

wzorem

$$\varphi_\theta(A) = \theta \circ A \circ \theta^T.$$

Macierzą złożenia $\theta \circ A \circ \theta^T$ jest $\theta^T \cdot A \cdot \theta$. Łatwo sprawdzamy, że jest to homomorfizm (izomorfizm) grup $\varphi_\theta(A \circ B) = \varphi_\theta(A) \circ \varphi_\theta(B)$ i oczywiście jest gładki (mnożenia $\theta^T \cdot A \cdot \theta$ są gładkie) poza tym dla $\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ mamy

$$\varphi_\theta[I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)] = I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_\theta \left(\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \right) \\ = & \theta^T \cdot \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \theta \\ = & \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-k} \\ \mathbf{1}_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-k} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_k \end{bmatrix} \\ = & \dots = \begin{bmatrix} B_{n-k} & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \in I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k) \end{aligned}$$

skąd wynika, że φ_θ indukuje dyfeomorfizm

$$\bar{\varphi}_\theta : I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)} \longrightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)}$$

(bo tak: rzut $I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)}$ jest koregularny a złożenie $\bar{\varphi}_\theta$ z tym rzutem jest gładkie bo jest to wtedy złożenie rzutu z prawej $I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)}$ z φ).

Pokazujemy przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)} & \xrightarrow[\simeq]{\beta_k} & G_\Gamma(n, k) \\ \simeq \downarrow \bar{\varphi}_\theta & & \downarrow \theta_* \circ \gamma \\ I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)} & \xrightarrow[\simeq]{\beta_{n-k}} & G_\Gamma(n, n-k) \end{array}$$

$$\theta_* \circ \gamma \circ \beta_k([\varphi]) = \theta_* \circ \gamma[\alpha_k(\varphi)] = \theta_* \circ \gamma[\varphi[\Gamma_0^k]] = \theta_*[\varphi[\Gamma_0^k]^\perp] = \theta_*[\varphi[\Gamma_1^{n-k}]]$$

$$\begin{aligned} \beta_{n-k} \circ \bar{\varphi}_\theta[\varphi] &= \beta_{n-k}[\theta \circ \varphi \circ \theta^T] = \alpha_{n-k}(\theta \circ \varphi \circ \theta^T) = \theta \circ \varphi \circ \theta^T[\Gamma_0^{n-k}] \\ &= \theta \circ \varphi[\Gamma_1^{n-k}] = \theta_*[\varphi[\Gamma_1^{n-k}]]. \end{aligned}$$

Stąd $\theta_* \circ \gamma$ jest dyfeomorfizmem, ale θ_* też jest dyfeomorfizmem, więc γ też jest dyfeomorfizmem. ■

15.2 Rzeczywiste, zespolone i quaternionowe przestrzenie rzutowe

Definicja 15.2.1 Rozmaitość Grassmanna $G_\Gamma(n+1, 1)$ 1-wymiarowych Γ -przestrzeni w Γ^{n+1} , $n \geq 1$

$$\Gamma P^n = \mathbb{P}^n \Gamma := G_\Gamma(n+1, 1) = (\Gamma^{n+1} \setminus \{0\})_{/\cong}$$

gdzie dla $\Gamma^{n+1} \ni x, y \neq 0$

$$x \cong y \iff \exists_{\Gamma \ni q \neq 0} (y = qx),$$

nazywamy Γ -przestrzenią rzutową.

Dla $\Gamma = \mathbb{R}$ mamy rzeczywistą przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ oznaczaną też $\mathbb{R}P^n$.

Dla $\Gamma = \mathbb{C}$ mamy zespoloną przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ oznaczaną też $\mathbb{C}P^n$.

Dla $\Gamma = \mathbb{H}$ mamy quaternionową przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{H}$ oznaczaną też $\mathbb{H}P^n$.

Niech

$$\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$$

będzie kanonicznym rzutowaniem. Wprowadzimy teraz atlas gładki na $\mathbb{P}^n \Gamma$ a tym samym strukturę rozmaitości w przestrzeni topologicznej ilorazowej $\mathbb{P}^n \Gamma$.

Definicja 15.2.2 Niech $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ będzie bazą Γ^{n+1} . Parametryzacją $\mathbb{P}^n \Gamma$ stowarzyszoną z bazą $\mathbf{v}$ nazywamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}} & : \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \\ (q^1, \dots, q^n) & \longmapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \quad q^i \in \Gamma. \end{aligned}$$

Twierdzenie 15.2.1 $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w $\mathbb{P}^n \Gamma$. Rodzina parametryzacji $\{\varphi_{\mathbf{v}}\}$ stanowi atlas gładki na przestrzeni $\mathbb{P}^n \Gamma$.

Dowód. a) Ciągłość $\varphi_{\mathbf{v}}$. Złożymy $\varphi_{\mathbf{v}}$ w postaci odwzorowań ciągłych

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}} : \Gamma^n & \xrightarrow{\delta} \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \Gamma \\ (q^1, \dots, q^n) & \longmapsto v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i \longmapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i]. \end{aligned}$$

Zatem $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest ciągle.

b) obraz $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest otwarty w $\mathbb{P}^n \Gamma$.

$$\begin{aligned} W & : = \pi^{-1}[\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]] = \pi^{-1}[\pi \circ \delta[\Gamma^n]] \\ & = \{q \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i); \Gamma \ni q \neq 0, q^i \in \Gamma\} \\ & = \{\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i; r^0 \neq 0, r^i \in \Gamma\} \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

W jest otwarty w $\Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$ zatem $\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]$ jest otwarty w $\mathbb{P}^n \Gamma$. Do pokazania, że $\varphi_{\mathbf{v}}^{-1}$ wystarcza złożyć z $\pi|_W$ i pokazać ciągłość. Ponieważ złożenie to wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \circ \pi|_W \left(\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i \right)_{r^0 \neq 0} & = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \left([\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i] \right) = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \left(\left[v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{r^i}{r^0} \cdot v_i \right] \right) \\ & = \left(\frac{r^1}{r^0}, \dots, \frac{r^n}{r^0} \right) \end{aligned}$$

o ciągłych współczynnikach to $\varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \circ \pi|W$ jest ciągle, zatem $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest homeomorfizmem na obraz.

c) Biorąc bazę $\mathbf{v}_0 = (v_0, \dots, v_n)$ i przesuwając v_i na pierwsze miejsce $\mathbf{v}_i = (v_i, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ łatwo widzimy, że

$$\bigcup_{i=0}^n \varphi_{\mathbf{v}_i} [\Gamma^n] = \mathbb{P}^n \Gamma.$$

Istotnie, niech $[x] \in \mathbb{P}^n \Gamma$, $x \neq 0$, $x \in \Gamma^{n+1}$. Wtedy $x = \sum_{i=0}^n r^i v_i$ i któraś współrzędna $r^{i_0} \neq 0$. Wtedy

$$[x] = [\sum_{i=0}^n r^i v_i] = [r^{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} r^i v_i] = \left[v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \frac{r^i}{r^{i_0}} v_i \right] \in \text{Im } \varphi_{\mathbf{v}_{i_0}}.$$

Zatem obrazy $\varphi_{\mathbf{v}} [\Gamma^n]$ pokrywają całą przestrzeń $\mathbb{P}^n \Gamma$.

d) Weźmy dowolne bazy $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ i $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$ i parametryzacje $\varphi_{\mathbf{v}}$ i $\varphi_{\mathbf{w}}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}} &: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \quad (q^1, \dots, q^n) \mapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \\ \varphi_{\mathbf{w}} &: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \quad (q^1, \dots, q^n) \mapsto [w_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot w_i]. \end{aligned}$$

Obliczymy współrzędne przekształcenia

$$\varphi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \quad \Omega_1 = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} [\varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n]], \quad \Omega_2 = \varphi_{\mathbf{w}}^{-1} [\varphi_{\mathbf{v}} [\Gamma^n]] \quad - \text{ otwarte podzbiory.}$$

Niech $v_i = \sum_{j=0}^n c_i^j w_j$, $i = 0, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} [\varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n]] = \{ (q^1, \dots, q^n) ; \varphi_{\mathbf{v}} (q^1, \dots, q^n) \in \varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n] \} \\ &= \{ (q^1, \dots, q^n) ; [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i] \in \varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n] \} \\ &= \{ (q^1, \dots, q^n) ; [\sum_{j=0}^n c_0^j w_j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot \sum_{j=0}^n c_i^j w_j] \in \varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n] \} \\ &= \{ (q^1, \dots, q^n) ; [(c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0) \cdot w_0 + (\sum_{j=1}^n c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j) \cdot w_j] \in \varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n] \} \\ &= \{ (q^1, \dots, q^n) ; c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0 \neq 0 \} \quad - \text{ jest to zbiór otwarty} \end{aligned}$$

$$= \left\{ (q^1, \dots, q^n) ; \left[w_0 + \sum_{j=1}^n \frac{c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \cdot w_j \right] \in \varphi_{\mathbf{w}} [\Gamma^n] \right\}$$

skąd

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}} (q^1, \dots, q^n) &= \left[w_0 + \sum_{j=1}^n \frac{c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \cdot w_j \right] \\ &= \varphi_{\mathbf{w}} \left(\frac{c_0^1 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^1}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0}, \dots, \frac{c_0^n + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^n}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\varphi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}} (q^1, \dots, q^n) = \left(\frac{c_0^1 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^1}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0}, \dots, \frac{c_0^n + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^n}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \right)$$

co dowodzi gładkości funkcji przejścia. ■

Ćwiczenie 15.2.1 Obliczyć bezpośrednio funkcje przejścia dla baz $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$, $i \neq j$,

$$\varphi_{\mathbf{v}_i}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}_j}(q^1, \dots, q^n) = \begin{cases} \dots & \text{dla } i \leq j-1 \\ \dots & \text{dla } i \geq j+1 \end{cases}.$$

Wniosek 15.2.1 $\mathbb{P}^n \Gamma$ posiada naturalną strukturę rozmaitości różniczkowej Γ -wymiaru n , w szczególności wymiar rzeczywisty dla $\Gamma = \mathbb{C}$ wynosi $2n$ zaś dla $\Gamma = \mathbb{H}$ wynosi $4n$ co zgadza się z wcześniejszymi wyliczeniami wymiarów $\mathbb{P}^n \Gamma = G_\Gamma(n+1, 1)$ jako rozmaitości jednorodnych (grupa Liego dzielona przez podgrupę Liego $I_\Gamma(n+1)_{/I_\Gamma(1) \times I_\Gamma(n)} \xrightarrow{\beta_1} G_\Gamma(n+1, 1) = \mathbb{P}^n \Gamma$)

Ćwiczenie 15.2.2 Rzutowanie $\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$ jest gładkie, co więcej jest koregularne.

Twierdzenie 15.2.2 Rozmaitość $\mathbb{P}^1 \Gamma = G_\Gamma(2, 1)$ jest dyfeomorficzna ze sferą S^1 dla $\Gamma = \mathbb{R}$, S^2 dla $\Gamma = \mathbb{C}$ i S^4 dla $\Gamma = \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^1 &= S^1, \\ \mathbb{C}P^1 &= S^2, \\ \mathbb{H}P^1 &= S^4. \end{aligned}$$

Dowód. Weźmy dowolną bazę $\mathbf{v}_0 = (v_0, v_1)$ przestrzeni Γ^2 i parametryzację

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}_0} &: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1 \Gamma, \\ q &\longmapsto [v_0 + q \cdot v_1], \quad q \in \Gamma. \end{aligned}$$

Jest to dyfeomorfizm na otwarty podzbiór, przy czym parametryzacja nie obejmuje tylko jednego punktu z $\mathbb{P}^1 \Gamma$,

$$\mathbb{P}^1 \Gamma \setminus \varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma] = \{[v_1]\}.$$

Istotnie, $[v_1] = [0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1]$ nie może być w obrazie $\varphi_{\mathbf{v}_0}$, i gdy $[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1]$ nie należy do $\varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma]$ to $q_0 = 0$ bo w przeciwnym wypadku

$$[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1] = \left[v_0 + \frac{q_1}{q_0} \cdot v_1 \right] \in \varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma].$$

Stąd $[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1] = [q_1 \cdot v_1] = [v_1]$ bo musi być $q_1 \neq 0$. Stąd z ogólnej topologii [Engelking] odwzorowanie $\varphi_{\mathbf{v}_0}$ rozszerza się do jedno-punktowego uzwarcenia $\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0} : \Gamma \cup \{v_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1 \Gamma$ przy czym jest to homeomorfizm. Ale łatwiej i znajomo można 1-punktowe uzwarcenie przestrzeni Γ zrobić jako sferę wykorzystując rzut stereograficzny z bieguna północnego utożsamionego z wektorem v_1 . Przy czym

$$\Gamma \cup \{v_1\} = S_\Gamma(1) := \begin{cases} S^1, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^2, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^4, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Co więcej wykorzystując rzut stereograficzny z bieguna południowego utożsamionego z wektorem v_0 oraz parametryzacji $\varphi_{\mathbf{v}_1}$ dla bazy (v_1, v_0) pokazujemy [ĆWICZENIE !!!] że

$\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0} : \Gamma \cup \{v_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1\Gamma$ jest dyfeomorfizmem do czego brakuje gładkości tylko w jednym punkcie biegunie południowym. Tzn. powinno być

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \setminus \{0\} & & \\ \uparrow h_+ & \searrow \varphi_{\mathbf{v}_0} & \\ S_\Gamma(1) \setminus \{v_0, v_1\} & \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0}} & \mathbb{P}^1\Gamma \\ \downarrow h_- & \nearrow \varphi_{\mathbf{v}_1} & \\ \Gamma \setminus \{0\} & & \end{array}$$

■

15.3 Rozwłóknienia Hopfa

Weźmy kanoniczny gładki (koregularny) rzut

$$\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\Gamma$$

oraz wybierzmy sferę $S_\Gamma(n)$ w $\Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$ o promieniu 1 względem Γ -normy, $S_\Gamma(n) = \{q \in \Gamma^{n+1}; |q| = 1\}$. Jak wiemy z uwagi (14.3.1) o sferze względem Γ -normy sfera $S_\Gamma(n)$ jest po prostu sferą w indukowanej euklidesowej normie. Tak więc mamy kolejno

$$\begin{aligned} S^n &\subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^{2n+1} &\subset \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^{4n+3} &\subset \mathbb{H}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Obetniemy rzut π do tej sfery

$$\rho : S_\Gamma(n) \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n\Gamma.$$

a) dla $\Gamma = \mathbb{R}$

$$\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n,$$

b) dla $\Gamma = \mathbb{C}$

$$\rho : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

c) dla $\Gamma = \mathbb{H}$

$$\rho : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n.$$

Pokażemy, że są to wiązki o włóknach typowych $S_\Gamma(0)$ równych kolejno $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$, S^1 i S^3 . Wiązki te nazywają się wiązkami Hopfa. W szczególności dla $n = 1$ skoro

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^1 &= S^1, \\ \mathbb{C}P^1 &= S^2, \\ \mathbb{H}P^1 &= S^4. \end{aligned}$$

to otrzymujemy wiązki

$$\begin{aligned} \rho &: S^1 \rightarrow S^1 \text{ - podwójne nakrycie /włókno } \mathbb{Z}_2, \text{ dla } S^1 = \{z; |z| = 1\}, \rho(z) = z^2. \\ \rho &: S^3 \rightarrow S^2 \text{ - włókno } S^1, \\ \rho &: S^7 \rightarrow S^4 \text{ - włókno } S^3. \end{aligned}$$

Wiązki te nie są trywialne, rzutowania ρ nie są ściągające do punktów skąd wynika np, że $\pi_3(S^2) \neq 0$ i $\pi_7(S^4) \neq 0$ tzn. w 2-wymiarowej rozmaitości S^2 są "dziury" 3-wymiarowe a 4-wymiarowej rozmaitości S^4 są dziury 7-wymiarowe!. Rozważając oktawy Cayleya (czego nie robiliśmy) dochodzi się w analogiczny sposób do wiązki $S^{15} \rightarrow S^8$ z włóknem S^7 (sfery S^1 , S^3 i S^7 są jedynymi w których istnieje struktura grupy Liego).

Przypadek rzeczywisty jest banalny. Zajmiemy się przypadkiem 2 i 3.

Niech $(z_0, z_1) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, tzn. $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ ($\mathbb{C}$ -norma punktu (z_0, z_1) jest 1, $|(z_0, z_1)| = 1$). Każdy inny reprezentant klasy $[(z_0, z_1)] \in \mathbb{C}P^1$ jest postaci (tz_0, tz_1) dla $\mathbb{C} \ni t \neq 0$. Jeśli więc dalej $(tz_0, tz_1) \in S^3$ czyli ma $\mathbb{C}$ -normę równą 1 to zachodzi

$$1 = |(z_0, z_1)| = |(tz_0, tz_1)| = |t \cdot (z_0, z_1)| = |t| \cdot |(z_0, z_1)| = |t|.$$

Zatem włókno nad punktem $[(z_0, z_1)]$ jest równe $\{t \cdot (z_0, z_1) ; |t| = 1\} \cong S^1$.

Analogiczny rachunek dla quaternionów daje to samo: współczynnik proporcjonalności q mam mieć normę quaternionową (czyli zwykłą euklidesową) równą 1, a to oznacza, że $q \in S^3$ i włókno jest dyfeomorficzne z S^3 . Przy okazji obserwujemy bardzo ciekawą rzecz: $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ i $S^7 \subset \mathbb{H}^2$, na $\mathbb{C}^2$ działa z lewa grupa Liego S^1 (mnożenie zwykle przez liczby zespolone), po obcięciu do S^3 nie wychodzi się z S^3 bo norma po pomnożeniu przez element z S^1 nie zmienia się. Aby mieć prawe działanie trzeba mnożyć z lewa przez odwrotny

$$\bullet : S^3 \times S^1 \rightarrow S^3, (q, a) \longmapsto q \bullet a := a^{-1} \cdot q,$$

i

$$(q \bullet a) \bullet b = (a^{-1} \cdot q) \bullet b = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot q) = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot q = (ab)^{-1} \cdot q = q \bullet (ab),$$

dostajemy gładkie i tzw. wolne, tzn. gdy $(z_0, z_1) \bullet t = (z_0, z_1)$ to $t = 1$. Znaczy to, że orbitą działania jest S^1 , $(z_0, z_1) \bullet S^1 \cong S^1$, poza tym orbity tego działania pokrywają się co wyżej zaobserwowaliśmy z włóknami rzutowania $\rho : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$. Z Tw Glisona $\rho : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ jest wiązką i to wiązką główną o grupie strukturalnej S^1 .

Analogicznie w przypadku quaternionowym mamy prawe działanie wolne z mnożenia przez odwracanie quaternionów $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^2$

$$\bullet : S^7 \times S^3 \rightarrow S^7, (q, a) \longmapsto q \bullet a := a^{-1} \cdot q.$$

Orbitą jest $(q_0, q_1) \cdot S^3 \cong S^3$ i orbity pokrywają się z włóknami rzutowania koregularnego $\rho : S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1 = S^4$. Tak samo z Tw. Glisona jest to wiązka główna z grupą strukturalną S^3 .

Niżej bardziej rachunkowo bez Tw. Glisona pokażemy że mamy do czynienia z wiązkami lokalnie trywialnymi $\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\rho : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ i $\rho : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$, jednym ujęciem z wiązką

$$\rho : S_\Gamma(n) \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$$

o grupie strukturalnej $S_\Gamma(0) = \mathbb{Z}_2, S^1$ i S^3 odpowiednio $/S_\Gamma(n) \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$, $S_\Gamma(0) \subset \Gamma \setminus \{0\}$.

Twierdzenie 15.3.1 (a) Dla dowolnej bazy $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n) \in \Gamma^{n+1}$ odwzorowanie

$$\psi_{\mathbf{v}} : U_{\mathbf{v}} \times S_\Gamma(0) \rightarrow \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \subset S_\Gamma(n)$$

gdzie $U_{\mathbf{v}} = \{[v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i]; \quad q^i \in \Gamma\} \subset \mathbb{P}^n \Gamma$ jest otwartym podzbiorem, zadane wzorem

$$\psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) = \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|}$$

jest dyfeomorfizmem (z więc lokalną trywializacją rzutowania ρ).

(b) dla dowolnych dwu baz $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ i $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$ istnieje gładkie odwzorowanie $\varphi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} : U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}} \rightarrow S_{\Gamma}(0)$ takie, że

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \psi_{\mathbf{v}} &: (U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}}) \times S_{\Gamma}(0) \rightarrow (U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}}) \times S_{\Gamma}(0) \\ \psi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \psi_{\mathbf{v}}(x, \alpha) &= (x, \varphi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x) \cdot \alpha). \end{aligned}$$

Dowód. (a1) Gładkość $\psi_{\mathbf{v}} : U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0) \rightarrow S_{\Gamma}(n)$. Najpierw obserwujemy, że $U_{\mathbf{v}}$ jest dyfeomorficzny z Γ^n , dyfeomorfizmem jest parametryzacja $\varphi_{\mathbf{v}}$

$$\varphi_{\mathbf{v}} : \Gamma^n \rightarrow U_{\mathbf{v}}, \quad (q^1, \dots, q^n) \mapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i].$$

Składamy $\psi_{\mathbf{v}}$ z dyfeomorfizmem $\varphi_{\mathbf{v}} \times Id_{S_{\Gamma}(0)} : \Gamma^n \times S_{\Gamma}(0) \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0)$ i obliczamy

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0) & & \\ \cong \uparrow \varphi_{\mathbf{v}} \times Id_{S_{\Gamma}(0)} & \searrow \psi_{\mathbf{v}} & \\ \Gamma^n \times S_{\Gamma}(0) & \longrightarrow & S_{\Gamma}(n) \subset \Gamma^{n+1} \\ ((q^1, \dots, q^n), \alpha) & \longmapsto & \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \end{array}$$

Dolna strzałka jest gładka, więc $\psi_{\mathbf{v}}$ jest też gładka.

(a2) $\text{Im } \psi_{\mathbf{v}} = \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]$ -Ćwiczenie

(a3) Gładkość odwrotnego $\psi_{\mathbf{v}}^{-1} : \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0)$. Przypomnijmy rzut $\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$. Weźmy

$$q_{\mathbf{v}} : \pi^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times \Gamma$$

$$q_{\mathbf{v}} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^n q^i v_i}_{q^0 \neq 0} \right) = \left(\left[\sum_{i=0}^n q^i v_i \right], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \right).$$

Odwzorowanie $q_{\mathbf{v}}$ jest gładkie. Pokażemy, że

$$q_{\mathbf{v}}|_{\rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]} = \psi_{\mathbf{v}}^{-1}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \text{i) gdy } \sum_{i=0}^n q^i v_i &\in S_{\Gamma}(n) \text{ czyli } |\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1 \text{ to } \left| q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \right| = \\ |q^0 v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i| &= |\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1 \text{ skąd } q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \in S_{\Gamma}(0) \text{ więc} \\ \left(q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \right)^{-1} &= \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \in S_{\Gamma}(0). \end{aligned}$$

ii) $q_{\mathbf{v}}|\rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \circ \psi_{\mathbf{v}} = q_{\mathbf{v}} \circ \psi_{\mathbf{v}} = id$, istotnie,

$$\begin{aligned}
& q_{\mathbf{v}} \circ \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \\
= & q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) = q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha^{-1} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \alpha^{-1} q^i \cdot v_i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) \\
= & q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^{-1} q^i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_i \right) \\
= & \left(\left[\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^{-1} q^i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_i \right], \left(\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) \\
= & ([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \alpha).
\end{aligned}$$

iii) Niech $q = \sum_{i=0}^n q^i v_i \in \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]$, $q^0 \neq 0$ oraz $|\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1$. Otrzymujemy

$$\psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) = \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{v}} \circ q_{\mathbf{v}}(q) &= \psi_{\mathbf{v}} \circ q_{\mathbf{v}}(\sum_{i=0}^n q^i v_i) = \psi_{\mathbf{v}} \left(\left[\sum_{i=0}^n q^i \cdot v_i \right], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \right) \\
&= \psi_{\mathbf{v}} \left(\left[v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \right) \\
&= \frac{\left(\frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \right)^{-1} \cdot \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \\
&= \frac{q^0 |v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i| \cdot \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \\
&= q^0 \cdot \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right) = \sum_{i=0}^n q^i v_i = q.
\end{aligned}$$

a4) $\rho \circ \psi_{\mathbf{v}} = pr_1$ - jasne.

a5) Pokażemy, że $\psi_{\mathbf{v}}$ spełnia warunki

$$\psi_{\mathbf{v}}(u, \alpha) \cdot \beta = \psi_{\mathbf{v}}(u, \alpha \cdot \beta), \quad \alpha, \beta \in S_{\Gamma}(0).$$

Niech $u = [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i]$, wtedy

$$\begin{aligned}
 \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \bullet \beta &= \beta^{-1} \cdot \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \\
 &= \beta^{-1} \cdot \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\
 &= \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \frac{(v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\
 &= (\alpha\beta)^{-1} \cdot \frac{(v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\
 &= \frac{(\alpha\beta)^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\
 &= \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha\beta)
 \end{aligned}$$

co pokazuje, że wiązki Hopfa są wiązkami głównymi. ■

15.4 Różniczka funkcji rzeczywistej $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na rozmaitości M

Zanim przedstawimy różniczkę funkcji rzeczywistej przypomnijmy ważne z algebry liniowej pojęcie przestrzeni wektorowej dualnej do danej. Niech V będzie dowolną rzeczywistą przestrzenią wektorową. Odwzorowanie $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ jak wiadomo z algebry nazywa się liniowe (nazywamy je często funkcjami liniowymi albo **kowektorami**) jeśli $\alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w)$ oraz $\alpha(rv) = r\alpha(v)$ dla $v, w \in V$ oraz $r \in \mathbb{R}$. Suma dwu odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym i iloczyn przez skalar też. Ogół odwzorowań liniowych $\{\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}\}$ tworzy więc także przestrzeń wektorową, nazywaną dualną do V i oznaczaną najczęściej przez

$$V^*.$$

Założmy, że V ma skończony wymiar n i $(v_1, \dots, v_n)$ jest jej bazą. Wiadomo, że każdy funkcjonal liniowy $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednoznacznie określony wartościami na bazie. Dlatego łatwo określić bazę przestrzeni dualnej V^* . Definiujemy w tym celu funkcjonały $v_1^*, \dots, v_n^*$ określając ich wartości na wektorach z bazy $(v_1, \dots, v_n)$:

$$\begin{aligned}
 v_1^*(v_1) &= 1, \quad v_1^*(v_2) = \dots = v_1^*(v_n) = 0 \\
 v_2^*(v_1) &= 0, \quad v_2^*(v_2) = 1, \quad v_2^*(v_3) = \dots = v_2^*(v_n) = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 v_n^*(v_1) &= \dots = v_n^*(v_{n-1}) = 0, \quad v_n^*(v_n) = 1.
 \end{aligned}$$

Krótko

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad \text{- delta Kroneckera,}$$

czyli równoważnie

$$v_i^*(r^1 v_1 + \dots + r^n v_n) = r^i.$$

Układ funkcjonałów $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ tworzy bazę przestrzeni dualnej V^* zwaną bazą dualną do bazy $(v_1, \dots, v_n)$.

Dla przykładu, bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są wersory osi współrzędnych $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a bazą dualną kowektory $(\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$, takie, że $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, czyli

$$\mathbf{e}_i^*([x^1, \dots, x^n]) = x^i.$$

Wygodnie jest przyjąć jeszcze następujące oznaczenie: gdy $(x^1, \dots, x^n)$ są współrzędnymi punktu w $\mathbb{R}^n$ (względem bazy wersorów $\mathbf{e}_i$) to elementy bazy dualnej $(\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ oznaczamy przez $(dx^1, \dots, dx^n)$. Przy takim oznaczeniu dowolny funkcjonał liniowy $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, jest kombinacją liniową dx^i ,

$$\alpha = a^1 dx^1 + \dots + a^n dx^n.$$

Przykładami kowektorów z $(\mathbb{R}^n)^*$ są różniczki (mocne) funkcji $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ określonych na otwartych zbiorach $U \subset \mathbb{R}^n$.

$$(Df)_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = f'_{|\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n h^i \cdot f_{|i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n f_{|i}(\mathbf{x}_0) \cdot (dx^i)(\mathbf{h})$$

skąd we współrzędnych w przestrzeni dualnej $(\mathbb{R}^n)^*$ mamy znany wzór na różniczkę funkcji f klasy co najmniej C^1 , w danym punkcie $\mathbf{x}_0 \in U$

$$(Df)_{\mathbf{x}_0} = \sum_{i=1}^n f_{|i}(\mathbf{x}_0) \cdot dx^i.$$

Niech M będzie dowolną rozmaitością, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją rzeczywistą klasy C^∞ , $p \in M$ dowolnym punktem i $w \in T_p M$ dowolnym wektorem stycznym do M w punkcie p . Określamy różniczkę funkcji f w punkcie p następująco: jest to odwzorowanie liniowe

$$(df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowane tak samo jak odwzorowanie styczne $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, tzn. dla wektora $w \in T_p M$ wybieramy dowolnie łuk $\mathbf{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taki, że $\mathbf{c}(0) = p$ i $\mathbf{c}'(0) = w$ i kładziemy $(df)_p(w) = (f \circ \mathbf{c})'(0)$. Różniczka $(df)_p$ jest zatem kowektorem - elementem przestrzeni dualnej do przestrzeni stycznej $T_p M$

$$(df)_p \in (T_p M)^* = \text{/inne oznaczenie/} = T_p^* M.$$

Przestrzeń dualna $T_p^* M$ do przestrzeni stycznej $T_p M$ nazywana też jest **przestrzenią kostyczną**.

Uwaga 15.4.1 Dlaczego wprowadzamy symbol różniczki funkcji $(df)_p$ inny od odwzorowania stycznego $T_p f$? Otóż dlatego, że pojawia się w ten sposób litera d która jest tu załącznikiem nowego operatora d (dalej zdefiniowanego) który będzie różniczkował nie tylko funkcje rzeczywiste ale i tzw. formy różniczkowe dowolnego stopnia, a właśnie w stopniu 0 to będą po prostu funkcje rzeczywiste na M .

Niech $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ będzie dowolną mapą na rozmaitości M wokół punktu p . Bazą przestrzeni stycznej $T_p M$ są jak wiemy wektory $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Analogicznie jak to pisaliśmy dla $\mathbb{R}^n$, bazę dualną do bazy $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ oznaczamy przez dx^i . Oznacza to, że gdy $\mathbf{h} = \sum_{j=1}^n h^j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$ to $(dx^i)(\mathbf{h}) = h^i$. Obliczymy wartość różniczki $(df)_p$ na wektorze $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Tak samo jak we wzorze (10.0.1) przyjmując na prostej $\mathbb{R}$ mapę identyczność otrzymamy

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right) = (df)_p (D\mathbf{x}^{-1})_{\mathbf{x}(p)} (\mathbf{e}_i) = D(f \circ \mathbf{x}^{-1})_{\mathbf{x}(p)} (\mathbf{e}_i) = (f \circ \mathbf{x}^{-1})_{|i} (\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

tzn.

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = (f \circ \mathbf{x}^{-1})_{|i} (\mathbf{x}(p)).$$

Dla dowolnego wektora $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ otrzymujemy z liniowości różniczki

$$\begin{aligned} (df)_p(\mathbf{h}) &= \sum_{i=1}^n h^i \cdot (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right) = \sum_{i=1}^n h^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n dx^i(\mathbf{h}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

tzn.

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx^i$$

i można się pozbyć punktu p otrzymując wzór

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

który sprawia, że df staje się tzw. 1-formą różniczkową na M w dziedzinie mapy $\mathbf{x}$ co niebawem dokładniej przedstawimy. Zauważmy jeszcze, że symbol dx^i można traktować jako różniczkę współrzędnej x^i rozumianej jako funkcja na otwartym zbiorze na M , istotnie, ponieważ $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ to obie strony ostatniej równości są równe dx^i : $dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \cdot dx^j = \sum_{j=1}^n \delta_j^i \cdot dx^j = dx^i$.

16 Formy różniczkowe na rozmaitościach

16.1 1-formy różniczkowe

Niech M będzie dowolną rozmaitością klasy C^∞ . W każdym punkcie $p \in M$ jest określona przestrzeń styczna $T_p M$ oraz dualna do niej - tzw. przestrzeń kostyczna

$$T_p^* M = (T_p M)^*$$

składająca się z kowektorów $\alpha : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 16.1.1 Formą różniczkową stopnia 1 (1-formą różniczkową) na otwartym podzbiorze $U \subset M$ nazywamy przyporządkowanie ω które każdemu punktowi $p \in U$ przypisuje jakiś kowektor $\omega_p \in T_p^*M$.

Przykładami 1-form są oczywiście różniczki funkcji df , dla $f \in C^\infty(M)$.

Jak zdefiniować 1-formy różniczkowe klasy C^∞ ? W tym celu posłużymy się lokalnym systemem współrzędnych $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ wokół punktu p i związaną z nim bazą $(dx^1, \dots, dx^n)$ przestrzeni kostycznej T_p^*M . Formę ω zapisujemy w tej bazie

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i.$$

Mówimy, że ω jest klasy C^∞ jeżeli współrzędne ω^i są funkcjami klasy C^∞ . Łatwo zobaczyć, że jeśli w pewnej mapie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ wokół punktu p współrzędne formy ω są klasy C^∞ to w każdej innej mapie $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ wokół punktu p są też klasy C^∞ i dlatego definicja jest poprawna. Istotnie, niech $dx^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot dy^j$, wtedy $\sum_{k=1}^n a_k^i \cdot dy^k \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum_{k=1}^n a_k^i \cdot \delta_j^k = a_j^i$ skąd $(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$

$$a_j^i = dx^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad - \text{ jest to funkcja klasy } C^\infty$$

Zapisując ω w dwu mapach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ mamy

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}^i \cdot dy^i$$

możemy obliczyć $\tilde{\omega}^i$ za pomocą ω^i

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot dy^j = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot dy^j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \cdot dy^j \end{aligned}$$

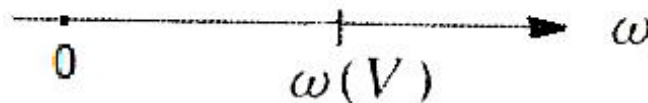
skąd

$$\tilde{\omega}^i = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

Ze wzoru tego widzimy, że jeśli ω^i są klasy C^∞ to także $\tilde{\omega}^i$ są klasy C^∞ .

Geometrycznie, wartość 1-formy ω_p na wektorze $v \in T_pM$ wyobrazimy sobie w pewien sposób nadający się na uogólnienie dla form wyższego stopnia opisane niżej. Rozważmy oś oznaczaną literą ω i na tej osi zaznaczmy punkt $\omega_p(v)$ i rozważmy odcinek o początku w 0 i końcu w $\omega_p(v)$, $\overline{0 \ \omega_p(v)}$. Długość tego odcinka jest wartością bezwzględną liczby $\omega_p(v)$, $\left| \overline{0 \ \omega_p(v)} \right| = |\omega_p(v)|$. Można zatem powiedzieć, że $\omega_p(v)$ jest znakowaną długością

odcinka $\overline{0 \omega_p(v)}$, tzn. długością opatrzoną znakiem $+$ lub $-$, znak zależy od tego czy liczba $\omega_p(v)$ jest dodatnia czy ujemna.



Za uogólnienie odcinka na płaszczyźnie można uważać równoległobok, a w wyższym wymiarze równoległoscian - co będzie istotne w geometrycznym wyobrażeniu wartości form wyższego stopnia.

16.2 Mnożenie skośne 1-form różniczkowych

W tym paragrafie podamy metodę mnożenia 1-form różniczkowych tak aby były zachowane w jakimś sensie własności liniowe. Jeśli ω i ν są dwoma 1-formami określonymi na tym samym podzbiorku otwartym $U \subset M$ rozmaitości M to nie można zdefiniować mnożenia naiwnie wzorem $(\omega \cdot \nu)_p(v) = \omega_p(v) \cdot \nu_p(v)$ dla $p \in U$ i $v \in T_p M$ bo nie będzie to liniowe względem v . Właściwym pomysłem jest zdefiniować mnożenie oznaczane innym symbolem (nie mylącym się ze zwykłym mnożeniem) $\omega \wedge \nu$ [zwanym mnożeniem skośnym lub zewnętrznym] w taki sposób aby była to 2-forma w tym sensie, że w punkcie p określona by była na parach wektorów $(v_1, v_2) \in T_p M \times T_p M$,

$$(\omega \wedge \nu)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

To znaczy, że wartość $(\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2)$ musi zależeć od czterech liczb:

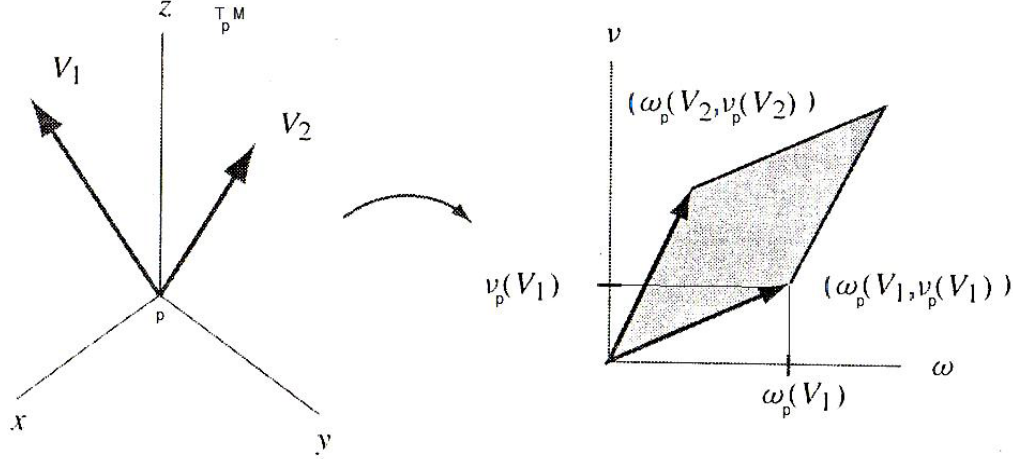
$$\omega_p(v_1), \nu_p(v_1), \omega_p(v_2), \nu_p(v_2).$$

Pierwsze dwie są związane z wektorem v_1 a ostatnie dwie z wektorem v_2 . Wektory o współrzędnych $[\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)]$ i $[\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)]$ traktujemy jak wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$ o osiach ω i ν . Są to obrazy wektorów v_1 i v_2 za pomocą odwzorowania liniowego

$$(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto [\omega_p(v), \nu_p(v)].$$

Rozważmy równoległobok $P \subset \mathbb{R}^2$ rozpięty przez te dwa wektory. Geometrycznie mówiąc, P jest obrazem równoległoboku w przestrzeni $T_p M$ rozpiętego przez wektory v_1 i v_2 za

pomocą odwzorowania $(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}^2 = O\omega\nu$.



Wiemy z analizy, że pole równoległoboku P jest wartością bezwzględną wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{vmatrix}.$$

Bardzo łatwo to pokazać za pomocą całki podwójnej i wzoru na zamianę zmiennych: rozważamy odwzorowanie które nam wyprostuje równoległobok P na kwadrat $K = [0, 1]^2$,

$$\begin{aligned} \Phi(r, s) &= r \cdot (\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)) + s \cdot (\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)) \\ &= (r \cdot \omega_p(v_1) + s \cdot \omega_p(v_2), r \cdot \nu_p(v_1) + s \cdot \nu_p(v_2)), \end{aligned}$$

$r, s \in [0, 1]$. $\Phi^{-1}[P] = [0, 1] \times [0, 1] = K$ i jacobian odwzorowania Φ jest równy właśnie wyznacznikowi powyższemu

$$J\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{vmatrix}.$$

Ze wzoru na zamianę zmiennych $\iint_P d\omega d\nu = \iint_K |J\Phi| dr ds = \left| \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix} \right|$.

$$|K| = \left| \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix} \right|.$$

Przyjmujemy jako definicję, że mnożenie 1-form $(\omega \wedge \nu)_p$ da 2-formę która na parze wektorów $(v_1, v_2) \in T_p M \times T_p M$ będzie równa znakowanemu polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $[\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)]$ i $[\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)]$, a dokładniej

$$(\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) = \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix},$$

czyli znakowanemu polu obrazu równoległoboku w $T_p M$ rozpiętego przez (v_1, v_2) za pomocą odwzorowania liniowego $(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v \mapsto [\omega_p(v), \nu_p(v)]$.

Prawa strona powyższego wzoru zależy tylko od wartości form w punkcie p , można zatem za pomocą powyższego wyznacznika określić iloczyn skośny $\omega_p \wedge \nu_p$, czyli

$$(\omega \wedge \nu)_p = \omega_p \wedge \nu_p.$$

Pierwsza ważna obserwacja to skośna symetria mnożenia

$$\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega$$

co wynika z własności wyznacznika: gdy przestawimy dwie sąsiednie kolumny to wyznacznik zmieni się na przeciwny. W szczególności

$$\omega \wedge \omega = 0$$

gdyż $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ skąd $2 \cdot \omega \wedge \omega = 0$ co implikuje $\omega \wedge \omega = 0$.

Stosując do bazowych 1-form dx^i względem mapy $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ mamy tożsamości

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^j &= -dx^j \wedge dx^i \quad \text{dla } i \neq j, \\ dx^i \wedge dx^i &= 0. \end{aligned} \tag{16.2.1}$$

Druga ważna obserwacja to liniowość względem pierwszej zmiennej v_1 oraz liniowość względem drugiej zmiennej v_2 , np. dla pierwszej zmiennej

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \nu)_p(v_1 + w_1, v_2) &= (\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) + (\omega \wedge \nu)_p(w_1, v_2), \\ (\omega \wedge \nu)_p(rv_1, v_2) &= r \cdot (\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) \end{aligned}$$

co także wynika z elementarnych własności wyznacznika. Łącznie mówimy, że odwzorowanie $(\omega \wedge \nu)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwu-liniowe (tzn. liniowe względem każdej zmiennej).

Powyższe własności pozwalają łatwo obliczać iloczyn skośny 1-form zapisanych w lokalnej bazie $dx^1, \dots, dx^n$ względem mapy $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, np. na powierzchni 2-wymiarowej M i mapy o współrzędnych zwyczajowo oznaczanych (x, y) mamy dla 1-form

$$\begin{aligned} \omega &= 2x \cdot dx - xy \cdot dy \\ \nu &= \sin x \cdot dx + \cos y \cdot dy \end{aligned}$$

ich skośny iloczyn

$$\begin{aligned} &\omega \wedge \nu \\ &= (2x \cdot dx - xy \cdot dy) \wedge (\sin x \cdot dx + \cos y \cdot dy) \\ &= 2x \cdot dx \wedge \sin x \cdot dx + 2x \cdot dx \wedge \cos y \cdot dy - xy \cdot dy \wedge \sin x \cdot dx - xy \cdot dy \wedge \cos y \cdot dy \\ &= 2x \cdot \sin x \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + 2x \cdot \cos y \cdot dx \wedge dy - xy \cdot \sin x \cdot \underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx \wedge dy} - xy \cdot \cos y \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\ &= 2x \cdot \cos y \cdot dx \wedge dy + xy \cdot \sin x \cdot dx \wedge dy \\ &= (2x \cdot \cos y + xy \cdot \sin x) \cdot dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy iloczyn skośny kilku 1-form $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ jako odwzorowanie które w danym punkcie p i układowi k -wektorów $(v_1, \dots, v_k) \in T_p M \times \dots \times T_p M$ przypisuje znakowane pole odpowiedniego k -równoległoscianu w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ (o osiach oznaczanych $\omega_1, \dots, \omega_k$) rozpiętego przez wektory wodzące punktów $[(\omega_{1p})(v_i), \dots, (\omega_{kp})(v_i)]$, czyli wyznacznik

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{bmatrix} \omega_{1p}(v_1) & \dots & \omega_{kp}(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{1p}(v_k) & \dots & \omega_{kp}(v_k) \end{bmatrix}.$$

Geometrycznie ten k -równoległoscian w $\mathbb{R}^k$ jest obrazem równoległoscianu w $T_p M$ rozpiętego przez $(v_1, \dots, v_k)$ za pomocą odwzorowania liniowego

$$(\omega_{1p}, \dots, \omega_{kp}) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^k, v \mapsto [\omega_{1p}(v), \dots, \omega_{kp}(v)].$$

Z własności wyznacznika obserwujemy własność: dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ liczb $(1, 2, \dots, k)$

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Wprost z definicji zarówno dla mnożenia skośnego dwu form jak i większej ich ilości wartość $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p$ w punkcie p zależy tylko od wartości tych form w punkcie p , czyli można przy pomocy tego wyznacznika zdefiniować iloczyn $\omega_{1p} \wedge \dots \wedge \omega_{kp}$ i wówczas mamy

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p = \omega_{1p} \wedge \dots \wedge \omega_{kp}.$$

Z własności wyznacznika wnosimy także, że iloczyn skośny k 1-form jest w każdym punkcie p odwzorowaniem

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \text{ razy} \rightarrow \mathbb{R}$$

k -liniowym (t.j. liniowym względem każdej z k zmiennych) oraz **skośnie symetrycznym** w sensie takim, że dla dowolnych wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ z przestrzeni stycznej $T_p M$ i permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ mamy równość

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_1, \dots, v_k).$$

Na rozmaitości M wymiaru n iloczyn 1-form $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ w ilości $k > n$ jest zawsze zerowy

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0, \quad k > \dim M$$

a to dlatego, że po rozkładzie każdej 1-formy ω_i w bazie $dx^1, \dots, dx^n$ i wykonaniu mnożenia każdy składnik będzie zawierał conajmniej dwa jednakowe czynniki dx^i i w konsekwencji będzie równy 0.

Lemat 16.2.1 Dla funkcji $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$ i lokalnego układu współrzędnych $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ na zbiorze otwartym $U \subset M$ mamy na zbiorze U

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_k}} \end{vmatrix} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
df_1 \wedge \dots \wedge df_k &= \sum_{j_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} dx^{j_k} \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_1}}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_k}}} dx^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\sigma_k}} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_1}}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_k}}} dx^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\sigma_k}} \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_k}} \end{vmatrix} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.
\end{aligned}$$

■

16.3 k-formy różniczkowe na rozmaitości

Definicja 16.3.1 *k-formą na rozmaitości M określona na otwartym podzbiorniku $U \subset M$ nazywamy przyporządkowanie ω każdemu punktowi $p \in U$ pewnego odwzorowania*

$$\omega_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

które jest *k-liniowe i skośnie symetryczne*, tzn. $\omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_p(v_1, \dots, v_k)$.

Zbiór wszystkich *k*-form różniczkowych na określonym podzbiorniku otwartym $U \subset M$ rozmaitości M oznaczamy przez $\Omega^k(U)$. W szczególności gdy $U = M$ mamy zbiór $\Omega^k(M)$. Formy różniczkowe można dodawać i mnożyć przez skalary (liczby) "punkt po punkcie", $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$, $(r \cdot \omega)_p = r \cdot \omega_p$, $p \in U$. Jest oczywiste, że otrzymamy w ten sposób przestrzeń wektorową $\Omega^k(U)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Formę różniczkową na U można także mnożyć przez funkcje rzeczywiste określoną na U , tzn. dla $f \in C^\infty(U)$ określamy formę $f\omega \in \Omega^k(U)$ punkt po punkcie $(f\omega)_p = f(p) \cdot \omega(p)$, $p \in U$.

Przykładami *k* form są iloczyny *k* sztuk 1-form różniczkowych $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, $\omega_i \in \Omega^1(M)$.

Drugim ważnym przykładem są formy otrzymane następująco: rozważamy rozmaitość *n*-wymiarową $M \subset \mathbb{R}^m$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^m$ i *k*-formę η w $\mathbb{R}^m$. Formy takie są generowane przez formy bazowe $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$ (gdzie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ jest standardowy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^m$). Ponieważ $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ to formę $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ można uważać także za formę na M określoną w kierunku wektorów stycznych do M tym samym przepisem co η , tzn. $\eta_p : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ obcinamy do $\eta_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ i otrzymamy formę na M . Np dla powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ mamy formy $\omega = \omega^1 dx \wedge dy + \omega^2 dx \wedge dz + \omega^3 dy \wedge dz$ które są 2-formami na $\mathbb{R}^3$ i po obcięciu ich w każdym punkcie $p \in S$ do wektorów stycznych do S są także formami na S .

Ponieważ permutacja która przestawia dwie liczby miejscami jest zawsze nieparzysta, to gdy w ciągu wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ są dwa jednakowe wektory wówczas $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$ gdyż stosując taką permutację otrzymujemy $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = -\omega_p(v_1, \dots, v_k)$ dając $2 \cdot \omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$ co daje równość $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Wynika stąd także, że gdy $k > \dim M$ to zawsze musi być $\omega_p = 0$. Istotnie, biorąc dowolny ciąg wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ i rozkładając każdy wektor v_j względem bazy $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ obserwujemy z k -liniowości ω_p , że $\omega_p(v_1, \dots, v_k)$ jest kombinacją liniową składników postaci $\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}|_p\right)$ i skoro $k > \dim M = n$ to w ciągu $(i_1, \dots, i_k)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ muszą zawsze być conajmniej dwie jednakowe, skąd składnik taki znika.

Niech $k \leq n = \dim M$. Biorąc w otoczeniu punktu p mapę $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ obserwujemy dzięki relacjom (16.2.1), że wartość k -formy ω w punkcie p jest kombinacją liniową bazowych 1-form

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k,$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \omega^{i_1 \dots i_k} \text{ są to funkcje rzeczywiste.}$$

-zwane współczynnikami formy ω

(rzeczywiście: pojawienie się dwu jednakowych form bazowych w takim iloczynie skutkuje zerowaniem się składnika i stąd nie może być go w bazie, zatem należy rozważyć tylko składniki w których $i_1, \dots, i_k$ są różne między sobą a następnie uporządkować je tak aby $i_1 < \dots < i_k$).

Mówimy, że k -forma ω jest klasy C^∞ jeżeli jej współczynniki $\omega^{i_1 \dots i_k}$ względem bazy dx^i są funkcjami klasy C^∞ .

Łatwo sobie wyobrazić mnożenie skośne dwu form ω i η , stopnia k i l odpowiednio, przez siebie zapisując w otoczeniu danego punktu każdą z nich we współrzędnych dx^i j/w

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \eta &= \sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \omega^{i_1 \dots i_k} \cdot \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

po czym porządkujemy wyrazy stosując zasady $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ dla $i \neq j$ i $dx^i \wedge dx^i = 0$. Np. dla form stopnia 1 i 2 na rozmaitości M wymiaru 3 w lokalnych

współrzędnych $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
& (xdx - 2yzdy + zy^2dz) \wedge (xydx \wedge dy - 3zdy \wedge dz) \\
= & \underbrace{x^2ydx \wedge dx \wedge dy}_{=0} - 3xzdx \wedge dy \wedge dz - 2xy^2zdy \wedge dx \wedge dy - 6yz^2dz \wedge dy \wedge dz + \\
& \underbrace{+xy^3zdz \wedge dx \wedge dy}_{=0} - \underbrace{3y^2z^2dz \wedge dy \wedge dz}_{=0} \\
= & -3xzdx \wedge dy \wedge dz + xy^3zdz \wedge dx \wedge dy = -3xzdx \wedge dy \wedge dz - xy^3zdx \wedge dz \wedge dy \\
= & -3xzdx \wedge dy \wedge dz + xy^3zdx \wedge dy \wedge dz \\
= & (-3xz + xy^3) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Ale czy taka definicja jest poprawna? Tzn. czy nie zależy od wyboru lokalnego układu współrzędnych? Rzeczywiście tak jest, bowiem można zdefiniować mnożenie skośne bez używania lokalnego układu współrzędnych i pokazać, że otrzymujemy to samo.

Definicja 16.3.2 *Iloczynem zewnętrznym [skośnie symetrycznym] form różniczkowych ω i η stopnia k i l odpowiednio na otwartym podzbiorniku $U \subset M$ rozmaitości M nazywamy formę różniczkową stopnia $k+l$ określoną na U następująco: dla dowolnego punktu $p \in U$ i wektorów $v_i \in T_p M$*

$$\begin{aligned}
& (\omega \wedge \eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
= & \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
= & \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma^{k+l} \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \\ \eta(k+1) < \dots < \sigma(k+l)}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}$$

(czyli z dokładnością do stałej jest to uskośnienie mnożenia $\omega_p(v_1, \dots, v_k) \cdot \eta_p(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$).

Twierdzenie 16.3.1 *Mnożenie skośne w/g powyższej definicji ma następujące własności:*

(1) *antyprzemienność*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

w szczególności gdy obie formy są stopnia nieparzystego to $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$, gdy conajmniej jedna jest stopnia parzystego to $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

(2) *dwuliniowość*

$$\begin{aligned}
(r \cdot \omega_1 + s \cdot \omega_2) \wedge \eta &= r \cdot \omega_1 \wedge \eta + s \cdot \omega_2 \wedge \eta, \\
\omega \wedge (r \cdot \eta_1 + s \cdot \eta_2) &= r \cdot \omega \wedge \eta_1 + s \cdot \omega \wedge \eta_2
\end{aligned}$$

(3) *łączność*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta),$$

przy czym zachodzi wzór

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta \wedge \theta(v_1, \dots, v_{k+l+s}) \\ = & \frac{1}{k!l!s!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l+s}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \cdot \theta(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}). \end{aligned}$$

Analogicznie dla większej ilości czynników, np dla 1-form $\omega^1, \dots, \omega^k$

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in \Sigma^k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega^1(v_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot \omega^k(v_{\sigma(k)}) \\ &= \det [\omega^i(v_j)] \end{aligned}$$

(co oznacza, że mnożenie w/g powyższej definicji oraz definicji pierwotnej dotyczącej 1-form pokrywa się).

Z własności tych wynika, że obie definicje mnożenia wyżej przedstawione dają w efekcie tę samą formę różniczkową.

Najważniejsze rzeczy które można robić z formami różniczkowymi to ich cofanie oraz różniczkowanie oraz dla form maksymalnego stopnia $n = \dim M$ - całkowanie. Omówimy je poniżej.

16.4 Cofanie form różniczkowych

Niech $F : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem klasy C^∞ między rozmaitościami M i N . Dla formy różniczkowej $\omega \in \Omega^\infty(N)$ określimy jej cofnięcie $F^*\omega \in \Omega^k(M)$.

Cofanie 0 form.

Cofanie 0 form czyli funkcji $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ określamy następująco:

$$\begin{aligned} F^* & : \Omega^\infty(N) \rightarrow \Omega^\infty(M), \\ F^*(f) &= f \circ F. \end{aligned}$$

Odwzorowanie to jest oczywiście liniowe $F^*(rf + sg) = r \cdot (f \circ F) + s \cdot (g \circ F) = r \cdot F^*(f) + s \cdot F^*(g)$.

Cofanie 1-form różniczkowych.

Przypomnijmy różniczkę odwzorowania $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, zwanego też pchaniem wektorów.

Definicja 16.4.1 Niech $\omega \in \Omega^1(N)$. Określamy cofnięcie formy ω za pomocą odwzorowania F , $F^*\omega$, wzorem

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}((T_p F)(v)), \quad v \in T_p M.$$

Lemat 16.4.1 Własności operacji cofania $F^* : \Omega^\infty(N) \rightarrow \Omega^\infty(M)$ 1-form.

- (1) F^* jest liniowa, t.j. $F^*(\omega + \omega') = F^*(\omega) + F^*(\omega')$, $F^*(r \cdot \omega) = r \cdot F^*(\omega)$, $r \in \mathbb{R}$,
- (2) $F^*(df) = d(f \circ F)$ dla $f \in C^\infty(N)$,
- (3) $F^*(f \cdot \omega) = F^*(f) \cdot F^*\omega$.

Dowód. (1) jasne, formalny dowód zostawiam jako ćwiczenie.

(2) dla przykładu

$$(F^*(df))_p(v) = (df)_{F(p)}((T_p F)(v)) = (T_{F(p)} f)((T_p F)(v)) = T_p(f \circ F)(v).$$

(3)

$$\begin{aligned} (F^*(f \cdot \omega))_p(v) &= (f \cdot \omega)_{F(p)}((T_p F)(v)) = (f(F(p)) \cdot \omega_{F(p)})((T_p F)(v)) \\ &= f(F(p)) \cdot \omega_{F(p)}((T_p F)(v)) = f(F(p)) \cdot (F^*\omega)_p(v) \\ &= (f \circ F)(p) \cdot (F^*\omega)_p(v) = (F^*(f) \cdot F^*\omega)_p(v). \end{aligned}$$

■

Wniosek 16.4.1 Niech $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ oznaczają lokalne współrzędne na rozmaitości M w otoczeniu punktu p oraz $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ lokalne współrzędne na rozmaitości N w otoczeniu punktu $F(p)$. Dla współrzędnych F_j odwzorowania F mapie $\mathbf{y}$, $F^j = y^j \circ F$ oraz mamy

$$F^*(dy^j) = d(y^j \circ F) = d(F^j) = \sum_i \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \cdot dx^i.$$

Przypomnijmy, odwzorowanie liniowe $f : V \rightarrow W$ między przestrzeniami wektorowymi V i W wyznacza odwzorowanie tzw. odwzorowanie dualne $f^* : W^* \rightarrow V^*$ wzorem

$$f^*(\omega)(v) = \omega(f(v)), \quad \omega \in W^*, \quad v \in V.$$

Widzimy, że dla 1-formy $\omega \in \Omega^1(N)$ i odwzorowania liniowego $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ oraz odwzorowania dualnego $(F_{*p})^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ cofanie 1-form dla punktu p określone jest przy użyciu odwzorowania dualnego $(F_{*p})^*$

$$(F^*(\omega))_p = \omega_{F(p)}((T_p F)(v)) = (T_p F)^*(\omega_{F(p)})(v).$$

Cofanie k form różniczkowych.

Definicja 16.4.2 Niech $\omega \in \Omega^k(N)$. Określamy $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ wzorem

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}((T_p F)(v_1), \dots, (T_p F)(v_k)).$$

Lemat 16.4.2 Własności operacji cofania $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ k -form różniczkowych.

- (1) F^* jest liniowa,
- (2) $F^*(f \cdot \omega) = F^*(f) \cdot F^*\omega$,
- (3) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$.

Dowód. (1) i (2) dowodzi się analogicznie jak dla 1-form.

(3) Dla $\omega, \omega' \in \Omega(N)$, $p \in M$ i wektorów $v_i \in T_p M$,

$$\begin{aligned}
& (F^*(\omega \wedge \eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
= & (\omega \wedge \eta)_p((T_p F)(v_1), \dots, (T_p F)(v_{k+l})) \\
= & \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_{F(p)}((T_p F)(v_{\sigma(1)}), \dots, (T_p F)(v_{\sigma(k)})) \cdot \eta_{F(p)}((T_p F)(v_{\sigma(k+1)}), \dots, (T_p F)(v_{\sigma(k+l)})) \\
= & \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (F^*\omega)_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot (F^*\eta)_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
= & (F^*\omega)_p \wedge (F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
= & (F^*\omega \wedge F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

■

Wniosek 16.4.2 Niech $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m)$ oznaczają lokalne współrzędne na rozmaitości M w otoczeniu punktu p oraz $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ lokalne współrzędne na rozmaitości N w otoczeniu punktu $F(p)$. Wtedy z Lematu (16.2.1)

$$\begin{aligned}
F^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d(F^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^{i_k}) \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial F^{i_1}}{\partial y^{j_1}} & \dots & \frac{\partial F^{i_k}}{\partial y^{j_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^{i_1}}{\partial y^{j_k}} & \dots & \frac{\partial F^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \end{vmatrix} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}.
\end{aligned}$$

Współczynnik przy $dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$ interpretujemy geometrycznie następująco: rozważamy wektory $\left[\frac{\partial F^1}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^{j_1}}\right], \dots, \left[\frac{\partial F^1}{\partial y^{j_k}}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^{j_k}}\right] \in \mathbb{R}^n$, następnie rzutujemy je na podprzestrzeń o osiach $(i_1, \dots, i_k)$ i obliczamy znakowaną k -wymiarową objętość równoległocianu rozpiętego przez tak otrzymane wektory.

W szczególności, gdy $n = m$ oraz $k = n$ to

$$F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

gdzie JF jest (w danym punkcie) macierzą Jacobiego odwzorowania F w mapach $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$, geometrycznie współczynnik $\det(JF)_p$ to znakowana n -wymiarowa objętość równoległocianu w $\mathbb{R}^n$ rozpiętego przez wektory pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial y^i} = \left[\frac{\partial F^1}{\partial y^i}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^i}\right]$, $i = 1, \dots, n$. Nieco ogólniej co będzie nam zaraz potrzebne

$$F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = F^*(f) \cdot F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = f \circ F \cdot \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

16.5 Hiperpowierzchnie zorientowane i całkowanie form różniczkowych maksymalnego stopnia

Całkowanie w końcowym etapie musi się sprowadzić do znanej operacji całkowania (w sensie Riemanna lub ogólniejszym Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$), tzn. do liczenia całki z funkcji n -zmiennych $f(x^1, \dots, x^n)$ po zbiorze mierzalnym $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Wyrażenie pod całką wygląda znajomo, podobnie do formy różniczkowej stopnia n która we współrzędnych kartezjańskich jest postaci

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Jeśli akurat różniczki zmiennych występują w naszej n -formie w innej kolejności to można je poprzerzawiać wykorzystując własności (16.2.1) skośnego mnożenia $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, $dx^i \wedge dx^i = 0$.

Dlatego jest całkiem naturalne po prostu przyjąć, że

$$\int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{\text{definicja}}{=} \int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

o ile całka Riemanna lub Lebesgue'a z funkcji $f(x^1, \dots, x^n)$ istnieje. Przy innym porządku zmiennych w iloczynie $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ stosujemy warunki skośności, np.

$$\int_A f(x, y) dy \wedge dx = - \int_A f(x, y) dx \wedge dy = - \int_A f(x, y) dx dy.$$

Jedną z najważniejszych własności (ułatwiających obliczanie całek po "krzywych" obszarach) jest twierdzenie o zamianie zmiennych, bowiem wybierając stosownie zmianę zmiennych można "wyprostować" obszar do tzw. normalnego obszaru lub nawet czasem do prostopadłościanu i w końcu zastosować Twierdzenie Fubini'ego czy nawet od razu sprowadzić liczenie do całek iterowanych po kolejnych zmiennych. Zasada stosowania zamiany zmiennych do dyfeomorfizmu $F : D' \rightarrow D$ między otwartymi zbiorami D i D' w $\mathbb{R}^n$ polega na wzorze

$$\int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{D'} f(F(y^1, \dots, y^n)) \cdot |JF(y^1, \dots, y^n)| dy^1 \dots dy^n$$

(zakładając o funkcji f całkowalność). Aby w powyższym wzorze nie był potrzebny moduł Jacobianu to musimy założyć że zmiana zmiennych zachowuje orientację, tzn. $Jf(y^1, \dots, y^n) > 0$ dla $(y^1, \dots, y^n) \in D'$.

Skonfrontujmy teraz ten ostatni wzór ze wzorem

$$F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = F^*(f) \cdot F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = f \circ F \cdot \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

otrzymanym niedawno i z definicją całki z n -formy. Dla dyfeomorfizmu F zachowującego orientację mamy zatem wzór

$$\int_D f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{D'} F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n), \quad \text{gdy } \det(JF) > 0$$

Jeżeli dyfeomorfizm F zmienia orientację (tzn. $\det(JF) < 0$) wówczas całki te będą różniły się znakiem

$$\int_D f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = - \int_{D'} F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n), \quad \text{gdy } \det(JF) < 0.$$

Oznaczając $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ - jest to postać dowolnej n -formy na $\mathbb{R}^n$ - otrzymujemy

$$\int_D \omega = \pm \int_{D'} F^* \omega, \quad (16.5.1)$$

znak zależy od tego, czy dyfeomorfizm F zachowuje czy zmienia orientację (tzn. czy $\det(JF) > 0$ czy $\det(JF) < 0$).

Wzory te podpowiadają nam metodę całkowania n -form ω klasy C^∞ na hiperpowierzchniach n -wymiarowych M . Najpierw założymy, że "cała" forma siedzi w dziedzinie $U \subset M$ pewnej mapy $\mathbf{x}$, tzn. dokładniej, że tzw. nośnik formy ω czyli domknięcie zbioru tych punktów, w których forma jest niezerowa jest zawarty w U ; nośnik ω oznaczamy symbolem $\text{supp } \omega$, zatem

$$\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M, \omega_p \neq 0\}} \subset U.$$

Forma ω na U jest postaci $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Należy teraz wziąć parametryzację $\varphi = \mathbf{x}^{-1} : \mathbb{R}^n \supset U' \rightarrow U \subset M$, odwrotną do mapy $\mathbf{x}$ i cofnąć naszą formę do przestrzeni parametrów $\varphi^*(\omega)$ a tak otrzymaną n -formę na $\mathbb{R}^n$ daje się już klasycznie scałkować $\int_{U'} \varphi^*(\omega)$ jak było wyżej opisane. Pytanie: a jak ta całka $\int_{U'} \varphi^*(\omega)$ zależy od wyboru parametryzacji? Otóż, jeżeli wziąć drugą parametryzację $\psi : \mathbb{R}^n \supset U'' \rightarrow U \subset M$ tego samego otwartego podzbioru $U \subset M$, to dzięki wyżej pisanemu wzorowi na zmianę zmiennych (stosowanego dla dyfeomorfizmu przejścia $F = \psi^{-1} \circ \varphi : U' \rightarrow U''$) jest jasne, że jeśli funkcja przejścia F ma jakobian dodatni, to wartości całek będą takie same. Jeśli natomiast wziąć ψ taką, że funkcja przejścia ma jakobian ujemny to wartości całek będą przeciwne (na podstawie (16.5.1)):

$$\int_{U''} \psi^*(\omega) = \pm \int_{U'} F^*(\psi^*(\omega)) = \pm \int_{U'} (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\psi^*(\omega)) = \pm \int_{U'} \varphi^*((\psi^{-1})^*(\psi^*(\omega))) = \pm \int_{U'} \varphi^*(\omega).$$

Co w takim razie zrobić aby definicja była poprawna? Aby określić całkę z formy ω określonej na hiperpowierzchni M przede wszystkim musimy mieć możliwość wyboru atlasu parametryzacji takich, aby funkcje przejścia miały jakobiany dodatnie. A to oznacza, że można całkować formy tylko po **hiperpowierzchniach zorientowanych** czyli takich, dla których taki atlas jest zadany (nie każda hiperpowierzchnia dopuszcza taki atlas, np. wstęga Möbiusa nie dopuszcza takiego atlasu, nie jest orientowalna).

Definicja 16.5.1 *Hiperpowierzchnię M nazywamy orientowalną jeżeli dopuszcza atlas dla którego funkcje przejścia mają dodatni Jakobian.*

Zauważmy, że dana parametryzacja φ otwartego podzbioru $U \subset M$ orientuje każdą przestrzeń styczną $T_p M$ dla $p \in U$ za pomocą bazy kanonicznej wyrażonej przy pomocy mapy $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right)$ i że dwie parametryzacje na tym samym zbiorze U i zgodne w tym sensie, że funkcja przejścia ma dodatni Jakobian jednakowo orientują przestrzenie styczne $T_p M$. Zatem orientację M można zadać równoważnie poprzez orientację każdej przestrzeni stycznej $T_p M$ ale tak, żeby orientacja "gładko" zależała od punktu [w tym sensie, aby w otoczeniu U dowolnego punktu istniała mapa która orientuje przestrzeń styczną tak samo jak zadana orientacja].

Uwaga 16.5.1 Dodajmy jeszcze, że gdy $M \subset \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią zorientowaną, to na M istnieje pole wektorowe ciągle wszędzie niezerowe N i prostopadłe do M . Mianowicie, pole takie określone jest przez wykorzystanie iloczynu wektorowego: na dziedzinie mapy $\mathbf{x} = (x, y)$ zgodnej zadaną orientacją pole N definiujemy wzorem

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \right\|}.$$

I odwrotnie, zadanie takiego pola orientuje powierzchnie, bo wybieramy atlas map takich, które na swojej dziedzinie orientują przestrzeń styczną zgodnie z zadaną orientacją i łatwo zobaczyć, że dwie takie mapy mają funkcje przejścia o dodatnim Jakobianie. Daje się to uogólnić na przypadek hiperpowierzchni wymiaru $n - 1$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ stosując iloczyn wektorowy $n - 1$ wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Jest jeszcze jeden równoważny sposób orientowania n -wym. hiperpowierzchni: mianowicie M jest orientowalna gdy istnieje na M forma różniczkowa ω stopnia n niezerowa w każdym punkcie.

Założmy zatem, że nasza hiperpowierzchnia M jest zorientowana. Pojawia się drugi problem: jeżeli forma ω nie jest "skupiona" w jednej mapie, tzn. jej nośnik nie siedzi w jednej mapie. Co wtedy zrobić? Otóż, w tym celu trzeba by umieć rozłożyć formę ω na sumę form

$$\sum_{\alpha} \omega_{\alpha}$$

takich aby każdy składnik miał mały nośnik, tzn. zawarty w jednej mapie. Do tego celu służy narzędzie zwane rozkładem jedynki.

Rozważamy otwarte pokrycie $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$ hiperpowierzchni M dziedzinami map (parametryzacji φ_{α}). Udowadnia się (co pominiemy) istnienie funkcji klasy C^{∞} na hiperpowierzchni M

$$\{\rho_{\alpha}\}$$

takich, że

- (a) nośnik funkcji ρ_{α} jest zawarty w U_{α} , $\text{supp } \rho_{\alpha} \subset U_{\alpha}$,
- (b) rodzina nośników $\{\text{supp } \rho_{\alpha}\}$ jest lokalnie skończona w tym sensie, że każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie otwarte V które przecina się tylko ze skończoną ilością nośników $\text{supp } \rho_{\alpha}$ (dzięki czemu suma - może być nieskończona - $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$ ma sens).
- (c) $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = 1$

Dzięki własności (c) rodzina $\{\rho_{\alpha}\}$ nazywa się **rozkładem jedności** (podporządkowanym pokryciu $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$).

Dowolną n -formę ω na M możemy przedstawić w postaci

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) \cdot \omega = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} \cdot \omega) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}, \quad \text{gdzie } \omega_{\alpha} = \rho_{\alpha} \cdot \omega,$$

i oczywiście nośniki form ω_{α} są wtedy małe, zawarte w dziedzinach U_{α} parametryzacji φ_{α} , $\text{supp } \rho_{\alpha} \subset U_{\alpha}$. Definiujemy (pod warunkiem zwartości nośnika ω - np. gdy sama rozmaitość jest zwarta - co zapewnia istnienie poniższej całki)

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}[U_{\alpha}]} (\varphi_{\alpha})^* (\rho_{\alpha} \cdot \omega).$$

Dowodzi się, że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od pomocniczych wyborów jak np. atlasu zgodnie orientującego M zadaną orientacją, oraz od rozkładu jedności.

Będzie przydatne w końcu wykładu twierdzenie:

Twierdzenie 16.5.1 *Dla n -formy ω nigdzie niezerowej na rozmaitości zorientowanej zwartej M*

$$\int_M \omega \neq 0.$$

Dowód. Ustalmy pokrycie mapami zgodnymi z orientacją zadaną $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ i zapiszmy formę ω w mapach

$$\omega|_{U_\alpha} = f^\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Z założenia f^α jest niezerowa. Dla ustalenia uwagi, załóżmy że w dla jakiejś mapy $\mathbf{x}_\alpha$ funkcja $f^\alpha > 0$. Pokażemy, że w każdej innej mapie $\mathbf{x}_\beta$ funkcja $f^\beta > 0$. Najpierw rozważmy drugą mapę o dziedzinie U_β przecinającą U_α , $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Niech $\omega|_{U_\beta} = f^\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n$. Przedstawiamy różniczkę dx_β^i za pomocą różniczek dx_α^k ,

$$dx_\beta^i = \sum_k a_k^i dx_\alpha^k.$$

Obliczamy

$$a_k^i = dx_\beta^i \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \right) = \frac{\partial (x_\beta^i)}{\partial x_\alpha^k}.$$

Macierz

$$a = [a_k^i] = \left[\frac{\partial (x_\beta^i)}{\partial x_\alpha^k} \right]$$

ma dodatni wyznacznik bo mapy są zgodne oraz

$$\begin{aligned} f^\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n &= \omega|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ &= f^\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n \\ &= f^\beta \sum_{k_1} a_{k_1}^1 dx_\alpha^{k_1} \wedge \dots \wedge \sum_{k_n} a_{k_n}^n dx_\alpha^{k_n} \\ &= f^\beta \det a \cdot dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n \end{aligned}$$

skąd

$$f^\alpha = f^\beta \det a$$

co implikuje, że obie funkcje f^α i f^β są tego samego znaku. Biorąc dowolnie punkt $x \in U_\alpha$ oraz $y \in M$ i łącząc x z y dowolnym łukiem ciągłym można (ze zwartości łuku) znaleźć skończony "łańcuch" map $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ taki, że dwa sąsiednie mają niepustą część wspólną dziedzin. Z powyższego wywodu kolejne dwie funkcje f^i, f^{i+1} są tego samego znaku, więc w szczególności ta ostatnia jest tego samego znaku co pierwsza. W sumie $\int_M \omega = \sum_a \int_{\varphi_\alpha[U_\alpha]} (\varphi_\alpha)^* (\rho_\alpha \cdot \omega)$ definiującej całkę, każdy składnik całkuje funkcję $f^\alpha \circ \varphi_\alpha$ ($\varphi_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^{-1}$) nieujemną i gdzieś niezerową, skąd musi być $\int_M \omega > 0$. ■

Uwaga 16.5.2 (Na zapas) Po wprowadzeniu wzoru Stokesa i różniczkowania form z warunku $\int_M \omega \neq 0$ wynikać będzie, że forma ω nie jest dokładna, tzn. nie jest różniczką żadnej $(n-1)$ -formy. Istotnie, gdyby $\omega = d\eta$ to skoro brzeg rozmaitości M jest pusty mamy ze wzoru Stokesa

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0$$

wbrew założeniu. Zatem napewno będzie $H^n(M) \neq 0$ ($H^n(M)$ to n -ta grupa kohomologii rozmaitości M).

Zastosowania całkowania form w fizyce często polegają na stowarzyszeniu z polem wektorowym odpowiedniej formy różniczkowej.

Przykład 16.5.1 Rozważmy na $\mathbb{R}^n$ pole wektorowe $\mathbf{F}$ o współrzędnych $\mathbf{F} = [P_1, \dots, P_n]$. Wiążemy z nim 1-formę różniczkową

$$\eta = P_1 dx^1 + \dots + P_n dx^n.$$

Jeśli w dziedzinie pola jest określony pewien łuk $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, (zadany jest dzięki temu na obrazie łuku - czyli krzywej - kierunek obiegu parametru, a więc zadana jest orientacja tej krzywej) to można liczyć całkę

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \eta &: = \int_a^b \mathbf{c}^*(\eta) = \int_a^b \mathbf{c}^*(P_1 dx^1 + \dots + P_n dx^n) = \\ &= \int_a^b P_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx^1}{dt} + \dots + P_n(\mathbf{c}(t)) \frac{dx^n}{dt} \\ &= \int_a^b [P_1, \dots, P_n] \bullet \left[\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right] \quad / \text{mamy tu iloczyn skalarny} \end{aligned}$$

i widzimy, że jest to całka skierowana wzdłuż łuku $\mathbf{c}$ z pola wektorowego $\mathbf{F}$ (znaną z semetru III). Całkę oznacza się także $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ i jest to praca pola wektorowego $\mathbf{F}$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\mathbf{c}$. Z ostatniego wzoru widzimy także, że pole $\mathbf{F}$ prostopadłe do drogi żadnej pracy nie wykona.

Przykład 16.5.2 Jeśli $S \subset \mathbb{R}^3$ jest 2-wymiarową **zorientowaną** powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ jest polem wektorowym którego dziedzina zawiera powierzchnię S to z polem wektorowym $\mathbf{F}$ wiążemy 2 formę $\eta = Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$. Całkę $\int_S \eta$ oznaczamy także $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ i nazywamy **strumieniem pola $\mathbf{F}$ przez powierzchnie zorientowaną S**

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_S Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy.$$

Jeśli powierzchnia zorientowana S określona jest poprzez jedną parametryzację $\varphi : U \rightarrow S$ zgodną z orientacją (nie trzeba wtedy rozkładu jedności) wówczas mamy

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &: = \int_S Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy = \\ &= \int_U \varphi^*(Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy) = \dots \end{aligned}$$

Po nietrudnych standardowych obliczeniach dostajemy znany z III semestru wzór (nie trzeba go pamiętać - wystarczy "na palcach" cofać naszą formę przez φ !)

$$\begin{aligned} &= \iint_U \left(P(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - Q(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + R(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv \\ &= \iint_U \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \bullet \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) dudv, \quad \text{/mamy tu iloczyn skalarny} \end{aligned}$$

Z ostatniego wzoru także widzimy, że pole $\mathbf{F}$ prostopadłe do $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$ czyli styczne do powierzchni daje zerowy strumień.

16.6 Różniczkowanie form różniczkowych

Definicja 16.6.1 Różniczkę 0-formy na rozmaitości M , czyli funkcji f określamy jako zwykłą różniczkę df . Jest to 1-forma na M . Różniczkę k formy $\omega \in \Omega^k(M)$, $k \geq 1$, określamy następująco: różniczką jest $k+1$ forma oznaczana przez $d\omega$ taka, że gdy przedstawimy formę ω lokalnie w jakimś układzie współrzędnych $(U, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\omega|_U = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, to na dziedzinie U tej mapy zachodzi

$$(d\omega)|_U = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (16.6.1)$$

Należy pokazać poprawność definicji, tzn. niezależność $(d\omega)|_U$ od wyboru mapy na U . Dowód przebiega następująco: najpierw pokazujemy własności operatora

$$d_x : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$$

określonego dla ustalonej mapy x o dziedzinie U wzorem j/w.

Twierdzenie 16.6.1 1. d_x jest liniowy,

$$2. d_x(f) = df,$$

$$3. d_x(\omega \wedge \eta) = d_x\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_x\eta, \text{ dla formy } \omega \text{ stopnia } k \text{ i dowolnej formy } \eta,$$

$$4. d_x(d_x f) = 0.$$

Następnie pokazujemy, że jest tylko **jeden** operator $\tilde{d} : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ spełniający takie 4 postulaty. Stąd d_x nie może zależeć od mapy x , dla map $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ musi bowiem być $d_{\mathbf{x}} = \tilde{d} = d_{\mathbf{y}}$.

Jak to pokazujemy?

a) weźmy dowolne funkcje $f_1, \dots, f_k$, wówczas $\tilde{d}(df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$. Istotnie, pokażemy to indukcją względem k . Dla $k=1$

$$\tilde{d}(df_1) \stackrel{(2)}{=} \tilde{d}(\tilde{d}f_1) \stackrel{(4)}{=} 0.$$

Założmy, że równość zachodzi dla pewnej liczby k , pokażemy że zachodzi dla liczby $k+1$

$$\tilde{d}(df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge df_{k+1}) \stackrel{(3)}{=} \underbrace{\tilde{d}(df_1)}_{=0 \text{ dla } k=1} \wedge (df_2 \wedge \dots \wedge df_{k+1}) - df_1 \wedge \underbrace{\tilde{d}(df_2 \wedge \dots \wedge df_{k+1})}_{=0 \text{ z zał. ind dla } k} = 0$$

d) zapiszmy dowolną k formę w jakimkolwiek lokalnym układzie współrzędnych $\mathbf{x}$ na U w postaci $\omega = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Pokazujemy (stosując 1), 3), 2) i a), że

$$\tilde{d}(\omega) = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (16.6.2)$$

Prawa strona zależy zatem tylko od różniczek funkcji. Zatem gdy $\tilde{d}$ i $\bar{d}$ są dwoma operatorami spełniającymi te 4 postulaty to $\tilde{d}(\omega) = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \bar{d}(\omega)$ co dowodzi jednoznaczności operacji spełniającej te 4 postulaty. Pokażemy wzór (16.6.2) korzystając tylko z aksjomatów 1-4 oraz wykazanych własności a), b) i c).

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\omega) &= \tilde{d}\left(\sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \quad /z \text{ 1. czyli z liniowości} \\ &= \sum \tilde{d}\left(\omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \quad /z \text{ 3 i 2} \\ &= \sum d\left(\omega^{i_1, \dots, i_k}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \underbrace{\omega^{i_1, \dots, i_k} \cdot \tilde{d}\left(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right)}_{=0 \quad z \text{ a)}} \\ &= \sum d\left(\omega^{i_1, \dots, i_k}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Oczywiście, operator globalny $d = d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ określony lokalnym wzorem (16.6.1) spełnia te same 4 postulaty jak operator dla dziedziny mapy. Pokażemy, że postulaty 1), 2), 3), 4) jednoznacznie charakteryzują globalny operator d_M . W tym celu pokażemy najpierw lemat o **lokalności** operatora d_M spełniającego 1), 3).

Lemat 16.6.1 *Operator d_M spełniający 2 powyższe globalne postulaty 1), 3)*

1) d_M jest liniowy,

3) $d_M(\omega \wedge \eta) = d_M\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_M\eta$,

jest lokalny, tzn. gdy $\omega, \omega' \in \Omega(M)$ są dwiema formami na M równymi na podzbiórze otwartym $B \subset M$, $\omega|_B = \omega'|_B$. to $(d_M\omega)|_B = (d_M\omega')|_B$.

Dowód. Weźmy dowolnie $x \in B$ oraz funkcję ρ rozdzielającą x w B , tzn. taką, że $\text{supp } \rho \subset B$ oraz $\rho|_V = 1$ dla pewnego otwartego podzbioru $V \subset B$ zawierającego x , wówczas

$$\rho(\omega - \omega') = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{1)}{=} d_M(0) &= d_M(\rho(\omega - \omega')) \stackrel{3)}{=} d_M(\rho) \wedge (\omega - \omega') + \rho \cdot d_M(\omega - \omega') \\ &\stackrel{1)}{=} d_M(\rho) \wedge (\omega - \omega') + \rho \cdot (d_M\omega - d_M\omega'). \end{aligned}$$

Stąd na otoczeniu V punktu x mamy

$$\begin{aligned} 0 &= (d_M(\rho))|_V \wedge (\omega - \omega')|_V + \rho|_V \cdot ((d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V) \\ &= (d_M(\rho))|_V \wedge 0 + 1 \cdot ((d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V) \\ &= (d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V \end{aligned}$$

skąd

$$(d_M \omega)|_V = (d_M \omega')|_V.$$

Z dowolności wyboru punktu $x \in B$ wnosimy, że

$$(d_M \omega)|_B = (d_M \omega')|_B.$$

■

Twierdzenie 16.6.2 Dla dowolnej parazwartej rozmaitości Hausdorffa M istnieje dokładnie jeden operator globalny $d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ spełniający postulaty 1), 2), 3), 4)

Lemat 16.6.2 1) d_M jest liniowy,

$$2) d_M f = df,$$

$$3) d_M(\omega \wedge \eta) = d_M \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_M \eta,$$

$$4) d_M(d_M f) = 0.$$

Jest on określony lokalnym wzorem (16.6.1).

Dowód. Istnienie. Operator globalny d określony lokalnym wzorem (16.6.1) jak wiemy spełnia te postulaty, więc operator d_M spełniający 1), 2), 3), 4) istnieje.

Jednoznaczność. Tak samo jak wyżej pokazujemy, a) że $d_M(df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$ dla funkcji f_i na M . Niech d', d'' będą dwoma globalnymi operatorami spełniającymi 1), 2), 3), 4). Lemat zaświadcza, że każdy z nich jest lokalny. Weźmy więc mapę $\mathbf{x}$ na dziedzinie U i przedstawmy formę $\omega_U = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Ustalmy $x \in U$ i wybierzmy funkcję ρ rozdzielającą x w U , $\rho|_B = 1$, dla $x \in B \subset U$. Wtedy $\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}$, $\rho \cdot x^{i_1}$ są funkcjami gładkimi na całej rozmaitości M oraz $\omega|_B = (\sum (\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}))|_B$. Z lokalności operatorów d', d'' mamy

$$\begin{aligned} (d'\omega)|_B &= d' \left(\sum (\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}) \right)|_B \\ &= \left(\sum d(\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) \wedge d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}) \right)_B \\ &= (d''\omega)|_B. \end{aligned}$$

Z dowolności x wnosimy o równości $d'\omega = d''\omega$. Z powyższych równości skoro $\rho|_B = 1$ to

$$(d_M \omega)|_B = \left(\sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right)|_B$$

i z dowolności x wnosimy o równości $(d_M \omega)|_U = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. ■

Przykład 16.6.1 Obliczyć $d(x^2 y dx + x dy)$.

Twierdzenie 16.6.3 Operator cofania form komutuje z różniczkowaniem form, tzn. gdy $F : M \rightarrow N$ jest odwzorowaniem między hiperpowierzchniami wówczas dla dowolnej formy ω na rozmaitości N zachodzi wzór

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Dowód. Dla formy stopnia 0 było napisane we wcześniejszym Lemacie, $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi) = d(\Phi^*f)$. Załóżmy indukcyjnie, że przemienność cofania z różniczkowaniem zachodzi dla form pewnego stopnia $k \geq 0$. Pokażemy, że zachodzi dla form stopnia $k+1$. Z liniowości tych operatorów wynika, że wystarczy sprawdzić lokalnie dla form postaci $f \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}$ gdzie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ jest lokalnym systemem współrzędnych (czyli mapą) na podzbiórze otwartym $U \subset N$. Forma taka ma postać $\omega \wedge dx^{i_{k+1}}$ dla pewnej formy $\omega = f \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ stopnia k dla której zachodzi założenie indukcyjne.

$$\begin{aligned} d(F^*(\omega \wedge dx^{i_{k+1}})) &= d(F^*\omega \wedge d(F^{i_{k+1}})) \quad / F^{i_{k+1}} = x^{i_{k+1}} \circ F \quad \text{na zbiorze } F^{-1}[U] \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) + (-1)^k F^*\omega \wedge dd(F^{i_{k+1}}) \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) + 0 \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^*(d(\omega \wedge dx^{i_{k+1}})) &= F^*(d\omega \wedge dx^{i_{k+1}} + (-1)^k \omega \wedge ddx^{i_{k+1}}) \\ &= F^*(d\omega \wedge dx^{i_{k+1}} + 0) = F^*(d\omega) \wedge F^*(dx^{i_{k+1}}) \\ &\stackrel{\text{zał. ind}}{=} d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}). \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 16.6.4 *Globalny wzór na różniczkę $d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$. Niech $\omega \in \Omega^k(M)$ i niech X_i będą polami wektorowymi na M .*

$$\begin{aligned} (d_M \omega)(X_0, \dots, X_k) \\ = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{i} \dots X_k)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_k) \end{aligned}$$

(daszেকm oznacza opuszczenie wyrazu).

Ćwiczenie 16.6.1 Pokazać na przykładzie $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega = x^2 y dx + x dy$ oraz zmiany zmiennych

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ F(r, \varphi) &= \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

zachodzenie przemienności cofania z różniczkowaniem.

16.7 Kompleks de Rhama, grupy kohomologii, charakterystyka Eulera-Poincarégo i genus powierzchni

Kompleksem de Rhama hiperpowierzchni M nazywamy ciąg przestrzeni form różniczkowych $\Omega^k(M)$ i operatorów d^k różniczkowania form

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d^n=0} 0.$$

W kompleksie tym złożenie dwu sąsiednich odwzorowań dd daje 0, $dd = 0$. Stąd $\text{Im } d^{k-1} \subset \ker d^k$. Iloraz

$$H_{dR}^k(M) := \ker d^k / \text{Im } d^{k-1}$$

jest przestrzenią wektorową zwaną k -tą **grupą kohomologii de Rhama** hiperpowierzchni M . Każdy element przestrzeni $H_{dR}^k(M)$ nazywa się klasą kohomologii.

Definicja 16.7.1 *Forma różniczkowa ω nazywa się zamknięta gdy $d\omega = 0$, tzn. gdy $\omega \in \ker d$.*

$$\ker d = \{\omega \in \Omega(M); d\omega = 0\} =: Z(M).$$

Forma różniczkowa ω nazywa się dokładna (lub zupełna) gdy jest różniczką pewnej formy, t.j. gdy $\omega = d\eta$ dla pewnej formy η , tzn. gdy $\omega \in \text{Im } d$.

$$\text{Im } d = \{\eta; \exists \omega \eta = d\omega\} =: B(M).$$

Klasę kohomologii formy zamkniętej ω oznaczamy $[\omega]$. Klasa ta jest zerowa wtedy i tylko wtedy gdy forma ω jest dokładna.

$H^k(M) = 0$ gdddy gdy każda k -forma zamknięta jest dokładna. Np. Lemat Poincarégo mówi, że na otwartym obszarze gwiazdistym $U \subset \mathbb{R}^n$ każda k -forma ($k \geq 1$) zamknięta jest dokładna, a tym samym $H^k(U) = 0$ dla $k \geq 1$.

Gdy M jest spójna to $H^0(M) = \mathbb{R}$. Istotnie, gdy $df = 0$ to $f = \text{const}$, skąd $\ker d^0 = \mathbb{R}$ i $H^0(M) = \mathbb{R}/\{0\} = \mathbb{R}$. Gdy M jest zwarta i zorientowana n -wymiarowa to $H^k(M) \cong H^{n-k}(M)$ - dualność Poincarégo. W szczególności gdy M jest spójna, zwarta i zorientowana to $H^n(M) = \mathbb{R}$. Gdy M nie jest zwarta lub jest nieorientowalna to $H^n(M) = 0$.

Twierdzenie 16.7.1 *Niech $n = \dim M$. a) Jeżeli M jest spójna to $H^0(M) = \mathbb{R}$, b) jeżeli M jest zwarta i orientowalna to $H^n(M) = \mathbb{R}$, w pozostałych przypadkach (niezwarta lub nieorientowalna) $H^n(M) = 0$.*

Twierdzenie 16.7.2 *Jeżeli M jest zwartą hiperpowierzchnią to wszystkie grupy kohomologii $H^k(M)$ są skończenie wymiarowe.*

Definicja 16.7.2 *Jeżeli $H^k(M)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, to jej wymiar $\dim H^k(M)$ oznaczamy przez b_k ,*

$$b_k = \dim H^k(M),$$

*i nazywamy k -tą **liczbą Bettiego** hiperpowierzchni M . Wielomian $P_M(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ nazywamy wielomianem Poincarégo hiperpowierzchni M .*

Gdy M jest zwarta i zorientowana to $b_k = b_{n-k}$. W szczególności $b_0 = b_n$.

Np. dla okręgu S^1 mamy $H^0(S^1) = \mathbb{R} = H^1(S^1)$ czyli $b_0 = b_1 = 1$. Zatem wielomian Poincarégo okręgu to $1 + t$. Jest twierdzenie o wielomianie Poincarégo dla iloczynu kartezjańskiego $M \times N$, mianowicie $P_{M \times N}(t) = P_M(t) \cdot P_N(t)$. Rozważmy dla prostego przykładu torus $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, jego wielomian Poincarégo to iloczyn wielomianów $(1 + t) \cdot (1 + t) = 1 + 2t + t^2$ skąd mamy $b_1 = 2$.

Definicja 16.7.3 Jeżeli wszystkie grupy kohomologii $H^k(M)$ są skończenie wymiarowe [np. tak jest dla zwartych hiperpowierzchni] i $b_k = \dim H^k(M)$ są liczbami Bettiego to liczba

$$\chi_M = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$$

nazywa się charakterystyką Eulera-Poincarégo hiperpowierzchni M .

Dalej ograniczmy się do $n = 2$, t.j. powierzchni 2-wymiarowych oznaczanych raczej przez S . Wśród nich są tzw. **powierzchnie Riemanna**. Aby je lepiej zobaczyć, utożsamiamy płaszczyznę z liczbami zespolonymi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Jeżeli funkcje przejścia dla takiej S są holomorficzne, to S nazywamy powierzchnią Riemanna (są to zatem hiperpowierzchnie (lepiej rozmaitości) zespolone wymiaru zespolonego 1). Dla powierzchni 2-wymiarowych

$$\chi_S = b_0 - b_1 + b_2.$$

Jeśli S jest zwarta i zorientowana to $b_0 = 1 = b_2$ zatem wtedy $\chi_S = 2 - b_1$.

Teraz dojdziemy do genusu i zwiążemy go z χ_S oraz wyjaśnimy jego znaczenie.

Formalnie

– dla zwartej **orientowalnej** powierzchni S genus (po polsku **rodzaj**) to liczba

$$g = \frac{2 - \chi_S}{2}$$

ale dalej nie widać co ona oznacza. Za pomocą liczb Bettiego mamy

$$g = \frac{2 - (2 - b_1)}{2} = \frac{b_1}{2}.$$

Przykładowo dla sfery S^2 mamy $H^1(S^2) = 0$ skąd $b_1 = 0$ i $\chi_{S^1} = b_0 - b_1 = 0$ oraz $g = 0$. Dla torusa $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ łatwo obliczyliśmy wyżej $b_1 = 2$ skąd $\chi_{\mathbb{T}} = 2 - b_1 = 0$ i $g = 1$.

Najpierw podamy metodę "na palcach" policzenia charakterystyki Eulera-Poincarégo przy pomocy triangulacji (dowód np. w książce Rotmana An Introduction to Algebraic Topology, GTM119, Springer 1988).

Definicja 16.7.4 Trójkątem na powierzchni S nazywamy obszar domknięty homeomorficzny ze zwykłym trójkątem na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Trójkąt na powierzchni S ma więc trzy wierzchołki i trzy krawędzie.

Stwierdzenie 16.7.1 Triangulacją powierzchni S nazywamy skończoną rodzinę $\mathcal{F}$ trójkątów $T_i \subset S$, $i = 1, \dots, n$, taką, że

- 1) $\bigcup T_i = S$,
- 2) gdy $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ to $T_i \cap T_j$ jest albo wspólną krawędzią **całą** obu trójkątów albo wspólnym wierzchołkiem.

Wprowadźmy dla danej triangulacji $\mathcal{F}$ powierzchni S następujące oznaczenia:

- F = ilość ścian (t.j. trójkątów),
- E = ilość boków (t.j. krawędzi),
- V = ilość wierzchołków.

Definicja 16.7.5 Liczba

$$\chi_{\mathcal{F}} = V - E + F$$

nazywa się charakterystyką Eulera-Poincarégo triangulacji $\mathcal{F}$.

Twierdzenie 16.7.3 (Dowód np. u Rotmana): Dla danej powierzchni zwartej S zachodzi równość

$$\chi_S = \chi_{\mathcal{F}},$$

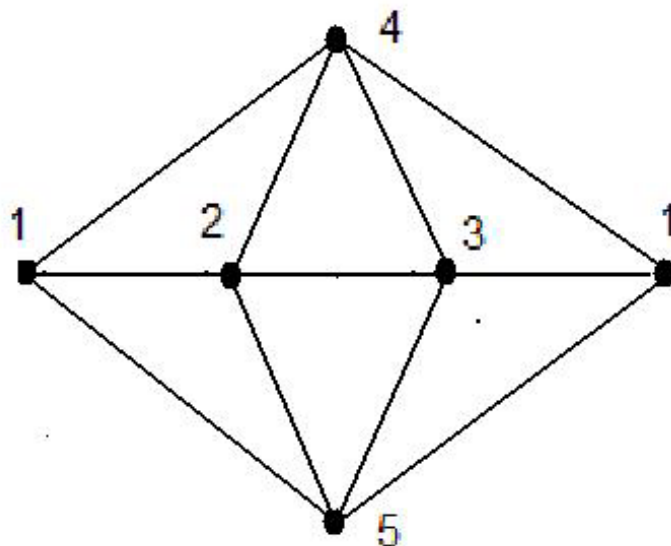
w szczególności $\chi_{\mathcal{F}}$ nie zależy od wyboru triangulacji.

Twierdzenie 16.7.4 Jeżeli S i S' są dwiema zwartymi powierzchniami w $\mathbb{R}^3$ o jednakowych charakterystykach Eulera-Poincarégo $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ to S jest homeomorficzna z S' . Jedynymi liczbami będącymi charakterystykami Eulera-Poincarégo zwartych powierzchni w $\mathbb{R}^3$ są

$$2, 0, -2, -4, \dots, -2n, \dots$$

Powierzchniami o takich charakterystykach są

- sfera, $\chi_{S^2} = 2$, oto przykładowa triangulacja sfery



ilość wierzchołków - 5

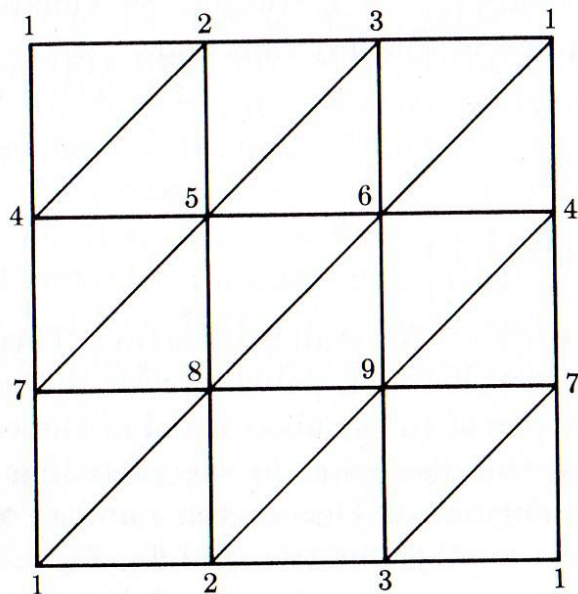
ilość krawędzi - 9

ilość trójkątów - 6

$$\chi_{S^2} = 5 - 9 + 6 = 2$$

$$g = \frac{2-2}{2} = 0 \text{ - sfera bez rączek}$$

Twierdzenie 16.7.5 - sfera z jedną rączką (torus), $\chi_{\mathbb{T}} = 0$, przykładowa triangulacja



ilość wierzchołków - 9

ilość krawędzi - 27

ilość trójkątów - 18

$$\chi_{\mathbb{T}} = 9 - 27 + 18 = 0$$

$$g = \frac{2 - 0}{2} = 1 \quad \text{sfera z 1 rączką}$$

- sfera z n -rączkami (n -torus), $\chi_S = 2 - 2n$.

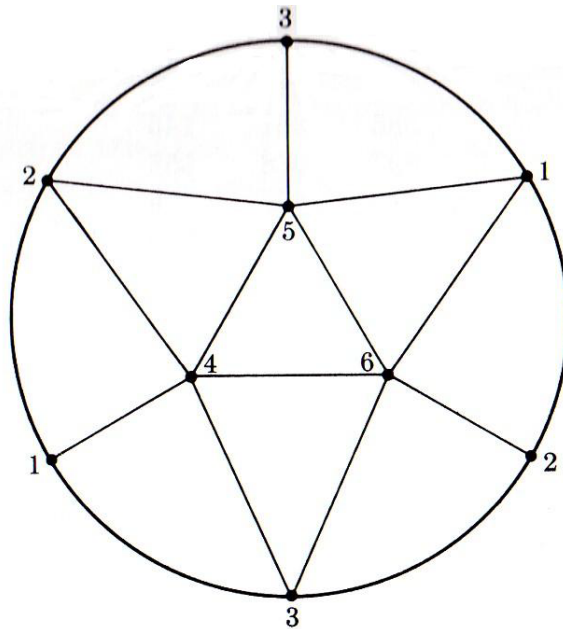
W konsekwencji każda zwarta powierzchnia S w $\mathbb{R}^3$ jest homeomorficzna ze sferą z pewną ilością rączek (jest więc też orientowalna). Liczba rączek n dla powierzchni S o charakterystyce Eulera-Poincarégo χ_S wynosi

$$\frac{2 - \chi_S}{2}$$

i jest to właśnie genus powierzchni S .

Przykład 16.7.1 Dla nieorientowalnej powierzchni zwartej - butelki Kleina = przestrzeń rzutowa = wycinamy w sferze koło i zaklejamy wstęgą Möbiusa (równoważnie skleamy punkty antypodyczne). Na rysunku zewnętrzny okrąg obrazuje wycięte koło i utożsamiamy punkty antypodyczne ponumerowane tymi samymi cyframi i krawędzie łączące wierzchołki

o takich samych wierzchołkach



ilość wierzchołków - 6

ilość krawędzi - 15

ilość trójkątów - 10

$$\chi_{\mathbb{K}} = 6 - 15 + 10 = 1$$

$$\chi_{\mathbb{K}} = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - b_1 + 0 = 1 - b_1 = 1 \text{ skąd } b_1 = 0$$

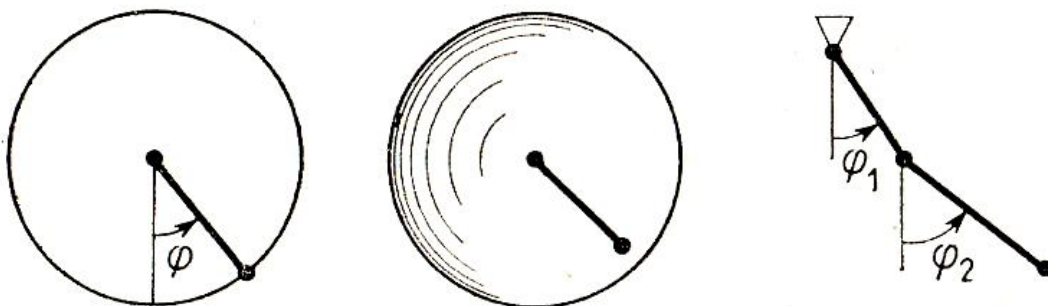
Skoro $b_1 = 0$ dla butelki Kleina to oznacza to, że $H^1(\mathbb{K}) = 0$ czyli każda 1-forma różniczkowa zamknięta jest dokładna czyli jest różniczką pewnej funkcji.

17 Hiperpowierzchnie w mechanice klasycznej - przestrzenie konfiguracyjne

Przestrzeń konfiguracyjna (intuicyjnie mówiąc) to pewna matematyczna przestrzeń K będąca zbiorem możliwych stanów danego układu fizycznego. Załóżmy że układ fizyczny zawiera n elementów (punktów), każdy opisany jest przez 3 współrzędne w $\mathbb{R}^3$. Wygodniej jest z matematycznego punktu widzenia rozpatrywać ten układ n elementów równoważnie jeden punkt w przestrzeni $3n$ wymiarowej. Dlatego zbiór możliwych stanów (czyli przestrzeń konfiguracyjna K) będzie podzbiorem w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Jeśli na te elementy nie są nałożone żadne więzy to przestrzenią konfiguracyjną jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^{3n}$. Jeśli jednak istnieją jakieś więzy, wówczas przestrzeń konfiguracyjna K jest jakimś podzbiorem w $\mathbb{R}^{3n}$, najczęściej w typowych układach fizycznych jest to jakaś hiperpowierzchnia a jej wymiar to ilość stopni swobody naszego układu.

Przykład 17.0.2 n punktów materialnych w $\mathbb{R}^3$ bez żadnych więzów. Przestrzeń konfiguracyjna K to $\mathbb{R}^{3n}$, $K = \mathbb{R}^{3n}$.

Przykład 17.0.3 1 punkt materialny połączony sztywnym nieważkim prętem długości l z ustalonym punktem $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$. Układ ten to tzw. **wahadło sferyczne**. Przestrzeń konfiguracyjna K to sfera dwuwymiarowa $S^2(\mathbf{x}_0, l)$ w $\mathbb{R}^3$ o środku w $\mathbf{x}_0$ i promieniu l , $K = S^2(\mathbf{x}_0, l)$. Jest ona dyfeomorficzna ze sferą o środku w 0 i promieniu l oznaczaną przez $S^2(l)$. Dyfeomorfizmem jest $f : S^2(\mathbf{x}_0, l) \rightarrow S^2(l)$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. [Dla wahadła płaskiego mielibyśmy okrąg jako przestrzeń konfiguracyjną].



Rys. Wahadła: płaskie, sferyczne i podwójne

Przykład 17.0.4 Niech układ składa się z dwóch punktów poruszających się swobodnie w $\mathbb{R}^3$, ale związanych ze sobą sztywnym, nieważkim prętem o długości l . Układ ten to poruszający się swobodnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ odcinek. Wtedy przyjmując dowolnie położenie pierwszego punktu o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) dostajemy warunek na współrzędne drugiego punktu (y_1, y_2, y_3) w formie: $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = l^2$. Jest to równanie sfery 2-wymiarowej o środku w punkcie (x_1, x_2, x_3) i promieniu l . Dostajemy więc, że przestrzeń konfiguracyjna to pięciowymiarowa hiperpowierzchnia w $\mathbb{R}^6$ opisana powyższym warunkiem. Jest ona dyfeomorficzna z $\mathbb{R}^3 \times S^2(l)$, dyfeomorfizm $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2(l)$ jest dany wzorem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$. W przypadku płaskim otrzymujemy przestrzeń K dyfeomorficzną z $\mathbb{R}^2 \times S^1(l)$.

Przykład 17.0.5 Zmodyfikujmy układ dwupunktowy płaski z poprzedniego przykładu i dodatkowo założmy, że pierwszy punkt połączony jest sztywnym nieważkim prętem o długości l_1 z początkiem układu współrzędnych 0. Otrzymujemy tzw. **wahadło podwójne**. Wtedy pierwszy punkt zakreśla okrąg $S^1(l_1)$ o równaniu $x_1^2 + x_2^2 = l_1^2$; przyjmując dowolnie położenie pierwszego punktu o współrzędnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ dostajemy, że drugi punkt przebiega okrąg $S^1(\mathbf{x}, l)$ o środku w $\mathbf{x}$ i promieniu l . Dyfeomorfizm o takim samym wzorze jak w poprzednim przykładzie przekształca dyfeomorficznie przestrzeń konfiguracyjną K wahadła podwójnego na iloczyn kartezjański okręgów $S^1(l_1) \times S^1(l)$, czyli na torus.

Przykład 17.0.6 Rozważmy układ sztywny składający się z trzech niewspółliniowych punktów p, q, r , tzn. każde dwa punkty połączone są sztywnym, nieważkim prętem o pewnej długości. Równoważnie można powiedzieć, że mamy ciało sztywne - trójkąt w $\mathbb{R}^3$. Jak wygląda przestrzeń konfiguracyjna? Jeden punkt p można dowolnie ustawić w $\mathbb{R}^3$. Jeśli już to zrobiliśmy, to dozwolone dalej ruchy będą ruchami sztywnymi, czyli obrotami zachowującymi ten ustalony punkt. Z geometrii analitycznej wiadomo, że ruch sztywny

trzymający jeden punkt jest izometrią liniową zachowującą orientację, a więc opisana jest przez macierz ortogonalną o wyznaczniku $+1$, czyli przez macierz z grupy Liego $SO(3)$. Zatem $K \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, jest to hiperpowierzchnia 6 wymiarowa w $\mathbb{R}^{12}$ (bo $SO(3)$ jest 3 wymiarową hiperpowierzchnią w $\mathbb{R}^9$).

Przykład 17.0.7 Strona internetowa dotycząca przestrzeni konfiguracyjnej dla robotów:
http://riad.usk.pk.edu.pl/~zk/GO_LAB_00/robot/robot.htm

18 TWIERDZENIE CAŁKOWE STOKESA

Celem jest Twierdzenie Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem:

Twierdzenie 18.0.6 (Stokes) Jeżeli M jest n -wymiarową hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M i na brzegu mamy orientację dodatnią to dla dowolnej $n-1$ formy na M o zwartym nośniku zachodzi wzór

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Twierdzenie to jest daeko idącym uogólnieniem zasadnicze Tw rachunku różniczkowego i całkowego $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Przykład 18.0.8 Niech $M = [a, b]$, wtedy $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$. Orientacja brzegu to zero-forma na $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$ równa $+1$ na b i -1 na a . Dla formy stopnia 0 na M czyli funkcji f mamy $df = f' \cdot dx$ stąd

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} f &= f(b) - f(a), \\ \int_M df &= \int_a^b f'(x) dx. \end{aligned}$$

Zatem wzór Stokesa staje się w tym trywialnym przypadku zasadniczym Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

W dowodzie ogólnego Tw. Stokesa $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ wykorzystujemy ten wzór $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, który jest znany z dowodu z kursu analizy I.

Najpierw musimy wprowadzić hiperpowierzchnie z brzegiem.

18.1 Hiperpowierzchnie z brzegiem

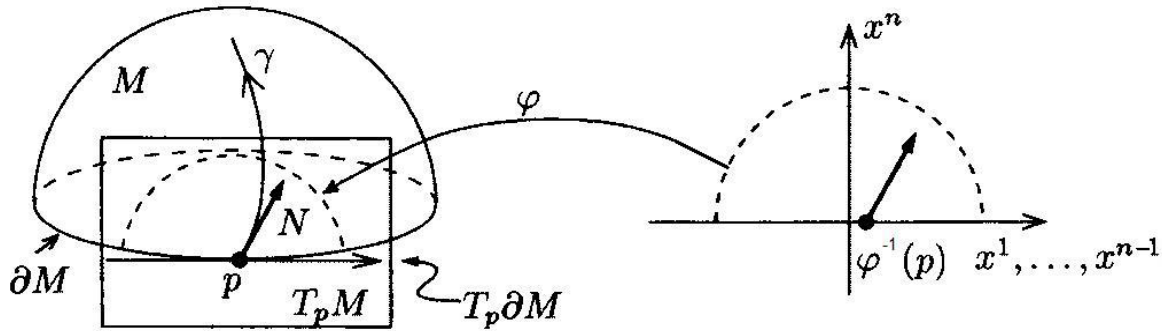
Rozważmy półprzestrzeń

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_n \geq 0\}$$

ze swoją topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$.

Definicja 18.1.1 *Hiperpowierzchnią kl. C^∞ wymiaru n z brzegiem nazywamy podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow M$ (zwane także parametryzacją) określone na podzbiorze $U \subset \mathbb{R}_+^n$ otwartym w $\mathbb{R}_+^n$ tak, że $p \in \varphi[U]$, które jest różnowartościowe, regularne kl. C^∞ i homeomorficzne na otwarty podzbiór w M .*

Punkty $p \in M$ dla których nie istnieje parametryzacja określona na podzbiorze otwartym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy punktami brzegowymi. Ich podzbiór oznaczamy ∂M . Są to punkty z obrazu $\varphi[\partial \mathbb{R}_+^n \cap U]$ po wszelkich parametryzacjach (to jest ćwiczenie - nie jest to fakt oczywisty).



Funkcje przejścia są (jak w przypadku bez brzegu) dyfeomorfizmami między podzbiórmi otwartymi w $\mathbb{R}_+^n$.

Jeżeli $U \subset \mathbb{R}_+^n$ jest otwartym podzbiorem to $\partial \mathbb{R}_+^n \cap U$ utożsamiamy z podzbiorem

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}; (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in U\}$$

w $\mathbb{R}^{n-1}$ i jest to podzbiór otwarty. Mianowicie inkluzja $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ jest ciągła więc przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty.

Twierdzenie 18.1.1 *Jeżeli M jest n wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^∞ z brzegiem ∂M to brzeg ∂M jest $n - 1$ wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^∞ (bez brzegu). Parametryzacjami brzegu ∂M są obcięcia parametryzacji $\varphi|U \cap \partial \mathbb{R}_+^n \rightarrow \partial M$.*

Uwaga 18.1.1 *Dla hiperpowierzchni z brzegiem pozostają tak samo określone: formy różniczkowe, operator różniczkowania, przestrzeń styczna, rozkład jedyńki, orientacja.*

Twierdzenie 18.1.2 *Jeżeli M jest hiperpowierzchnią zorientowaną klasy C^∞ z brzegiem ∂M i $\mathcal{U}$ jest atlasem $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}$ parametryzacji zgodnych z orientacją, wówczas atlas obcięć $\{\varphi_\alpha|U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^n; U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^n\}$ jest atlasem orientującym brzeg ∂M .*

Dowód. Niech φ_α i φ_β będą dwoma parametryzacjami z zadanego atlasu orientującego. Wtedy funkcja przejścia $\Lambda : \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ jest dyfeomorfizmem zachowującym orientację [czyli o jacobianie dodatnim] między podzbiórami otwartymi w $\mathbb{R}_+^n$. Ponieważ $\varphi_\alpha [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] \subset \partial M$ to

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] = (\varphi_\beta|_{U_\beta})^{-1} \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha}) [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] \subset \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Stąd funkcje przejścia $\Lambda' = (\varphi_\beta|_{U_\beta \cap \partial\mathbb{R}_+^n})^{-1} \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n})$ dla atlasu na brzegu ∂M i funkcje przejścia $\Lambda = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ na M są związane zależnością $\Lambda'_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Lambda_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz

$$\begin{aligned} (\Lambda'(x_1, \dots, x_{n-1}), 0) &= \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= (\Lambda_1(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \dots, \Lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), 0). \end{aligned}$$

Zatem macierze Jacobiego dla funkcji przejścia Λ i Λ' są w punktach z brzegu $\partial\mathbb{R}_+^n$ powiązane zależnością

$$\left[\frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{array} & 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Cały wyznacznik jest dodatni przy czym z własności wyznacznika wynika, że jest to iloczyn

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n}$$

Zatem ostatnia liczba $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} \neq 0$. Wiemy, że $\Lambda_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \geq 0$ oraz, że $\Lambda_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$. Stąd nie może być $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} < 0$. Zatem $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} > 0$. Implikuje to

że $\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} > 0$ co znaczy że parametryzacje obcięte do brzegu są też zgodne. ■

Definicja 18.1.2 Orientację brzegu zadana tym obciętem atlasem nazywamy dodatnią gdy n parzyste, a ujemną gdy n nieparzyste. (uzasadnienie poprzez wzów Stokesa: aby zawsze było $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ a nie $\int_{\partial M} \omega = -\int_M d\omega$).

Definicja 18.1.3 Niech M będzie hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M . Jeżeli rozważymy orientację przestrzeni wektorowej $T_p M$ zgodną z atlasem orientującym to gdy $p \in \partial M$ wówczas orientacja w $T_p(\partial M)$ dana reperem $(v_1, \dots, v_{n-1})$ jest dodatnia jeżeli, dla wektora $w \in T_p M$ skierowanego do wewnątrz M [tzn. $w = \alpha'(0)$ dla łuku $\alpha : [0, a) \rightarrow M$ takiego, że $\alpha((0, a)) \subset M \setminus \partial M$, $\alpha(0) = p$] baza $(-w, v_1, \dots, v_{n-1})$ jest dodatnia.

Przykład 18.1.1 (1) Orientacja półpłaszczyzny $\partial\mathbb{R}_+^n$ za pomocą wersorów $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ jest $(-1)^n$ - zgodna, t.j. gdy n jest parzyste wtedy baza $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ jest dodatnia a gdy nieparzyste - ujemna. Mianowicie dodatnią bazą $\mathbb{R}^n$ w punkcie $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ma być $(-\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$. Biorąc $(-\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ widzimy, że jest to zgodne z $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, (-1)^n \mathbf{e}_n)$ skąd teza.

(2) Niech $M \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem domkniętym [domknięcie zbioru otwartego U , $M = \bar{U}$] którego brzeg ∂M składa się z krzywych klasy C^∞ . Orientacja na U jest dodatnia. Orientacja brzegu ∂M jest dodatnia gdy: idąc wzdłuż brzegu mamy obszar U po lewej ręce. Uzasadnienie. W punkcie $p \in \partial M$ wektor v styczny do brzegu, $v \in T_p \partial M$ należy do dodatniej orientacji krzywej ∂M gdy dla wektora w skierowanego do wewnątrz U para $(-w, v)$ jest dodatnia, czyli para (v, w) jest dodatnia, czyli zgodna z wersorami osi współrzędnych.

(3) Rozpatrzmy powierzchnię zamkniętą M w $\mathbb{R}^3$ i niech $p_0 \in M$ będzie punktem dla którego współrzędna z będzie największą wartością dla punktów p z M . Wokół p_0 powierzchnia jest zadana jako wykres $z = f(x, y)$. Parametryzacja $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. $\phi|_x$ i $\phi|_y$ są bazą $T_p M$. W punkcie p_0 są to wersory osi OX i OY . Weźmy wersor $\mathbf{e}_z$ osi OZ . Baza $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ byłaby dodatnia gdy $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ jest dodatnia, ale $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ jest równoważna $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ czyli jest OK. orientacja dodatnia na ∂M to orientacja zadana na zewnątrz. Ogólniej dla $M \subset \mathbb{R}^n$ kowymiaru 1 jest dodatnia przez $(-1)^n \cdot V$ dla pola na zewnątrz, t.j. dla n nieparzystego ($n-1$ jest parzyste i przedstawienie $\mathbf{e}_n$ na koniec nie zmienia orientacji) orientacja dodatnia jest dla pola na zewnątrz a dla n parzystego dodatnia jest do wewnątrz.

(4) M dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$ o brzegu L zorientowana przez pole V . Wtedy dodatnia na L to taka: idąc po L z głową w kierunku V mamy mieć M po lewej ręce. Zrozumieć dlaczego.

Przykład 18.1.2 Określić dodatnie orientacje brzegów następujących hiperpowierzchni z brzegiem (a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 \geq 0\}$, (b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 \leq 0\}$, (c) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 \leq 0\}$, (d) $M_4 = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 \geq 0\}$. (e) $M_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_4 \geq 0\}$

1. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_1$, $\phi(x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$ jest zgodna czy **nie**?
2. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_2$, $\phi(x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
3. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_3$, $\phi(x_1, x_3) = (x_1, 0, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
4. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_4$, $\phi(x_1, x_3) = (x_1, 0, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
5. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \partial M_5$, $\phi(x, y, z) = (x, y, z, 0)$ **jest** zgodna czy **nie**?

Np. orientacja ∂M_3 zadana przez ϕ składa się z bazy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Wektorem skierowanym do wewnątrz ∂M_3 jest $-\mathbf{e}_2$. Rozważmy zatem bazę w dowolnym punkcie $(x_1, 0, x_3)$ brzegu ∂M_3 równą $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Jest ona niezgodna z $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ale ta ostatnia jest dodatnia, zatem nasza parametryzacja jest niezgodna.

Dowód Tw. Stokesa zostawimy na potem, a teraz przejdziemy do jego szczególnych przypadków oraz najprostszych zastosowań oraz podamy uogólnienie na przypadek brzegu z osobliwościami (np. brzeg prostokąta to 4 odcinki połączone wierzchołkami, brzeg sześcianu to nie jedna powierzchnia a 6 połączonych krawędziami).

18.2 Twierdzenie Stokesa dla podzbiorów z osobliwościami

Poniższe tw. zwane Tw Greena dla prostokąta wskazuje, że należy oczekiwać uogólnienia na przypadek gdy brzeg ma osobliwości.

Twierdzenie 18.2.1 Twierdzenie Greena dla prostokąta. Niech $R \subset \mathbb{R}^2$ będzie prostokątem o dodatnio zorientowanym brzegu ∂R i $\omega \in \Omega^1(U)$ niech będzie 1 formą określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$ zawierającym prostokąt R , $R \subset U$. Wtedy

$$\int_{\partial R} \omega = \iint_R d\omega.$$

Jeśli wyrazić ω we współrzędnych $\omega = Pdx + Qdy$ wtedy

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdx + Qdy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= 0 - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + 0 \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

i wzór Stokesa dla prostokąta staje się tzw. **wzorem Greena**

$$\int_{\partial R} (Pdx + Qdy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dowód. Dowód tego szczególnego przypadku tw. Stokesa. Niech $R = [a, b] \times [c, d]$, Na mocy Tw. Fubiniiego i zasadniczego Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\begin{aligned} &\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy - \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx \\ &= \int_{\partial R} (Pdx + Qdy) \end{aligned}$$

(∂R składa się z czterech odcinków odpowiednio zorientowanych). Np odcinek łączący (a, c) i (a, d) o parametryzacji $c(y) = (a, y)$, $y \in [c, d]$ ma ujemną orientację stąd $\int_{(a,c),(a,d)} (Pdx + Qdy) = - \int_c^d Q(a, y) dy$ itd. ■

Niech A będzie zwartym podzbiorem n wymiarowej hiperpowierzchni $M \subset \mathbb{R}^m$ (bez brzegu). Niech $IntA$ oznacza wnętrze zbioru A w przestrzeni topologicznej M i rozważmy brzeg zbioru A

$$FrA = A \setminus IntA.$$

Punkt $p \in FrA$ nazywamy **regularnym** jeśli część wspólna zbioru FrA i pewnego otoczenia punktu p w M jest podhiperpowierzchnią gładką $n - 1$ -wymiarową. Pozostałe punkty z brzegu FrA nazywamy punktami **osobliwymi**. Oznaczmy podzbiór punktów regularnych przez Fr_rA a osobliwych przez Fr_sA (osobliwy = singularny, stąd indeks s).

Podzbiór $A \subset M$ nazywamy **regularny** jeżeli każdy punkt $p \in Fr_rA$ należy do domknięcia wnętrza zbioru A , $IntA, Fr_rA \subset \overline{IntA}$. (Rysunek c) ze str 424 w książce Birkholca jest przykładem zbioru nieregularnego).

Twierdzenie 18.2.2 *Ogólne Tw Stokesa dla podzbiorów regularnych w hiperpowierzchniach. (Birkholc, "Analiza matematyczna, funkcje wielu zmiennych", Tw 8.1)*

Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ będzie gładką n wymiarową hiperpowierzchnią i $A \subset M$ regularnym zwartym podzbiorem M , oraz ω - gładką $n - 1$ -formą różniczkową na M . Zakładamy, że
— brzeg osobliwy Fr_sA zbioru A zawiera się w przeliczalnej rodzinie podhiperpowierzchni o wymiarach mniejszych od $n - 1$.

Wtedy zachodzi wzór Stokesa

$$\int_A d\omega = \int_{Fr_rA} \omega.$$

18.3 Szczególne przypadki ogólnego wzoru Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem

18.3.1 Twierdzenie Greena

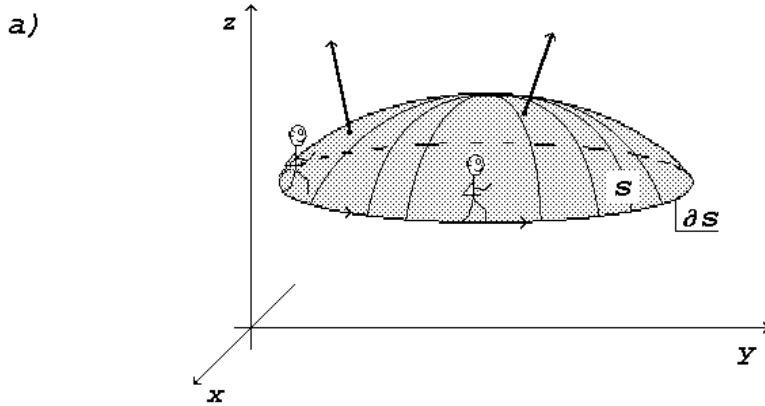
Twierdzenie 18.3.1 (Twierdzenie Greena) Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie ograniczonym płaskim obszarem którego brzeg ∂D tworzy jedna lub kilka krzywych C^∞ zorientowanych dodatnio względem D . (Dodatnia orientacja każdej krzywej z brzegu ∂D jest dana przez obieg punktów w takim kierunku, że obszar D mamy po lewej stronie). Dla 1-formy różniczkowej $\omega = P dx + Q dy$ określonej w obszarze D zachodzi wzór

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega &= \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

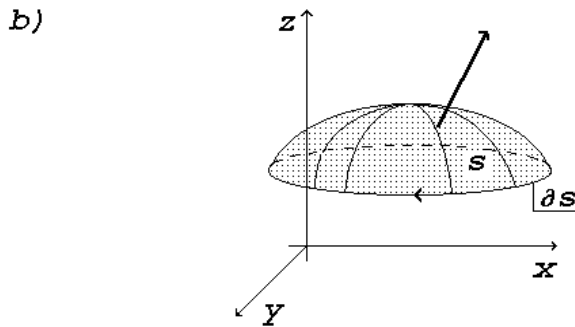
UWAGA: Tw. jest prawdziwe przy osłabieniu założeń: wystarczy żądać, aby brzeg ∂D składał się z krzywych przedziałami kl C^1 [Kołodziej, str. 442-443 - jest to szczególny przypadek Tw. Stokesa po podzbiórze z osobliwościami].

18.3.2 Twierdzenie Stokesa dla powierzchni 2-wymiarowej w $\mathbb{R}^3$

Twierdzenie 18.3.2 (*Twierdzenie Stokesa dla powierzchni z brzegiem*, 2 wymiarowej w $\mathbb{R}^3$) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie ograniczoną powierzchnią zorientowaną o brzegu ∂S składającym się z jednej lub kilku krzywych kl. C^∞ zorientowanym dodatnio względem orientacji S (równoważnie: idąc wzdłuż takiej krzywej z głową zwróconą w stronę pola wektorowego $\mathbf{n}$ orientującego S będziemy mieli powierzchnię po lewej stronie).



Orientacja brzegu ∂S powierzchni S przy prawoskrętnym układzie współrzędnych



Orientacja brzegu ∂S powierzchni S przy lewoskrętnym układzie współrzędnych

Wówczas, dla 1-formy różniczkowej $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ zachodzi wzór

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \omega &= \int_{\partial S} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_S d\omega = \int_S d(Pdx + Qdy + Rdz) = \dots \\ &= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

UWAGA: z 1-formą $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ wiążemy pole wektorowe $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ a z nim rotację pola

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right].$$

Strumień tego nowego pola $\text{rot } \mathbf{F}$ przez powierzchnię S to właśnie

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Zatem w terminach pola wektorowego wzór Stokesa w tym przypadku oznacza

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

UWAGA: Tw jest prawdziwe dla powierzchni S kl. C^2 której brzeg jest sumą krzywych przedziałami kl. C^1 .

Wniosek 18.3.1 *Jeżeli powierzchnia $S \subset \mathbb{R}^3$ jest zamknięta (t.j. nie ma brzegu $\partial S = \emptyset$) to*

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

18.3.3 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Twierdzenie 18.3.3 (Tw. Gaussa-Ostrogradskiego) *Niech W będzie domkniętym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^3$ którego brzeg ∂W jest sumą skończonej ilości powierzchni $S_1, \dots, S_k$ kl. C^∞ . Orientujemy brzeg $\partial W = S_1 \cup \dots \cup S_k$ za pomocą pola wektorowego normalnego jednostkowego $\mathbf{n}$ skierowanego **na zewnątrz** obszaru W . Wówczas, dla dowolnej 2 formy ω postaci $\omega = Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$ zachodzi wzór*

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial W} Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy \\ &= \iiint_W d(Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy) \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

UWAGA: Z polem $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ wiążemy funkcję zwaną dywergencją pola $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Dlatego w terminach pola wektorowego wzór Stokesa w tym przypadku ma postać

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (\text{div } \mathbf{F}) dV.$$

Twierdzenie jest prawdziwe gdy brzeg ∂W jest sumą skończonej ilości domkniętych płatów powierzchniowych $S_1, \dots, S_k$ przecinających się wzduż conajwyżej skończonej ilości krzywych przedziałami kl. C^1 .

19 DOWÓD TWIERDZENIA STOKESA

Twierdzenie 19.0.4 (Tw Stokes) *Jeżeli M jest hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M i na brzegu mamy orientację dodatnią to dla dowolnej $n - 1$ formy na M o zwartym nośniku zachodzi wzór*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dowód. KROK I. $M = \mathbb{R}^k$. W tym przypadku $\partial M = \emptyset$. Niech ω będzie dowolną $k - 1$ formą o zwartym nośniku. Potrzeba udowodnić równość $\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = 0$. Forma ω jest sumą składników postaci

$$\omega_i = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Dla krótkości piszemy daszek nad opuszczonym wyrazem, zatem

$$\omega_i = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Stąd

$$\begin{aligned} d\omega_i &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Równość $\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = 0$ będzie wykazana, jeżeli pokażemy ją dla każdego składnika: $\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k = 0$. Niech

$$\text{supp } f \subset \prod_{j=1}^k [a_j, b_j].$$

Wtedy z Tw. Fubiniiego (ustawiając odpowiednio kolejność całkowania)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge \dots \wedge \widehat{i} \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Do wykazania kroku I wystarczy pokazać, że $\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$. Ponieważ

$$f(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) = 0 \quad \text{dla} \quad x_i \notin [a_i, b_i]$$

to z ciągłości f także są zera na końcu przedziału. Stąd z zasadniczego Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) dx_i = f(x_1^0, \dots, b_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, a_i, \dots, x_k^0) = 0.$$

KROK II. $M = \mathbb{R}_+^k$. Wtedy $\partial M = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$. Niech ω będzie dowolną $k-1$ formą o zwartym nośniku na M . Forma ω jest sumą składników postaci

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} dq_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

Weźmy parametryzację hiperpowierzchni $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$

$$\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}, \quad (x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, 0).$$

Jest ona $(-1)^k$ -zgodna z dodatnią orientacją brzegu $\partial(\mathbb{R}_+^k) = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ (pokażać szczegółowo). Stąd skoro $\varphi^*(dx_k) = d(0) = 0$, to

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* \left(q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \right) \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} q_i(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \varphi^* (dx_1) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge \underbrace{\varphi^*(dx_k)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \\
&= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}) \\
&= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}_+^k} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^k} \left((-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \right) \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k.
\end{aligned}$$

Ponieważ dla $i < k$ otrzymujemy z Tw. Fubniego (ustawiając odpowiednio kolejność całkowania)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_k dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{x} \dots \wedge dx_{k-1}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(co zauważamy analogicznie jak poprzednio na mocy argumentu nośnika ...). Zatem

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}_+^k} d\omega \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_k \\
&= (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
&\stackrel{(*)}{=}
\end{aligned}$$

Z powodu zwartości nośnika $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$ gdy $x_k > b$ dla pewnej $b > 0$ skąd także $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$ dla $x_k > b$ co implikuje $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \int_0^b \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ i dalej

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{=} (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^b \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \Big|_{x_k=0}^{x_k=b} \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(\underbrace{f(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0)}_{=0} \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^k \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = P.
\end{aligned}$$

KROK III. M jest dowolną zorientowaną hiperpowierzchnią z brzegiem ∂M . Załóżmy, że nośnik formy ω jest zawarty w dziedzinie jednej mapy $U'_\alpha \subset M$. W tej sytuacji nośnik $d\omega$ także jest zawarty w U'_α skąd

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{U'_\alpha} d\omega, \\
\int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega.
\end{aligned}$$

Wystarczy zatem pokazać

$$\int_{U'_\alpha} d\omega = \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega.$$

Niech $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ będzie parametryzacją zgodną z orientacją M (U_α jest otwarty w $\mathbb{R}_+^k$).

$$L = \int_{U'_\alpha} d\omega = \int_{U_\alpha} \varphi^*(d\omega) = \int_{U_\alpha} d(\varphi^*\omega).$$

Nośnik $\varphi^*\omega$ jest zawarty w U_α można więc rozszerzyć formę $\varphi^*\omega$ do gładkiej formy λ określonej na całej przestrzeni $\mathbb{R}_+^k$ kładąc 0 poza U_α (pokazać szczegółowo). Wtedy na mocy kroku 2

$$\int_{U_\alpha} d(\varphi^*\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^k} d\lambda = \int_{\partial \mathbb{R}_+^k} \lambda = \int_{\partial \mathbb{R}_+^k \cap U_\alpha} \varphi^*\omega.$$

Z drugiej strony $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ po obcięciu do brzegów

$$\varphi : U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k \rightarrow U'_\alpha \cap \partial M$$

jest parametryzacją ∂M przy czym rozważając na $U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ orientację dodatnią względem $\mathbb{R}_+^k$ (czyli $(-1)^k$ zgodną z naturalną orientacją $\mathbb{R}^{k-1}$) mapa obcięta

jest zgodna z orientacją ∂M . Stąd

$$P = \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k} \varphi^* \omega = L.$$

KROK IV. Przypadek ogólny. M jest dowolną zorientowaną hiperpowierzchnią z brzegiem ∂M . Załóżmy, że nośnik formy ω jest zwarty. Rozważmy dowolny atlas $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}$ parametryzacji zgodnych z orientacją M i wybierzmy skończony ciąg indeksów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takich, że $\text{supp } \omega \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$. Wpiszmy w pokrycie $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, M \setminus \text{supp } \omega\}$ gładki rozkład jedności $\{\rho_{\alpha_i}, \rho\}$. Wtedy $\omega = \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega$ (bo $\rho\omega = 0$ więc $\omega = \omega \cdot 1 = \omega \cdot ((\sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}) + \rho) = \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega$).

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega\right) = \sum_{i=1}^n \int_M d(\rho_{\alpha_i} \cdot \omega) \quad / \text{supp } \rho_{\alpha_i} \cdot \omega \subset U_{\alpha_i} \\ &= \sum_i \int_{\partial M} \rho_{\alpha_i} \cdot \omega = \int_{\partial M} \sum_\alpha \rho_{\alpha_i} \cdot \omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

■

Zauważmy, że dla dowodu tw. Stokesa dla form o zwartych nośnikach wystarcza mieć istnienie gładkich rozkładów jedności wpisanych dla rodzin skończonych co jest znacznie łatwiejsze do wykazania.

20 Element objętości i Tensor Riemanna

Niech na k wymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej V będzie dany iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, t.j. dwuliniowe odwzorowanie symetryczne niezdegenerowane. Pokazuje się, że istnieje baza $(e_1, \dots, e_k)$ która jest ortonormalna (w skrócie ON), czyli taka, że wektory tej bazy mają długości 1 i są prostopadłe do siebie

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Jeżeli weźmiemy inną bazę ON $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$ to macierz przejścia $a := [a_i^j]$ od jednej bazy do drugiej

$$\bar{e}_i = \sum_j a_i^j e_j$$

jest ortogonalna, tzn. wiersze macierzy są długości 1 i są prostopadłe (co powinno być znane z algebry). Istotnie,

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle \sum_r a_i^r e_r, \sum_s a_j^s e_s \rangle = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s \langle e_r, e_s \rangle = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s \delta_{rs} \\ &= \sum_r a_i^r a_j^r. \end{aligned}$$

Inaczej ten fakt można zapisać w postaci

$$\sum_r a_i^r (a^T)_r^j = \delta_{ij}$$

który oznaczają, że

$$a \cdot a^T = Id.$$

Z własności macierzy (Tw. Cauchy'ego)

$$1 = \det Id = \det (a \cdot a^T) = \det a \cdot \det a^T = \det a \cdot \det a = (\det a)^2$$

otrzymujemy, że macierz przejścia a ma wyznacznik $\det a = \pm 1$.

W konkluzji, jeżeli obie bazy orientują V jednakowo (czyli macierz przejścia ma wyznacznik dodatni) to musi być: $\det a = +1$.

Zakładając, że na V dana jest orientacja, i biorąc bazy e_i oraz $\bar{e}_j$ ON i dodatnie (czyli orientujące zgodnie z zadaną orientacją), stwierdzamy z powyższego, że macierz przejścia a ma wyznacznik $+1$. Rozważmy bazy dualne e_i^* i $\bar{e}_j^*$ w przestrzeni kowektorów V^* . Zwiążemy z tymi bazami (e_i) oraz $(\bar{e}_j)$ tensory skośnie symetryczne stopnia k postaci

$$\begin{aligned}\omega &= e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*, \\ \bar{\omega} &= \bar{e}_1^* \wedge \dots \wedge \bar{e}_k^*.\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\begin{aligned}\omega(e_1, \dots, e_k) &= 1, \\ \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) &= 1.\end{aligned}$$

Pokażemy, że $\omega = \bar{\omega}$ co będzie oznaczało, że tensor ω określony dla dowolnej bazy ON dodatniej nie zależy od wyboru tej bazy. Otóż, skoro $\bar{\omega} = r \cdot \omega$ dla pewnej liczby rzeczywistej r to

$$\begin{aligned}1 &= \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) = r \cdot \omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot \det a \cdot \omega(e_1, \dots, e_k) \quad / \text{Spivak Tw. 4.6 str 76} \\ &= r \cdot 1 \cdot 1 = r\end{aligned}$$

(co można też łatwo zobaczyć z definicji

$$\begin{aligned}1 &= \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) = r \cdot \omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot \det [e_i^*(\bar{e}_j)] \\ &= r \cdot \det [e_i^*(\sum_r a_j^r e_r)] \\ &= r \cdot \det [\sum_r a_j^r e_i^*(e_r)] \\ &= r \cdot \det [\sum_r a_j^r \delta_{ir}] = r \cdot \det [a_j^i] = r\end{aligned}$$

Tensor ω równy $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*$ dla dowolnej bazy ON dodatniej nazywa się **tensorem objętości** zorientowanej przestrzeni wektorowej k -wymiarowej V . Z powyższego jest także jasne, że jest to jedyny tensor stopnia k na V skośnie symetryczny taki, że $\omega(e_1, \dots, e_k) = 1$ dla pewnej (dowolnej) bazy ON dodatniej.

Niech teraz $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną hiperpowierzchnią k wymiarową w $\mathbb{R}^n$. Weźmy kanoniczny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \sum_i \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{w}^i.\end{aligned}$$

Dla $p \in M$ rozważmy przestrzeń styczną $T_p M \subset \mathbb{R}^n$. Skoro $T_p M$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{R}^n$ to iloczyn skalarny obcina się do tej przestrzeni dając tensor symetryczny dwuliniowy i także niezdegenerowany

$$G(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p M \times T_p M} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tensor G na hiperpowierzchni M nazywamy **tensorem Riemanna**. Niech M będzie zorientowana. Tak jak przed chwilą rozważając dowolną bazę $e_i(p)$ ON dodatnia na przestrzeni wektorowej zorientowanej $T_p M$ wprowadzamy na M k -formę różniczkową ω która w punkcie p równa jest elementowi objętości tej przestrzeni stycznej, $\omega(p) = e_1^*(p) \wedge \dots \wedge e_k^*(p)$. Nazywa się ona **formą objętości hiperpowierzchni M** i bywa oznaczana symbolem dV .

Ćwiczenie 20.0.1 * Element objętości $dV(p) : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ na wektorach $(v_1, \dots, v_k)$ jest równy znakowanej objętości równoległoscianu rozpiętego na tych wektorach (znak $+$ gdy wektory orientują $T_p M$ dodatnio i $-$ gdy ujemnie (oczywiście gdy wektory są liniowo zależne to objętość jest 0)).

Twierdzenie 20.0.5 Dla zwartej zorientowanej hiperpowierzchni M

$$\int_M dV$$

jest równa $\mu(M)$ - mierze k -wymiarowej M - czyli objętości M . W szczególności dV jest niedokładna.

Dowód. Szkic dowodu. Dla płyta $U'_\alpha \subset M$ o parametryzacji $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ zgodnej i formy objętości dV mamy równość (do dowodu wykorzystujemy ćwiczenie)

$$\varphi^*(dV) = |\varphi'| \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

skąd

$$|U'_\alpha| = \int_{U'_\alpha} 1 = \int_{U_\alpha} |\varphi'| dx_1 \dots dx_k = \int_{U_\alpha} |\varphi'| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{U_\alpha} \varphi^*(dV) = \int_{U'_\alpha} dV.$$

W dowolnym przypadku wykorzystujemy rozkład jedności aby wykazać, że $\int_M 1 = \int_M dV$.

■

UWAGA: uzasadnia to stary symbol na całkę z funkcji skalarnej f po hiperpowierzchni M : $\int_M f = \int f dV$.

Poniższe tw uogólnia Tw. 5.6 z książki Spivaka "Analiza na rozmaitościach", PWN.2005.

Twierdzenie 20.0.6 Jeżeli M jest zorientowana hiperpowierzchnia k -wymiaru 1, $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim M = n$, i $N = [N_1, \dots, N_{n+1}]$ jest jednostkowym polem wektorowym ciągłym normalnym do M to forma objętości dV jest równa

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} N_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Przykład 20.0.1 Weźmy sferę $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Polem normalnym jest pole punktu wodzącego $N = [x_1, \dots, x_{n+1}]$ stąd forma objętości na S^n jest równa

$$dS^n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Skoro jest to forma objętości, to

$$\int_{S^n} dS^n \neq 0$$

bo to jest objętość sfery S^n . W szczególności forma ta jest niedokładna, czyli nie istnieje na S^n żadna forma η dtopnia $n-1$ taka, że $d\eta = dS^n$.

Podamy teraz pewne ciekawe zastosowania Tw. Stokesa w topologii.

21 Zastosowania Tw. Stokesa w topologii

Oznaczmy przez K^{n+1} kulę w $\mathbb{R}^{n+1}$ o promieniu 1 i środku w 0, zatem $\partial K^{n+1} = S^n$.

Twierdzenie 21.0.7 Nie istnieje gładkie odwzorowanie

$$\mathbf{r} : K^{n+1} \rightarrow S^n$$

które jest identycznością na sferze S^n .

Dowód. Przypuśćmy, że takie odwzorowanie $\mathbf{r}$ istnieje. Weźmy dowolną n -formę na S^n taką, że $\int_{S^n} \omega \neq 0$. Forma taka istnieje (np. forma objętości - lub nawet dowolna n forma nigdzie nie równa zeru - patrz Tw 16.5.1). Wtedy (skoro $\mathbf{r}|_{S^n} = id$)

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \mathbf{r}^* \omega = \int_{\partial K^{n+1}} \mathbf{r}^* \omega \stackrel{\text{Tw. Stokesa}}{=} \int_{K^{n+1}} d(\mathbf{r}^* \omega) = \int_{K^{n+1}} \mathbf{r}^* (d\omega) \\ &= \int_{K^{n+1}} \mathbf{r}^* (0) = 0 \end{aligned}$$

bo $d\omega$ jest $n+1$ formą na S^n a taka forma musi być zerowa. ■

Twierdzenie 21.0.8 Tw. Brouwera o punkcie stałym. Niech $f : K^n \rightarrow K^n$ będzie gładkim odwzorowaniem kuli w kulę. Wtedy istnieje punkt $x \in K^n$ taki, że $f(x) = x$ (t.j. f posiada punkt stały).

Dowód. Przypuśćmy, że f nie ma punktów stałych. Tzn. dla wszystkich $x \in K^n$ punkty x i $f(x)$ są różne. Zdefiniujemy odwzorowanie $\mathbf{r} : K^n \rightarrow S^{n-1}$ następująco: $\mathbf{r}(x)$ jest to punkt jaki promień startujący z $f(x)$ i przechodzący przez x przetnie sferę. Trzeba sprawdzić licząc współrzędne że jest to odwzorowanie gładkie. Z konstrukcji $\mathbf{r}$ mamy $\mathbf{r}(x) = x$ dla punktów $x \in S^n$. Istnienie takiego odwzorowania jest sprzeczne z poprzednim twierdzeniem. ■

22 Zastosowania całki powierzchniowej zorientowanej w Fizyce

22.1 Strumień cieczy

Niech S będzie powierzchnią zorientowaną i $\mathbf{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S$, polem wektorowym prędkości przepływu cieczy przez powierzchnię S . Wtedy

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

jest objętością cieczy przepływającej przez powierzchnię S w jednostce czasu w kierunku dodatniej strony powierzchni. Jeśli całka ta jest liczbą ujemną, oznacza to, że więcej cieczy płynie w przeciwnym kierunku.

22.2 Pole cienia

Założmy, że światło pada promieniami równoległymi do siebie w kierunku wektora jednostkowego $\mathbf{G}$ na płaszczyznę P prostopadłą do $\mathbf{G}$. Założmy też, że powierzchnia zorientowana S o parametryzacji $\Phi : D \rightarrow S$ jest tak ułożona między światłem i płaszczyzną P , że każdy promień światła przecina ją w co najwyżej jednym punkcie.

Wówczas, pole A cienia powierzchni S na płaszczyznę P dane jest wzorem

$$A = \iint_D \left| \mathbf{G} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \right| du dv.$$

Jeśli światło pada od strony ujemnej powierzchni S to moduł w tym wzorze można pominąć i całka wówczas równa się

$$A = \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

22.3 Strumień ciepła

Wcześniej stwierdziliśmy, że przepływ ciepła w ciele o temperaturze $T(x, y, z)$ opisuje pole wektorowe $\mathbf{J} = -k \cdot \nabla T$. Stąd całka

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -k \cdot \iint_S \nabla T \cdot d\mathbf{S}$$

wyraża globalną ilość ciepła przepływającą przez zorientowaną powierzchnię S .

22.4 Prawo Gaussa

Założmy, że pole elektryczne $\mathbf{E}$ jest wytworzone przez ładunek elektryczny Q punktowy, liniowy, powierzchniowy lub przestrzenny. *Prawo Gaussa* wiąże strumień pola

elektrycznego $\mathbf{E}$ przez zamkniętą powierzchnię S z całkowitym ładunkiem Q zawartym wewnątrz S za pomocą całki pola $\mathbf{E}$ przez powierzchnię S zorientowaną na zewnątrz

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon Q, = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (22.4.1)$$

gdzie ϵ jest współczynnikiem występującym w prawie Coulomba a ϵ_0 jest *współczynnikiem przenikalności elektrycznej* danego ośrodka w którym umieszczony jest ładunek Q . Będzie ono uzasadnione dla ładunku punkowego w rozdziale dotyczącym wzorów całkowych.

22.5 Zadania

Zadanie

Oblicz $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, gdzie S jest zorientowaną do wewnątrz powierzchnią boczną bryły ograniczonej od góry płaszczyzną $z = 0$ a od dołu elipsoidą $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ dla pola $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$.

Zadanie

Oblicz $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ gdzie $\mathbf{F} = [1, 1, z(x^2 + y^2)^2]$ i S jest powierzchnią całkowitą walca $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, zaś $\mathbf{n}$ jest polem jednostkowym normalnym skierowanym do wewnątrz cylindra.

Zadanie

Załóżmy, że funkcja temperatury jest dana wzorem $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i niech S będzie sferą jednostkową $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz. Obliczyć bez używania parametryzacji sfery strumień ciepła przez powierzchnię S jeżeli $k = 1$. Zinterpretować znak wyniku. Odp. -8π .

Zadanie

Niech pole prędkości przepływu cieczy będzie dane wzorem $\mathbf{V} = \sqrt{x}\mathbf{j}$ (mierzone w m/s). Obliczyć ile m^3 cieczy płynie na sekundę przez powierzchnię $x = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 1$, zorientowaną przez pole dla którego $\cos \alpha > 0$.

Zadanie

Niech temperatura T w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana będzie wzorem $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Obliczyć strumień ciepła wpływający do środka walca $x^2 + y^2 = 2$, $0 \leq x \leq 2$, przez jego powierzchnię boczną (dla $k = 1$).

Zadanie

Niech S będzie zamkniętą powierzchnią która składa się z górnej półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, i koła $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Niech $\mathbf{E}$ będzie polem elektrycznym zdefiniowanym wzorem $\mathbf{E} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Obliczyć ładunek elektryczny zamknięty przez powierzchnię S .

Zadanie

Światło pada z góry na dół w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $x + 2y + 3z = -1$. Obliczyć pole cienia rzucanego przez dysk $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, $z = 0$. Odp. $\frac{3\pi}{4\sqrt{14}}$.

Zadanie

Niech S będzie górną połówką sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, zorientowaną przez pole normalne skierowane na zewnątrz. Weźmy pola wektorowe

- $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

- $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Obliczyć dla tych pól

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ i } \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

gdzie C jest brzegiem powierzchni półsfery S – okręgiem jednostkowym w płaszczyźnie OXY przebieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara patrząc z dodatniej części osi OZ (zakładamy prawoskrętny układ współrzędnych). Zauważyć fenomen równości tych całek. Będzie on wyjaśniony w następnym rozdziale za pomocą wzoru Stokesa.

Zadanie

Pokazać, że jeżeli pole wektorowe $\mathbf{F}$ jest styczne do powierzchni S to strumień tego pola przez powierzchnię S jest zerowy.

22.6 Zadania teoretyczne

Zadanie

Jeśli poniższe zdanie jest prawdziwe, udowodnij je, jeżeli jest fałszywe daj kontrprzykład:

— jeżeli $f(x, y, z)$ jest funkcją różniczkowalną, to strumień pola ∇f przez powierzchnię sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ jest równy zero.

23 Wykorzystanie wzoru Greena

Przykład 23.0.1 Niech C będzie brzegiem kwadratu $D = [0, 1] \times [0, 1]$ zorientowanego przeciwko ruchowi wskazówek zegara. Całka po łuku C musi rozpaść się na sumę całek po czterech odcinkach. Twierdzenie Greena pozwala wykonać to jedną całką (o ile współrzędne pola [formy różniczkowej] są określone i różniczkowalne wewnątrz kwadratu). Np.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (2x^6) - \frac{\partial}{\partial y} (y^4 + x^3) \right) dx dy = 1.$$

Twierdzenie 23.0.1 (Pole obszaru płaskiego) Jeżeli krzywa C jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru płaskiego D [C może składać się z kilku części] to pole D równa się

$$|D| = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \int_C x dy = - \int_C y dx.$$

Dowód.

$$\frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy = \iint_D dx dy = |D|.$$

Pozostałe wzory dowodzimy identycznie. ■

Twierdzenie 23.0.2 (Twierdzenie Greena w terminach pola wektorowego) Niech $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = [P, Q]$ będzie polem wektorowym kl. C^1 określonym w obszarze płaskim D ograniczonym dodatnio zorientowaną zamkniętą krzywą ∂D . Wówczas

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy.$$

Dowód. Zgodnie z def. rotacji $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$. Stąd $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. ■

Twierdzenie 23.0.3 (Twierdzenie Gaussa o dywergencji na płaszczyźnie) Niech D będzie obszarem płaskim i $\mathbf{n}$ – jednostkowym normalnym polem wektorowym wzdłuż brzegu ∂D skierowanym na zewnątrz obszaru D . Dla dowolnego pola wektorowego $\mathbf{F}$ kl. C^1 na D zachodzi wzór

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy.$$

Dowód. Niech $\mathbf{T}$ będzie ciągłym jednostkowym i stycznym polem wzdłuż brzegu ∂D zgodnym z jego dodatnią orientacją (t.j. $(\mathbf{n}, \mathbf{T})$ dodatnio orientuje płaszczyznę, zatem $(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k})$ dodatnio orientuje przestrzeń skąd - co wynika z własności iloczynu wektorowego z początku wykładu - w ciągu $(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k}, \dots)$ iloczyn wektorowy dwu sąsiednich wektorów jest wektorem następnym). Implikuje to $\mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$, a także $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ i

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{T}) \, ds = - \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T}) \, ds.$$

Z drugiej strony, z własności iloczynu mieszanego

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) = (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{T} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T},$$

i zamiany całki zorientowanej na całkę niezorientowaną z funkcji skalarnej

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{\partial D} ((\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}) \, ds = \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Niech $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, wtedy $\mathbf{k} \times \mathbf{F} = A\mathbf{k} \times \mathbf{i} + B\mathbf{k} \times \mathbf{j} = A\mathbf{j} - B\mathbf{i}$. Stosując Twierdzenie Greena do całki krzywoliniowej (dla $P = -B$ i $Q = A$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial D} (A\mathbf{j} - B\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

■

Uwaga 23.0.1 Fizycznie, lewa strona płaskiego Twierdzenia Gaussa o dywergencji wyraża strumień pola wektorowego wypływający z wnętrza obszaru D przez jego brzeg ∂D . Jeżeli zatem pole $\mathbf{F}$ reprezentuje płaskie pole przepływu cieczy, twierdzenie orzeka, że strumień cieczy wypływający z D przez jego brzeg ∂D w jednostce czasu równa się całce po D z dywergencji pola $\mathbf{F}$. W szczególności,

- jeżeli dywergencja znika, to strumień jest zerowy.

23.1 Zadania praktyczne

Zadanie

Sprawdzić Tw. Greena dla pola $\mathbf{F} = [x, xy]$ i koła jednostkowego $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Zadanie

Stosując całki zorientowane obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą:

- (a) elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- (b) hipocykloidą $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,
- (c) krzywą Steinera

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}R \cos t + \frac{1}{3}R \cos(2t), \\ y(t) = \frac{2}{3}R \sin t - \frac{1}{3}R \sin(2t), \quad t \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ wypływający z wnętrza kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.

24 Wykorzystanie wzoru Stokesa dla powierzchni

24.1 Zadania praktyczne

Zadanie

Znaleźć cyrkulację pola wektorowego $\mathbf{F} = [z, -x, -y]$ wzdłuż brzegu trójkąta zorientowanego tak, aby kolejnymi wierzchołkami były $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$.

Zadanie

Niech S będzie częścią sfery $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$, $z \geq 0$, zorientowaną przez pole skierowane na zewnątrz. Obliczyć $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla $\mathbf{F} = [y, -x, e^{xz}]$. (Odp. -2π)

Zadanie

Rozważyć pole grawitacyjne $\mathbf{F} = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3}$. Pokazać, że

- $\text{div } \mathbf{F} = 0$,
- istnieje zamknięta powierzchnia przez którą strumień jest niezerowy (rozważyć sferę jednostkową o środku w początku układu współrzędnych)
- pole $\mathbf{F}$ nie ma potencjału wektorowego! (Gdyby miało, $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, to zgodnie z wnioskiem $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = 0$ dla każdej powierzchni zamkniętej S ale jest to sprzeczne z poprzednim punktem.)

Zadanie

Wykorzystując Tw. Stokesa obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

gdzie C jest przecięciem cylindra $x^2 + y^2 = 1$ z płaszczyzną $x + y + z = 1$; orientacja C odpowiada ruchowi przeciw wskazówkom zegara (w/g obserwatora umieszczonego wysoko na osi OZ). (Odp. $\frac{3\pi}{2}$).

Zadanie

Korzystając z uwagi 24.2.1 obliczyć całkę krzywoliniową nieorientowaną

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

gdzie S jest częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z \geq 1$, $\mathbf{n}$ jest polem normalnym jednostkowym zwróconym na zewnątrz sfery zaś $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. (Odp. $-\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$).

Zadanie

Rozważmy pole wektorowe

$$\mathbf{F} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Sprawdzić, że $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ oraz $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ dla jednostkowego okręgu leżącego w płaszczyźnie OXY będącego brzegiem koła. Dlaczego nie jest to sprzeczne z Tw. Stokesa?

Zadanie

Obliczyć $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla pola wektorowego $\mathbf{F} = [3y, -xz, -yz^2]$ po części powierzchni S o równaniu $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, (a) bezpośrednio, (b) przez zastosowanie Tw. Stokesa. Założyć, że powierzchnia S jest zorientowana za pomocą pola wektorowego normalnego dla którego $\cos \gamma > 0$.

24.2 Zadania teoretyczne

Zadanie

Udowodnić równość

$$\int_{\partial D} \phi \cdot \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D (\phi \cdot \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \, dx \, dy.$$

Zadanie

Wykazać, że jeśli f jest funkcją harmoniczną w obszarze D to

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

Zadanie

Weźmy pole wektorowe $\mathbf{F} = \left[-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right]$. Zakładając, że D jest jednostkowym dyskiem $x^2 + y^2 \leq 1$ wyjaśnić dlaczego Twierdzenie Greena nie zachodzi w tym przypadku.

Przykład 24.2.1 Rozważmy pole wektorowe $\mathbf{F} = ye^z \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + xye^z \mathbf{k}$. Wykażemy (korzystając z Tw. Stokesa), że całka po dowolnej krzywej zamkniętej będącej brzegiem pewnej powierzchni znika.

I-sposób. Sprawdzamy bezpośrednio związek $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i stosujemy Tw. Stokesa.

II-sposób. Zauważamy, że pole $\mathbf{F}$ jest gradientem $\mathbf{F} = \nabla (xye^z)$ i stosujemy Lemat mówiący, że rotacja gradientu znika.

Uwaga 24.2.1 Z Tw. Stokesa wynika, że jeżeli dwie zorientowane powierzchnie mają ten sam zorientowany brzeg, wtedy całki z rotacji pola wektorowego przez te dwie powierzchnie są równe.

Zadanie

Niech C będzie krzywą zamkniętą która jest brzegiem powierzchni S i niech f i g będą funkcjami kl. C^2 określonymi w dziedzinie zawierającej S . Pokazać równości

- $\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}.$
- $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$

Zadanie

Pokazać dla zamkniętej powierzchni S i stałego pola $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{v}$ wzór

$$2 \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

gdzie jak zwykle $\mathbf{r}$ jest polem wektorowym punktu wodzącego.

Przykład 24.2.2 $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}) \neq 0$. Zbiór $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ jest jednospójny. Weźmy 2 formę

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy).$$

Jest to 2-forma odpowiadająca polu wektorowemu grawitacyjnemu. Łatwo sprawdzamy, że

(1) $d\omega = 0$, skąd forma ω wyznacza klasę kohomologii $[\omega] \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\})$.

(2) dla sfery S^2 (może być dowolny promień)

$$\int_{S^2} \omega \neq 0.$$

Wiemy z wniosku z tw. Stokesa że gdyby $\omega = d\eta$ to $\int_{S^2} d\eta = 0$. Zatem forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\})$ nie jest dokładna! Oznacza, to że klasa kohomologii $[\omega]$ nie jest zerowa! czyli $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}) \neq 0$. Oznacza to także, że pole wektorowe

$\mathbf{F} = \left[\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right]$ chociaż w $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ ma zerową dywergencję to nie posiada globalnie potencjału wektorowego.

24.3 Wykorzystanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego

24.4 Zadania praktyczne

Zadanie

Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S (2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$, gdzie S jest sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz. Odp. $\frac{8\pi}{3}$.

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ przez powierzchnię całkowitą walca $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, zorientowaną na zewnątrz. Odp. π

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{V} = [x^3, y^3, z^3]$ przenikający na zewnątrz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Odp. $\frac{12\pi}{5}$.

Zadanie

Znaleźć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = [x, y, z]$ przenikający przez na zewnątrz sfery jednostkowej $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (a) bezpośrednio, (b) za pomocą Tw.G-0.

Zadanie

Niech $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Obliczyć $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla każdego obszaru ograniczonego poniższymi powierzchniami

(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$,

(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$,

(c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \leq 0$.

Zadanie

Obliczyć $\iint_M xyzi \cdot d\mathbf{S}$, gdzie M jest powierzchnią całkowitą walca $x^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 10$, zorientowaną do wewnątrz.

24.5 Zadania teoretyczne

Zadanie

Wykazać równość

$$\iiint_W (\nabla f) \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial W} f \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS - \iiint_W f \cdot \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Zadanie

Wykazać identyczności Greena:

(a) $\iint_{\partial W} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$,

(b) $\iint_{\partial W} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$.

Zadanie

Ustalmy k wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ i rozważmy k ładunków elektrycznych $q_1, \dots, q_k$ umieszczonych odpowiednio w $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Weźmy funkcję

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|}, \quad \text{gdzie } \mathbf{r} = [x, y, z].$$

Pokazać, że dla zamkniętej powierzchni S na której nie leży żaden ładunek i pola $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ zachodzi

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

gdzie Q jest sumą ładunków leżących wewnątrz S .

25 ZASTOSOWANIA TWIERDZEŃ CAŁKOWYCH

25.1 Cyrkulacja a rotacja

W teorii pola wektorowego wspomnieliśmy, że $\text{rot } \mathbf{F}$ ma związek z efektami obrotowymi pola $\mathbf{F}$. Oto wyjaśnienie dokładne tego związku będące konsekwencją Tw. Stokesa.

Twierdzenie 25.1.1 *Niech C_ε będzie okręgiem o promieniu ε i środku w punkcie $\mathbf{x}_o$ prostopadłym do wektora jednostkowego $\mathbf{n}$. Orientujemy C_ε w/g rysunku: [zrobić sobie proszę samemu]*

Niech $\mathbf{F}$ będzie polem wektorowym określonym w obszarze zawierającym $\mathbf{x}_o$. Wtedy

$$(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.1.1)$$

Oznacza to, że rzut rotacji $(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_o)$ na kierunek $\mathbf{n}$ może być interpretowany jako cyrkulacja pola $\mathbf{F}$ po brzegu jednostkowego obszaru leżącego w płaszczyźnie normalnej do $\mathbf{n}$ (we wzorze powyższym $\pi \varepsilon^2$ jest polem koła ograniczonego przez okrąg C_ε).

Dowód. Oznaczmy przez S_ε dysk (tzn. koło) o środku w $\mathbf{x}_o$ i promieniu ε leżący w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{n}$. Oczywiście $C_\varepsilon = \partial S_\varepsilon$. Z Tw. Stokesa

$$\iint_{S_\varepsilon} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\varepsilon} (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Z Tw. o wartości średniej dla całki podwójnej wynika istnienie punktu $\mathbf{x}_\varepsilon \in S_\varepsilon$ takiego, że

$$\iint_{S_\varepsilon} (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = ((\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}) \cdot |S_\varepsilon|.$$

Stąd

$$(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|S_\varepsilon|} \cdot \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dla $\varepsilon \rightarrow 0$ zachodzi $\mathbf{x}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{x}_o$. Zatem

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

■

Wniosek 25.1.1 Z wzoru (25.1.1) wynika, że

- *jeśli cyrkulacja pola wzdłuż każdego łuku zamkniętego jest zerowa, to pole wektorowe jest bezwirowe.*

Na odwrót wiemy, że nie zachodzi. Pole wektorowe bezwirowe może mieć niezerową cyrkulację (np. $\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$, chyba, że jest określone w obszarze jednospójnym !

Zadanie

Sprawdzić prawdziwość powyższego wzoru dla pola wektorowego opisującego ruch obrotowy.

25.2 Dywergencja a strumień

Wykorzystamy Tw. Gaussa-Ostrogradskiego do podania fizycznej geometrycznej interpretacji dywergencji.

Twierdzenie 25.2.1 *Jeśli B_r jest kulą o promieniu r i środku w punkcie $\mathbf{x}_o$ oraz brzegu $S_r = \partial B_r$ zorientowanym na zewnątrz, to dla dowolnego pola $\mathbf{F}$ określonego w otoczeniu punktu $\mathbf{x}_o$ dywergencja pola $\mathbf{F}$ w $\mathbf{x}_o$ jest dana wzorem*

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \cdot \iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (25.2.1)$$

Dowód tego twierdzenia przebiega podobnie do dowodu Tw. (25.1.1). Wykorzystuje się tu Tw. G-O i twierdzenie o wartości średniej dla całki potrójnej.

Uwaga 25.2.1 Wzór (25.2.1) orzeka, że dywergencja $(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o)$ pola $\mathbf{F}$ w punkcie $\mathbf{x}_o$ może być interpretowana jako strumień pola $\mathbf{F}$ wypływający z zamkniętej jednostkowej objętości zawierającej $\mathbf{x}_o$. W przypadku interpretacji hydromechanicznej i pola $\mathbf{F}$ opisującego prędkość przepływu cieczy wyjaśnia to nazwy punktów "źródło" i "ujście".

Wniosek 25.2.1 Z wzoru (25.2.1) wynika, że

- *pole wektorowe dla którego strumień przez każdą powierzchnię zamkniętą jest zerowy ma znikającą dywergencję,*

Na odwrót wiemy, że nie zachodzi. Pole wektorowe bezźródłowe może mieć niezerowy strumień przez zamkniętą powierzchnię (np. pole grawitacyjne $\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3} \cdot \mathbf{r}$) chyba, że jest określone w obszarze gwiaździstym. Zauważmy dodatkowo, że jednospójność obszaru nie wystarcza do równoważności bezźródłowości ze znikaniem strumienia, np. ww wspomnianym zadaniu dziedziną pola jest przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z usuniętym punktem a ten zbiór jest jednospójny!

26 Zastosowania Tw. Stokesa w elektromagnetyzmie

Rachunek wektorowy gra istotną rolę w teorii elektromagnetyzmu.

26.1 Równanie Maxwella

W zamkniętym obwodzie C zbudowanym z przewodnika pojawiają się prądy elektryczne (zwane indukcyjnymi), jeżeli przez powierzchnię S ograniczoną obwodem przenika zmienny strumień magnetyczny. Natężenie prądu indukowanego zależy jedynie od szybkości zmian strumienia magnetycznego (jest to tzw. *zjawisko indukcji elektromagnetycznej Faradaya*). Przykładowo, zjawisko to ma miejsce gdy do obwodu zbliżamy i oddalamy stały magnes.

Zmienne w czasie natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(t)$ i pole wektorowe indukcji magnetycznej $\mathbf{B}(t)$ związane są ze sobą jednym z **równań Maxwella**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (26.1.1)$$

26.2 Prawo Faradaya

Związek między cyrkulacją natężenia pola elektrycznego wzdłuż obwodu C (nazywane też “spadkiem napięcia wzdłuż”) a strumieniem indukcji pola magnetycznego przez powierzchnię S ograniczoną obwodem C wyraża równanie zwane *prawem Faradaya*:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Łatwo jest uzasadnić to prawo korzystając z równania Maxwella (26.1.1) i Tw. Stokesa. Z Tw. Stokesa dostajemy

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Korzystając z równania Maxwella (26.1.1) i zakładając, że znamy prawo matematyczne wchodzenia z różniczkowaniem pod znak całki otrzymujemy

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

26.3 Prawo Gaussa c.d.

Podstawą wykazania Prawa Gaussa jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 26.3.1 Niech W będzie obszarem w $\mathbb{R}^3$ dla którego początek układu współrzędnych $(0, 0, 0)$ nie leży na brzegu ∂W . Wtedy

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{jeśli } (0, 0, 0) \in W \\ 0 & \text{jeśli } (0, 0, 0) \notin W, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ jest wektorem wodzącym punktu (x, y, z) a $r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dowód. Jeśli $(0,0,0) \notin W$ to powyższy wzór wynika bezpośrednio z Tw. Gaussa-Ostrogradskiego o dywergencji

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = 0$$

bo pole $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ma zerową dywergencję. Istotnie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \operatorname{div} (\mathbf{r}) + \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gdyż $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ oraz

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \dots, \dots \right] = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) 2x, \dots, \dots \right] \\ &= \left[-3 \frac{x}{r^5}, -3 \frac{y}{r^5}, -3 \frac{z}{r^5} \right] \\ &= -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}. \end{aligned}$$

Jeśli $(0,0,0) \in W$ to argumentacja powyższa jest fałszywa, bo pole $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ nie jest określone w punkcie $(0,0,0)$. W tym przypadku weźmy małą kulkę B o środku w $(0,0,0)$ i promieniu r_o całkowicie zawartą wewnątrz obszaru W i oznaczmy przez $\tilde{W}$ obszar przestrzenny zawarty między ∂W i ∂B . Oczywiście $(0,0,0) \notin \tilde{W}$. Orientujemy brzeg ∂B kulki B standardowo przez pole wektorowe skierowane na zewnątrz kulki, jednakże wtedy – jako część brzegu obszaru $\tilde{W}$ – jest to powierzchnia zorientowana ujemnie (gdyż kulka B leży na zewnątrz obszaru $\tilde{W}$). Stosujemy pierwszą część dowodu dla obszaru $W = \tilde{W}$

$$0 = \iint_{\partial \tilde{W}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS - \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS.$$

Stąd

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

gdyż na brzegu ∂B sfery B o promieniu r_o zachodzi $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{r(x,y,z)}$ i dlatego

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

oraz

$$\iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial B} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r_o^2} \cdot |\partial B| = \frac{1}{r_o^2} \cdot 4\pi r_o^2 = 4\pi.$$

26.4 Dowód Prawa Gaussa

Potencjałem w punkcie (x, y, z) pola elektrycznego indukowanego przez ładunek elektryczny Q umieszczony w środku układu współrzędnych jest (patrz prawo Coulomba

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Pole elektryczne $\mathbf{E}$ wyznaczone jest swoim potencjałem V jednoznacznie jako pole skierowane w stronę największego spadku potencjału V

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Z Tw (26.3.1) wnosimy, że strumień pola elektrycznego $\mathbf{E}$ wypływający z powierzchni zamkniętej ∂W nie przechodzącej przez $(0, 0, 0)$ wynosi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial W} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \right) dS \\ &= \iint_{\partial W} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{jeśli } (0, 0, 0) \in W \\ 0 & \text{jeśli } (0, 0, 0) \notin W. \end{cases} \end{aligned}$$

Jest to treść prawa Gaussa.

26.5 Ciągłe pole ładunków elektrycznych i równanie Maxwella

Rozważmy teraz ciągłe pole ładunków elektrycznych o gęstości $\rho(x, y, z)$. Jedno z **równań Maxwella** dla takiego pola ustanawia związek natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ wywołanego ciągłym polem ładunków z jego gęstością ρ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Stosując Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego dostajemy

$$\iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_W \rho(x, y, z) dV.$$

Liczba $Q = \iiint_W \rho(x, y, z) dV$ wyraża całkowity ładunek elektryczny objęty powierzchnią ∂W .

26.6 Objętość obszaru przestrzennego

Tw. G-O może również służyć do obliczania objętości obszaru przestrzennego W , analogicznie jak Tw. Greena może służyć do obliczania pola powierzchni płaskiej. Mianowicie, objętość $|W|$ obszaru przestrzennego ograniczonego zamkniętą powierzchnią ∂W dodatnio zorientowaną jest równa całce powierzchniowej pola wektorowego $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ którego dywergencja $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ jest tożsamościowo równa 1 :

Twierdzenie 26.6.1 (Objętość obszaru przestrzennego) Jeśli $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$ to

$$|W| = \iiint_W dV = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Na przykład polami wektorowymi $\mathbf{F}$ o dywergencji równej 1 są $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$, $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, ..., $\mathbf{F} = \frac{1}{3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, itp. Dlatego zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 26.6.2 (Objętość obszaru przestrzennego, wzory konkretne) Jeśli zamknięta po-wierzchnia S jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru przestrzennego W [S może składać się z kilku "części"] to objętość $|W|$ obszaru W równa się

$$|W| = \iint_S x\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S y\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{3} \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Przykład 26.6.1 Załóżmy, że parametryzacją dodatnią powierzchni zamkniętej S jest $\Phi(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$, $(t, u) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy

$$x(t, u) \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = x(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Stąd, objętość obszaru W ograniczonego powierzchnią S równa się

$$|W| = \iiint_W dV = \iint_S x\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D x(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt du.$$

Analogicznie możemy wyprodukować inne wzory wyrażające objętość obszaru W wychodząc od innego pola $\mathbf{F}$ o dywergencji 1, np. $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$ lub $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} |W| &= \iiint_W dV = \iint_S y\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D y(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt du, \\ |W| &= \iiint_W dV = \iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D z(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} dt du. \end{aligned}$$

26.7 Zadania praktyczne

Zadanie

Powtarzając rozumowanie z przykładu (26.6.1) (aby utrwalić teorię całki krzywoliniowej i wzór G-O) obliczyć objętość torusa o dużym promieniu R i małym r . Odp. $2\pi^2 Rr^2$ - tyle samo ile wynosi objętość walca powstałego z przecięcia torusa wzdłuż małego okręgu i jego "wyprostowania".

Zadanie *

(Wykorzystanie wzoru G-O w drugą stronę) Obliczyć $\iiint_W x^2 dx dy dz$ po obszarze ograniczonym paraboloidą eliptyczną $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ i płaszczyzną $z = 1$. (Znaleźć pole $\mathbf{F}$ którego dywergencją jest funkcja x^2 i zastosować wzór G-O). Odp. $\frac{\pi}{6}$.

26.8 Zadania teoretyczne

Zadanie

Wykorzystując ostatni z napisanych wyżej wzorów rozwiązać następujące zadanie:
Dana jest zamknięta krzywa w płaszczyźnie OYZ o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} y = y(t) > 0, \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Obracamy ją dookoła osi OZ otrzymując powierzchnię obrotową o parametryzacji

$$\Phi(t, u) = (y(t) \sin u, y(t) \cos u, z(t)), \quad u \in [0, 2\pi], \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Obliczyć objętość otrzymanej bryły obrotowej W . Odp. $|W| = -2\pi \int_{\alpha}^{\beta} z(t) y'(t) y(t) dt$.