

1 Qaterniony

1.1 Algebra quaternionów

Niech H będzie zorientowaną 4-wymiarową (nad $\mathbb{R}$) prz. wektorową z iloczynem skalarnym $\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ i wyróżnionym elementem e jednostkowym (o długości 1 względem $\langle, \rangle$). Określamy

$$K = e^\perp$$

ortogonalne uzupełnienie $\text{Lin}(e)$ do H , $H = \text{Lin}(e) \oplus K$. Orientujemy K przez bazę e_1, e_2, e_3 tak, aby (e, e_1, e_2, e_3) należało do zadanej orientacji H . Niech $\times : K \times K \rightarrow K$ będzie iloczynem wektorowym w K . Definiujemy odwzorowanie dwuliniowe nad $\mathbb{R}$

$$\phi : H \times H \rightarrow H$$

wzorem

$$\phi(p, q) = p \cdot q = \begin{cases} -\langle p, q \rangle \cdot e + p \times q, & \text{gdy } p, q \in K \\ q \cdot p = p, & \text{gdy } q = e. \end{cases}$$

Definition 1 Układ $\mathbb{H} = (H, \phi)$ tworzy 4-wymiarową $\mathbb{R}$ -algebrę quaternionów. Każdy quaternion q jest postaci

$$q = a \cdot e + p$$

dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $p \in K$. Oznaczamy

$$\begin{aligned} a &= \text{Re } q \\ p &= \text{Im } q. \end{aligned}$$

Elementy z K nazywamy czystymi quaternionami. Elementy z $\text{Lin}(e)$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi.

Exercise 2 $\mathbb{H}$ jest algebrą łączną, z rozdzielnością mnożenia względem dodawania, oraz nie jest algebrą przemenną. Np.

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= -\langle p_1, p_2 \rangle \cdot e + p_1 \times p_2 = -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e + p_1 \times p_2 \\ p_2 \cdot p_1 &= -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e + p_2 \times p_1 = -\langle p_2, p_1 \rangle \cdot e - p_1 \times p_2 \neq p_1 \cdot p_2. \end{aligned}$$

Definition 3 Sprzężenie quaternionowe

$$\overline{a \cdot e + p} = a \cdot e - p.$$

Exercise 4 Sprzężenie ma własności a) $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 + \|p\|^2 \geq 0$ ($q \cdot \bar{q} \in \text{Lin}(e) = \mathbb{R}$) b) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$, c) $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$, d) $\langle q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{2}(q_1 \cdot \bar{q}_2 + q_2 \cdot \bar{q}_1) = \text{Re}(q_1 \cdot \bar{q}_2)$.

Definition 5 Norma quaternionowa

$$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}.$$

Exercise 6 Własności normy 1) $|q| \geq 0$, 2) $|q| = 0$ gdd $q = 0$, 3) $|q + q'| \leq |q| + |q'|$, 4) $|q| = |\bar{q}|$, 5) $\langle p \cdot r, q \cdot r \rangle = \langle p, q \rangle \cdot |r|^2$ $p, q, r \in \mathbb{H}$, [zachodzi także dla zespolonych (i rzeczywistych) co sprawdzamy bezpośrednio] 6) $|pr| = |p| \cdot |r|$, $p, r \in \mathbb{H}$, 7) $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\langle q, q \rangle}$.

Exercise 7 (Twierdzenie) Algebra quaternionów $\mathbb{H}$ ma własności

a) jest algebrą z dzieleniem (tzn. równania $q_2 \cdot x = q_1$ oraz $x \cdot q_2 = q_1$ mają dokładnie po jednym rozwiązaniu).

b) nie ma dzielników zera, tzn. jeśli $q_1 \cdot q_2 = 0$ i $q_1 \neq 0$ to $q_2 = 0$.

c) $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ z mnożeniem quaternionowym jest grupą i to grupą Liego bo mnożenie ϕ jest gładkie.

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

d) [przypomnijmy: Elementy z $\text{Lin}(e)$ utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi] Kładziemy $q^2 = q \cdot q$.

Jeśli $q \neq 0$ jest quaternionem czystym ($q \in K$) to $q^2 = -\langle q, q \rangle < 0$ ($q^2 \in \text{Lin}(e) = \mathbb{R}$),

Jeśli $|q| = 1$ i q jest czysty to $q^2 = -1$.

Exercise 8 Pokazać, że zbiór macierzy 2×2 quaternionowych o wyznaczniku 1 nie tworzy grupy.

1.2 Grupa jednostkowych quaternionów

Rozważmy $\mathbb{R}^4$ ze zwykłym iloczynem skalarnym i wyróżnionym elementem $e = (1, 0, 0, 0)$. Wtedy $K = e^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ rozważana jest z dodatnią orientacją przez wersory osi współrzędnych e_1, e_2, e_3 . Niech $\mathbb{H}$ będzie algebrą quaternionów dla powyższego iloczynu skalarnego. Mnożenie kwaternionowe w K pokrywa się z iloczynem wektorowym $\times$. Łatwo sprawdzamy, że $(\mathbb{R}^3, \times)$ jest algebrą Liego.

Z własności normy $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{a^2 + \|p\|^2}$ dla $q = a \cdot e + p$, $a \in \mathbb{R}$, $p \in K$, gdy $q = a_0 \cdot e + \sum_{i=1}^3 a_i \cdot e_i$ mamy

$$|q| = \sqrt{\sum_{i=0}^3 (a_i)^2} = \|(a_0, \dots, a_3)\| \text{ -zwykła norma w } \mathbb{R}^4$$

Zatem $\{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\} = S^3$. Ponieważ mnożenie quaternionowe w ramach quaternionów jednostkowych dzięki własności 6) normy nie wyprowadza poza quaterniony jednostkowe oraz S^3 jest hiperpowierzchnią, to mnożenie quaternionowe w S^3 wprowadza strukturę grupy Liego w sferę S^3 . Przestrzeń styczna do sfery w jedyne $T_e S^3 = e^\perp = K$ czyli jest równa K . Dlatego algebrą Liego tej grupy Liego będzie algebra Liego $(\mathbb{R}^3, \times)$.

Zauważmy, że także w prostszej sytuacji $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ dla $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, skąd $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = S^1$ i mnożenie zespolone nie wyprowadza poza jednostkowe, więc S^1 jest grupą Liego względem mnożenia liczb zespolonych.

Remark 9 W zasadzie nie podałem wcześniej formalnej definicji algebry Liego grupy Liego więc jest luka. Robi się to tak: każde pole wektorowe X na rozmaitości M określa różniczkowanie algebry funkcji gładkich $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $(Xf)_p = (df)_p(X_p)$, i odwrotnie; dlatego najpierw na dowolnej hiperpowierzchni (rozmaitości) wprowadzmy nawias Liego pól wektorowych stycznych $[X, Y]$ jako pole które na funkcji gładkiej f jest równe $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Pokazujemy że jest to różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$ a więc jest polem. Następnie sprawdzamy, że pola z nawiasem tworzą algebrę Liego. Na grupie Liego rozważamy tzw. pola prawo (albo lewo) niezmiennicze, następnie zauważamy że nawias Liego pól prawych (lewych) jest polem prawnym (lewym). Algebra Liego pól prawych (lewych) na grupie Liego nazywa się algebrą prawną (lewą) grupy Liego. W końcu łatwo obserwujemy, że wektor styczny w jedyńce grupy Liego rozszerza się jednoznacznie do pola prawego (lewego) na całej grupie Liego. Zatem wymiar algebry Liego grupy Liego jest równy wymiarowi grupy Liego, co więcej w przestrzeń styczną do jedyńki wprowadzamy algebrę Liego tak, aby była izomorficzna z algebrą pól prawych (albo lewych). Na $GL(n, \mathbb{R})$ przestrzeń styczna w jedyńce to po prostu $\mathbb{R}^{n^2} = \text{End}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i pokazuje się rachunkiem, że algebra Liego grupy $GL(n, \mathbb{R})$ jest zadana jako algebra endomorfizmów z nawiasem $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Takim samym rachunkiem pokazujemy, że algebra Liego grupy Liego niezerowych quaternionów $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ma algebrę Liego $\mathbb{R}^4$ z mnożeniem $[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha$. Stąd rzeczywiście algebra Liego grupy Liego S^3 będzie podalgebrą Liego K z mnożeniem wektorowym.

1.3 Grupa quaternionowa $Q(n)$.

Niech $\Gamma = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i rozważmy n -wymiarową Γ -przestrzeń wektorową Γ^n z mnożeniem przez skalary po współrzędnych z lewej strony $p \cdot (x^1, \dots, x^n) = (p \cdot x^1, \dots, p \cdot x^n)$.

Przestrzeń Γ^n ma także oczywiście strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej która oznaczmy przez $\Gamma_{\mathbb{R}}^n$ (dla $\Gamma = \mathbb{C}$ ma ona wymiar $2n$, zaś dla $\Gamma = \mathbb{H}$ ma wymiar $4n$). W przestrzeń Γ^n wprowadzmy kanoniczne iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$

a) gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ to zwykły iloczyn skalarny rzeczywisty $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n x^i \cdot y^i$, $x^i, y^i \in \mathbb{R}$,

b) gdy $\Gamma = \mathbb{C}$ to iloczyn skalarny hermitowski $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^n z^i \cdot \overline{w^i}$, $z^i, w^i \in \mathbb{C}$,

c) gdy $\Gamma = \mathbb{H}$ to iloczyn skalarny quaternionowy $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^n p^i \cdot \overline{q^i}$, $p^i, q^i \in \mathbb{H}$.

Remark 10 Zauważamy /CW/, że $\text{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : \Gamma_{\mathbb{R}}^n \times \Gamma_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest rzeczywistym iloczynem skalarnym. Dla $n = 1$ z własności (d) sprzężenia otrzymujemy związek z wyjściowym rzeczywistym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w H :

$$\text{Re} \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \text{Re} (q_1 \cdot \overline{q_2}) = \langle q_1, q_2 \rangle, \quad q_i \in H$$

a dalej z indukowanym w potęgde $H^n / q^i = q_0^i e + \Sigma q_j^i e_j \in \Gamma$, $q_j^i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle (q_1^1, \dots, q_1^n), (q_2^1, \dots, q_2^n) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \operatorname{Re} \Sigma_i q_1^i \cdot \overline{q_2^i} \quad / \text{liniowość operatora } \operatorname{Re} \\ &= \Sigma_i \operatorname{Re} q_1^i \cdot \overline{q_2^i} = \Sigma_i \langle q_1^i, q_2^i \rangle = \Sigma_{ij} (q_1^i)_j \cdot (q_2^i)_j \end{aligned}$$

Dlatego norma quaternionowa $|(q^1, \dots, q^n)|$ elementu $(q^1, \dots, q^n) \in \Gamma^n$ to po prostu zwykła euklidesowa norma po wszystkich współrzędnych ponieważ $q \cdot \bar{q}$ jest rzeczywisty, $q \cdot \bar{q} = \operatorname{Re}(q \cdot \bar{q})$,

$$\begin{aligned} & |(q^1, \dots, q^n)| \\ &= \sqrt{\langle (q^1, \dots, q^n), (q^1, \dots, q^n) \rangle_{\mathbb{H}}} = \sqrt{\Sigma_i q^i \cdot \overline{q^i}} = \sqrt{\Sigma_i \operatorname{Re}(q^i \cdot \overline{q^i})} \\ &= \sqrt{\Sigma_{ij} (q^i)_j \cdot (q^i)_j} = \sqrt{\Sigma_{ij} \left((q^i)_j \right)^2} = \|(q_0^1, q_1^1, q_2^1, q_3^1, \dots, q_0^n, q_1^n, q_2^n, q_3^n)\|. \end{aligned}$$

Dlatego sfera w Γ^n względem normy quaternionowej $\{q \in \Gamma^n; |q| = 1\}$ jest sferą S^{4n-1} w $\mathbb{R}^{4n}$.

Tak samo dla zespolonych sfera w $\mathbb{C}^n$ względem normy hermitowskiej jest sferą S^{2n-1} w $\mathbb{R}^{2n}$. (W $\Gamma = \mathbb{R}$ sfera to sfera S^{n-1})

Dla $n+1$ (będzie użyteczne dalej) sfera w Γ^{n+1} jest równa odpowiednio

$$\begin{aligned} S^n &\subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^{2n+1} &\subset \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^{4n+3} &\subset \mathbb{H}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Definition 11 Odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe $\alpha : \Gamma^n \rightarrow \Gamma^n$ nazywamy

(a) Γ -liniowe (odpowiednio $\mathbb{R}$ -liniowe, $\mathbb{C}$ -liniowe, quaternionowe) jeżeli

$$\alpha(q \cdot x) = q \cdot \alpha(x), \quad q \in \mathfrak{d}, x \in \Gamma^n.$$

(b) Γ -izometrią (izometrią, izometrią unitarną, izometrią quaternionową) jeżeli

$$\langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_{\Gamma} = \langle x, y \rangle_{\Gamma}, \quad x, y \in \Gamma^n.$$

Exercise 12 (Tw) Na to aby $\alpha : \Gamma^n \rightarrow \Gamma^n$ było Γ -izometrią potrzeba i wystarcza aby α było Γ -liniowe oraz aby

$$\operatorname{Re} \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_{\Gamma} = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle_{\Gamma},$$

tzn. aby $\alpha \in O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$ - grupa obrotów rzeczywistej przestrzeni $\Gamma_{\mathbb{R}}^n$.

Exercise 13 Wszystkie Γ -izometrie przestrzeni Γ^n tworzą grupę i jest to domknięta podgrupa w zwartej grupie obrotów $O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$, zatem sama jest zwarta (i Liego). Gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ oznaczamy grupę $O(n)$ [obroty właściwe zachowujące orientację mają wyznacznik +1 i tworzą grupę Liego $SO(n)$], gdy $\Gamma = \mathbb{C}$ oznaczamy grupę $U(n)$ i nazywamy unitarną, gdy $\Gamma = \mathbb{H}$ oznaczamy $Q(n)$ i nazywamy quaternionową. Stąd $U(n)$ i $Q(n)$ jako dpmknięte podgrupy w $O(\Gamma_{\mathbb{R}}^n)$ są zwarte.

Exercise 14 Wybierzmy w Γ^n bazę wersorów. Utożsamijmy każdy obrót z $O(n)$, $U(n)$, $Q(n)$ z macierzą względem tej bazy. Wówczas

$$\begin{aligned} A &\in O(n) \iff A^T \cdot A = \mathbf{1}, \quad O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}), \\ A &\in SO(n) \iff A^T \cdot A = \mathbf{1}, \quad \det A = +1, \quad O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\in U(n) \iff A^T \cdot \bar{A} = \mathbf{1}, \quad U(n) \subset GL(n, \mathbb{C}), \\ A &\in Q(n) \iff A^T \cdot \bar{A} = \mathbf{1}, \quad Q(n) \subset GL(n, \mathbb{H}). \end{aligned}$$

Niech $n = 1$.

Lemma 15 Odwzorowanie $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ jest Γ -liniowe gdd $\alpha(q) = q \cdot \alpha(1)$.

Kiedy $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ dane wzorem $\alpha(q) = q \cdot p$ dla pewnego $p \in \Gamma$ jest Γ -izometrią?

Z własności (5) normy quaternionowej (zespólonej, rzeczywistej) otrzymujemy

Lemma 16 $\alpha : \Gamma \rightarrow \Gamma$ dane wzorem $\alpha(q) = q \cdot p$ dla pewnego $p \in \Gamma$ jest Γ -izometrią gdd $|p| = 1$.

Istotnie, bycie Γ -izometrią oznacza bycie Γ -liniowe i izometrią względem wyjściowego rzeczywistego iloczynu skalarnego $\operatorname{Re} \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \operatorname{Re} (q_1 \cdot \bar{q}_2) = \langle q_1, q_2 \rangle$, co pozwala stosować (5) dla normy: $\langle \alpha(q), \alpha(q') \rangle = \langle q, q' \rangle \iff \langle q \cdot p, q' \cdot p \rangle = \langle q, q' \rangle \iff \langle q, q' \rangle \cdot |p|^2 = \langle q, q' \rangle \iff |p| = 1$.

Conclusion 17 Dla $\Gamma = \mathbb{R}$ mamy $O(1) \cong \{-1, +1\}$,

Dla $\Gamma = \mathbb{C}$ mamy $U(1) \cong \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = S^1$, $U(1) = SO(2)$ - obroty właściwe $\mathbb{R}^2$.

Dla $\Gamma = \mathbb{H}$ mamy $Q(1) \cong \{p \in \mathbb{H}, |p| = 1\} = S^3$.

Izomorfizmami grup Liego są

(a) $\gamma : O(1) \rightarrow \{-1, +1\}$, $\gamma(\alpha) = \alpha(1)$,

(b) $\gamma : U(1) \rightarrow S^1$, $\gamma(\alpha) = \alpha(1)$ oraz na jedno wychodzi $\gamma_1(\alpha) = \overline{\alpha(1)}$ (bo mnożenie liczb zespolonych jest przemienne),

$\gamma(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \underline{\beta(1)} \cdot \underline{\alpha(1)} = \underline{\alpha(1)} \cdot \underline{\beta(1)} = \underline{\gamma(\alpha)} \cdot \underline{\gamma(\beta)}$, tak samo ze sprzężeniem $\gamma_1(\alpha\beta) = \overline{(\alpha\beta)(1)} = \overline{\alpha(\beta(1))} = \overline{\beta(1)} \cdot \overline{\alpha(1)} = \overline{\alpha(1)} \cdot \overline{\beta(1)} = \gamma_1(\alpha) \cdot \gamma_1(\beta)$.

(c) $\gamma : Q(1) \rightarrow S^3$, musi być ze sprzężeniem bo sprzężenie iloczynu quaternionów przemienia liczby

$$\gamma_1(\alpha\beta) = \overline{(\alpha\beta)(1)} = \overline{\alpha(\beta(1))} = \overline{\beta(1)} \cdot \overline{\alpha(1)} = \overline{\alpha(1)} \cdot \overline{\beta(1)} = \gamma(\alpha) \cdot \gamma(\beta).$$

1.4 Związek grupy Liego S^3 z grupą obrotów przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Traktujmy $\mathbb{R}^3$ jako $K = e^\perp \subset \mathbb{H}$. Rozważmy dla punktu $p \in S^3$ odwzorowanie

$$\tau_p : K \rightarrow K, \quad x \mapsto pxp^{-1}.$$

Theorem 18 a) pxp^{-1} dla $p \in S^3$ jest czystym quaternionem, $pxp^{-1} \in K$,
b) τ_p jest obrotem przestrzeni K , $\langle \tau_p(x), \tau_p(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, tzn. $\tau_p \in O(3)$,
c) $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest homomorfizmem grup, $\tau(p \cdot q) = \tau(p) \cdot \tau(q)$,
d) $\tau : S^3 \times K \rightarrow K$, $(p, x) \mapsto pxp^{-1}$, jest gładkie, skąd $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest gładkim homomorfizmem grup Liego, a że S^3 jest spójna, to jego wartości muszą leżeć w spójnej składowej jedynki grupy Liego $O(3)$ czyli w $SO(3)$, tzn. τ_p jest obrotem właściwym,
e) $\tau(p) = \tau(-p)$,
f)* $\tau : S^3 \rightarrow O(3)$ jest surjekcją i $\ker \tau = \{e, -e\}$, skąd warstwami S^3 względem $\ker \tau$ są zbiory punktów antypodycznych $p \cdot \{e, -e\} = \{p, -p\}$.

W takim razie $S^3 / \ker \tau \cong SO(3)$. Jak zrobić rozmaitość $S^3 / \ker \tau$? Otóż w S^3 wprowadzamy relację równoważności $\cong$ utożsamiającą punkty antypodyczne $p \cong -p$. Tworzymy przestrzeń ilorazową $S^3 / \cong$ z której trzeba zrobić rozmaitość. Utożsamienie na sferze punktów antypodycznych tworzy tzw. przestrzeń (rozmaitość) rzutową $\mathbb{R}P^3$. Niech $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ będzie kanonicznym rzutowaniem, wówczas istnieje bijekcja (dyfeomorfizm) σ

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\tau} & SO(3) \\ \downarrow & \nearrow \sigma & \\ \mathbb{R}P^3 & & \end{array}$$

Tak oto przydały się quaterniony do zobaczenia grupy obrotów właściwych w $\mathbb{R}^3$: jest to jako rozmaitość tzw. przestrzeń rzutowa rzeczywista 3-wymiarowa $\mathbb{R}P^3$. Darujemy sobie dojście do grupy obrotów $\mathbb{R}^4 : SO(4)$ jako rozmaitość jest dyfeomorficzna z $\mathbb{R}P^3 \times S^3$.

Przestrzeń $\mathbb{R}P^3 = S^3 / \cong$ można odtworzyć bardziej "liniowo", mianowicie przez dwa punkty antypodyczne $\{p, -p\}$ przechodzi dokładnie jedna prosta przechodząca przez 0 (a więc 1-wym podprzestrzeń wektorową). Można by zatem pomyśleć, aby w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zawierającą sferę S^3 utożsamiać/ściągnąć proste przechodzące przez 0 (czyli 1-wymiarowe podprzestrzenie wektorowe) do punktu. Ale wszystkie takie proste zawierają wektor zerowy, więc trzeba go usunąć przed utożsamieniami. Bierzymy zatem $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ i wprowadzamy relację utożsamiającą punkty na prostej przechodzącej przez 0 (dwa niezerowe wektory x, y leżą w tej samej 1-wym podprz wektorowej gdd y gdy są proporcjonalne)

$$x \cong y \iff \exists_{\mathbb{R} \ni t \neq 0} (y = tx).$$

Zauważymy, że przestrzenie ilorazowe $S^3 / \cong$ i $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$ są homeomorficzne.

Lemma 19 *Odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \rho & : S^3 / \cong \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong \\ \rho([x]) & = [x] \end{aligned}$$

jest homeomorfizmem. Odwrotne dane jest wzorem

$$\rho^{-1}([x]) = \left[\frac{x}{\|x\|} \right].$$

Proof. Rozważmy kanoniczne rzutowania $\pi_1 : S^3 \rightarrow S^3 / \cong$, $\pi_2 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$, topologia ilorazowa jest najsilniejsza przy których rzutowania są ciągłe. Aby sprawdzić, czy ρ jest ciągłe wystarczy złożyć z rzutowaniem π_1 i rozważyć diagram w którym $\rho_1 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ jest inkluzją

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} & & \\ & \nearrow \rho_1 & & \searrow \pi_2 & \\ S^3 & \xrightarrow{\pi_1} & S^3 / \cong & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong \end{array}$$

Otóż, ρ jest ciągłe gddy $\rho \circ \pi_1$ jest ciągłe, ale $\rho \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \rho_1$ jest ciągłe.

Teraz odwrotnie, rozważmy ciągłe odwzorowanie $\rho_2 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow S^3$, $\rho_2(x) = \frac{x}{\|x\|}$ i diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 & & \\ & \nearrow \rho_2 & & \searrow \pi_1 & \\ \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong & \xrightarrow{\rho^{-1}} & S^3 / \cong \end{array}$$

■

Niżej zbiór (który okaże się rozmaiłością) 1-wymiarowych rzeczywistych prostych $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} / \cong$ w $\mathbb{R}^4$ uogólnimy na k -wymiarowe Γ -płaszczyzny przechodzące przez 0 w n -wymiarowej Γ -przestrzeni wektorowej Γ^n

$$(\Gamma^n \setminus \{0\}) / \cong$$

gdzie dla $\Gamma^n \ni x, y \neq 0$

$$x \cong y \iff \exists_{\Gamma \ni q \neq 0} (y = qx).$$

Gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ i $n = 4$, $k = 1$, otrzymamy to co wyżej.

2 Grassmanniany, w szczególności przestrzenie rzutowe

2.1 Grassmanniany

Definition 20 k -płaszczyzną [przechodzącą przez 0 - co dla skrótu będziemy pomijać] w Γ^n nazywamy Γ -podprzestrzeń w Γ^n Γ -wymiaru k . Oznaczamy przez $G_\Gamma(n, k)$ zbiór k -wymiarowych Γ -płaszczyzn w Γ^n . Dodatkowo gdy $\Gamma = \mathbb{R}$ wprowadzamy zorientowane k -płaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ czyli k -płaszczyzny rzeczywiste w $\mathbb{R}^n$ zaopatrzone w pewną orientację. Ich zbiór oznaczamy $G(n, k)$.

Gdybyśmy dysponowali twierdzeniem, że dla domkniętej podgrupy Liego $H \subset G$ przestrzeń ilorazowa G/H ma strukturę rozmaiłości (i to jedyną dla której rzutowanie $G \rightarrow G/H$ jest koregularne) wówczas można standardowo wprowadzić w $G_\Gamma(n, k)$ strukturę rozmaiłości i wówczas będzie ona nazywana grassmannianem k -wymiarowych Γ -płaszczyzn w Γ^n . Mianowicie tak:

Oznaczmy przez $I_\Gamma(n)$ jedną z grup Liego izometrii $O(n)$, $U(n)$, $Q(n)$ czyli grupę izometrii Γ^n odpowiednio dla $\Gamma = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Aby policzyć wymiary tych grup Liego należy najpierw znaleźć ich algebry Liego. Podamy rezultaty bez pokazywania. Oznaczamy algebrę Liego grupy $I_\Gamma(n)$ przez $Sk(n, \Gamma)$ i mamy kolejno - utożsamiając Γ -liniowe odwzorowanie z $Sk(n, \Gamma)$ z macierzą

$$\begin{aligned} A &\in Sk(n, \mathbb{R}) \quad \text{gddy} \quad A + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{R}) &= \dim O(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{macierze skośnie symetryczne} \\ A &\in Sk(n, \mathbb{C}) \quad \text{gddy} \quad \bar{A} + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{C}) &= \dim U(n) = n^2, \quad \text{macierze skośnie hermitowskie} \quad (\dim = \dim_{\mathbb{R}}) \\ A &\in k(n, \mathbb{H}) \quad \text{gddy} \quad \bar{A} + A^T = 0, \\ \dim Sk(n, \mathbb{H}) &= \dim Q(n) = n(2n+1), \quad \text{macierze skośnie quaternionowe} \end{aligned}$$

Lemma 21 *Odwzorowanie*

$$T : I_\Gamma(n) \times G_\Gamma(n, k) \longrightarrow G_\Gamma(n, k), \quad (\varphi, F) \longmapsto \varphi[F],$$

jest lewym działaniem tranzytywnym.

To, że T jest lewym działaniem jest oczywiste. Tranzytywność jest otrzymana w sposób standardowy w geometrii analitycznej: każda k -wymiarowa podprzestrzeń wektorowa jest obrazem przez pewną izometrię standardowej k -wymiarowej podprzestrzeni $\Gamma_0^k = \{(q_1, \dots, q_k, 0, \dots, 0), \quad q_i \in \Gamma\}$. Biorąc dwie podprzestrzenie F_1 i F_2 i składając jedną z takich izometrii z odwrotną do drugiej dostaniemy izometrię przekształcającą F_1 na F_2 . Konstrukcja takich Γ -izometrii jest ułatwiona dzięki temu, że ma być po prostu Γ -liniowa i $\mathbb{R}$ -izometria względem wyjściowego rzeczywistego iloczynu skalarne (czyli tak jak w rzeczywistej geometrii analitycznej).

Wnioskiem z tego lematu jest

Conclusion 22 *Odwzorowanie*

$$\alpha_k : I_\Gamma(n) \longrightarrow G_\Gamma(n, k), \quad \varphi \longmapsto \varphi[\Gamma_0^k],$$

jest surjektywne.

Znajdziemy niżej $\alpha_k^{-1}[\Gamma_0^k]$.

Podprzestrzenią ortogonalną do $\Gamma_0^k = \{(q_1, \dots, q_k, 0, \dots, 0), \quad q_i \in \Gamma\}$ jest

$$(\Gamma_0^k)^\perp = \Gamma_1^{n-k} = \{(0, \dots, 0, q_{k+1}, \dots, q_n); \quad q_i \in \Gamma\},$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_0^k)^\perp &= \Gamma_1^{n-k}, \\ \Gamma^n &= \Gamma_0^k \oplus \Gamma_1^{n-k}. \end{aligned}$$

Zanurzamy $I_\Gamma(k)$ w $I_\Gamma(n)$ w zapisie macierzowym $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ oraz $I_\Gamma(n-k)$ w $I_\Gamma(n)$ w zapisie macierzowym $B \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ oraz bierzemy zanurzenie

$$I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k) \longrightarrow I_\Gamma(n)$$

$$(A, B) \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Jest to homomorfizm grup (mono) co pozwala widzieć $I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ jako podgrupę w $I_\Gamma(n)$ (Liego) i zrobić przestrzeń ilorazową (rozmaitość bo $I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ jest domknięta) $I_\Gamma(n)/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$.

Proposition 23 $\alpha_k^{-1}[\Gamma_0^k] = I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$.

Proof. Po pierwsze zauważmy, że jeżeli dla Γ -izometrii $\varphi \in I_\Gamma(n)$ przestrzeni Γ^n mamy $\varphi[\Gamma_0^k] \subset \Gamma_0^k$ to musi być

$$\varphi[(\Gamma_0^k)^\perp] \subset (\Gamma_0^k)^\perp$$

czyli

$$\varphi[\Gamma_1^{n-k}] \subset \Gamma_1^{n-k}.$$

" $\subset$ " Niech $\varphi \in \alpha^{-1}[\Gamma_0^k]$, czyli $\varphi[\Gamma_0^k] \subset \Gamma_0^k$, z powyższego rozumowania $\varphi[\Gamma_1^{n-k}] \subset \Gamma_1^{n-k}$ a zatem macierz φ jest postaci $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dla macierzy A i B izometrii z $I_\Gamma(k)$ i $I_\Gamma(n-k)$, co oznacza, że $\varphi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$.

" $\supset$ " - oczywiste, bo gdy $\varphi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ to w szczególności przeprowadza Γ_0^k w Γ_0^k . ■

Kluczem (dość ogólnym) do znalezienia struktury rozmaitości w $G_\Gamma(n, k)$ jest poniższe twierdzenie

Theorem 24 *Istnieje dokładnie jedna bijekcja (homeomorfizm)*

$$\beta_k : I_\Gamma(n)/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k) \longrightarrow G_\Gamma(n, k)$$

taka, że

$$\begin{array}{ccc} & I_\Gamma(n) & \\ \swarrow \pi & & \searrow \alpha_k \\ I_\Gamma(n)/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k) & \xrightarrow{\beta_k} & G_\Gamma(n, k) \end{array}$$

Proof. Jednoznaczność: $\beta_k([\varphi]) = \alpha_k(\varphi)$.

Poprawność definicji, tzn. niezależność powyższego wzoru od reprezentanta φ klasy $[\varphi]$. Weźmy $\psi \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$. Wtedy $\psi[\Gamma_0^k] = \Gamma_0^k$ skąd

$$\alpha_k(\varphi \circ \psi) = \varphi \circ \psi[\Gamma_0^k] = \varphi[\psi[\Gamma_0^k]] = \varphi[\Gamma_0^k] = \alpha_k(\varphi).$$

Surjektywność β_k wynika z surjektywności α_k .

Injektywność β_k . Niech $\beta_k([\varphi]) = \beta_k([\psi])$, zatem $\alpha_k(\varphi) = \alpha_k(\psi)$, czyli $\varphi[\Gamma_0^k] = \psi[\Gamma_0^k]$. Weźmy $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi \in I_\Gamma(n)$. Wówczas

$$\theta[\Gamma_0^k] = \psi^{-1} \circ \varphi[\Gamma_0^k] = \psi^{-1}[\psi[\Gamma_0^k]] = \Gamma_0^k$$

a dalej z faktu, że θ jest Γ -izometrią wynika, że także $\theta[\Gamma_1^{n-k}] = \theta[(\Gamma_0^k)^\perp] = (\Gamma_0^k)^\perp = \Gamma_1^{n-k}$ co implikuje, że $\theta \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$. Zatem skoro $\varphi = \psi \circ \theta$ i $\theta \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ to $[\varphi] = [\psi]$.

Jest oczywiste, że β_k jest homeomorfizmem. ■

Ponieważ $I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)}$ jest rozmaitością (dzielenie grupy Liego przez domkniętą podgrupę Liego) oraz π jest koregularne, to struktura rozmaitości w $G_\Gamma(n, k)$ dla której β_k jest dyfeomorfizmem jest tą jedyną dla której α_k jest koregularne. Ponieważ grupy $I_\Gamma(n)$ są zwarte to grassmanniany są też zwarte.

Lemma 25 *Dla dowolnej Γ -izometrii $\varphi_0 \in I_\Gamma(n)$ odwzorowanie $(\varphi_0)_* : G_\Gamma(n, k) \rightarrow G_\Gamma(n, k)$, $F \mapsto \varphi_0[F]$, jest dyfeomorfizmem.*

Proof. Wystarczy pokazać gładkość. W tym celu wystarcza pokazać gładkość złożenia $(\varphi_0)_* \circ \alpha_k$.

$$\begin{aligned} (\varphi_0)_* \circ \alpha_k(\varphi) &= (\varphi_0)_*[\varphi[\Gamma_0^k]] = (\varphi_0 \circ \varphi)[\Gamma_0^k] = \alpha_k(\varphi_0 \circ \varphi) = \alpha_k \circ l_{\varphi_0}(\varphi) \\ (\varphi_0)_* \circ \alpha_k &= \alpha_k \circ l_{\varphi_0} \quad \text{jest gładkie /lewa translacja jest gładka} \end{aligned}$$

■

Definition 26 *Grassmannianem k -płaszczyzn w Γ^n nazywamy rozmaitość różniczkową $G_\Gamma(n, k)$ dla której β_k jest dyfeomorfizmem.*

Zatem mamy

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{R}}(n, k) &= O(n)_{/O(k) \times O(n-k)}, \\ \dim G_{\mathbb{R}}(n, k) &= \dim O(n) - \dim O(k) - \dim O(n-k) = k(n-k), \\ G_{\mathbb{C}}(n, k) &= U(n)_{/U(k) \times U(n-k)}, \quad \dim G_{\mathbb{C}}(n, k) = 2k(n-k), \\ G_{\mathbb{H}}(n, k) &= Q(n)_{/Q(k) \times Q(n-k)}, \quad \dim G_{\mathbb{H}}(n, k) = 4k(n-k). \end{aligned}$$

W szczególności dla $k = 1$ oraz $n := n + 1$ mamy tzw. przestrzenie rzutowe i ich rzeczywiste wymiary są równe

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(n+1, 1) &= 1 \cdot (n+1-1) = n, \\ \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}(n+1, 1) &= 2n, \\ \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{H}}(n+1, 1) &= 4n. \end{aligned}$$

Proposition 27 *Odwzorowanie*

$$\gamma : G_\Gamma(n, k) \rightarrow G_\Gamma(n, n-k), \quad F \mapsto F^\perp,$$

jest dyfeomorfizmem.

Proof. Weźmy Γ -izometrię $\theta \in I_\Gamma(n)$ o macierzy

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_k \\ \mathbf{1}_{n-k} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta^T &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-k} \\ \mathbf{1}_k & 0 \end{bmatrix}, \\ \theta^T(e_i) &= \sum_j \theta_i^j e_j \\ (\theta^T)_i^j &= \begin{cases} 0, & i \leq n-k, j \leq k \\ \delta_i^{j-k}, & i \leq n-k, j \geq k+1 \\ \delta_{i-n+k}^j, & i \geq n-k+1, j \leq k \\ 0, & i \geq n-k+1, j \geq k+1. \end{cases} \\ \theta^T(e_1) &= e_{k+1}, \quad \theta^T(e_{n-k}) = e_n \\ \theta^T[\Gamma_0^{n-k}] &= \Gamma_1^{n-k}. \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $\theta_* \circ \gamma$ jest gładka.

Definiujemy

$$\varphi_\theta : I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)$$

wzorem

$$\varphi_\theta(A) = \theta \circ A \circ \theta^T.$$

Macierzą złożenia $\theta \circ A \circ \theta^T$ jest $\theta^T \cdot A \cdot \theta$. Łatwo sprawdzamy, że jest to homomorfizm (izomorfizm) grup $\varphi_\theta(A \circ B) = \varphi_\theta(A) \circ \varphi_\theta(B)$ i oczywiście jest gładki (mnożenia $\theta^T \cdot A \cdot \theta$ są gładkie) poza tym dla $\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \in I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)$ mamy

$$\varphi_\theta[I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)] = I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)$$

$$\begin{aligned} &\varphi_\theta\left(\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix}\right) \\ &= \theta^T \cdot \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \theta \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-k} \\ \mathbf{1}_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-k} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_k \end{bmatrix} \\ &= \dots = \begin{bmatrix} B_{n-k} & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} \in I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k) \end{aligned}$$

skąd wynika, że φ_θ indukuje dyfeomorfizm

$$\bar{\varphi}_\theta : I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)} \longrightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)}$$

(bo tak: rzut $I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(k) \times I_\Gamma(n-k)}$ jest koregularny a złożenie $\bar{\varphi}_\theta$ z tym rzutem jest gładkie bo jest to wtedy złożenie rzutu z prawej $I_\Gamma(n) \rightarrow I_\Gamma(n)_{/I_\Gamma(n-k) \times I_\Gamma(k)}$ z φ).

Pokazujemy przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} I_{\Gamma}(n)_{/I_{\Gamma}(k) \times I_{\Gamma}(n-k)} & \xrightarrow[\simeq]{\beta_k} & G_{\Gamma}(n, k) \\ \simeq \downarrow \bar{\varphi}_{\theta} & & \downarrow \theta_* \circ \gamma \\ I_{\Gamma}(n)_{/I_{\Gamma}(n-k) \times I_{\Gamma}(k)} & \xrightarrow[\simeq]{\beta_{n-k}} & G_{\Gamma}(n, n-k) \end{array}$$

$$\theta_* \circ \gamma \circ \beta_k([\varphi]) = \theta_* \circ \gamma[\alpha_k(\varphi)] = \theta_* \circ \gamma[\varphi[\Gamma_0^k]] = \theta_*[\varphi[\Gamma_0^k]^{\perp}] = \theta_*[\varphi[\Gamma_1^{n-k}]]$$

$$\begin{aligned} \beta_{n-k} \circ \bar{\varphi}_{\theta}[\varphi] &= \beta_{n-k}[\theta \circ \varphi \circ \theta^T] = \alpha_{n-k}(\theta \circ \varphi \circ \theta^T) = \theta \circ \varphi \circ \theta^T[\Gamma_0^{n-k}] \\ &= \theta \circ \varphi[\Gamma_1^{n-k}] = \theta_*[\varphi[\Gamma_1^{n-k}]]. \end{aligned}$$

Stąd $\theta_* \circ \gamma$ jest dyfeomorfizmem, ale θ_* też jest dyfeomorfizmem, więc γ też jest dyfeomorfizmem. ■

2.2 Rzeczywiste, zespolone i quaternionowe przestrzenie rzutowe

Definition 28 *Rozmaitość Grassmanna $G_{\Gamma}(n+1, 1)$ 1-wymiarowych Γ -przestrzeni w Γ^{n+1} , $n \geq 1$*

$$\Gamma P^n = \mathbb{P}^n \Gamma := G_{\Gamma}(n+1, 1) = (\Gamma^{n+1} \setminus \{0\})_{/\cong}$$

gdzie dla $\Gamma^{n+1} \ni x, y \neq 0$

$$x \cong y \iff \exists_{\Gamma \ni q \neq 0} (y = qx),$$

nazywamy Γ -przestrzenią rzutową.

Dla $\Gamma = \mathbb{R}$ mamy rzeczywistą przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ oznaczaną też $\mathbb{R}P^n$.

Dla $\Gamma = \mathbb{C}$ mamy zespoloną przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ oznaczaną też $\mathbb{C}P^n$.

Dla $\Gamma = \mathbb{H}$ mamy quaternionową przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n \mathbb{H}$ oznaczaną też $\mathbb{H}P^n$.

Niech

$$\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$$

będzie kanonicznym rzutowaniem. Wprowadzimy teraz atlas gładki na $\mathbb{P}^n \Gamma$ a tym samym strukturę rozmaitości w przestrzeni topologicznej ilorazowej $\mathbb{P}^n \Gamma$.

Definition 29 *Niech $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ będzie bazą Γ^{n+1} . Parametryzacją $\mathbb{P}^n \Gamma$ stowarzyszoną z bazą $\mathbf{v}$ nazywamy odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}} &: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \\ (q^1, \dots, q^n) &\longmapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \quad q^i \in \Gamma. \end{aligned}$$

Theorem 30 *$\varphi_{\mathbf{v}}$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór w $\mathbb{P}^n \Gamma$. Rodzina parametryzacji $\{\varphi_{\mathbf{v}}\}$ stanowi atlas gładki na przestrzeni $\mathbb{P}^n \Gamma$.*

Proof. a) Ciągłość $\varphi_{\mathbf{v}}$. Złożymy $\varphi_{\mathbf{v}}$ w postaci odwzorowań ciągłych

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{v}} : \Gamma^n &\xrightarrow{\delta} \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \Gamma \\ (q^1, \dots, q^n) &\longmapsto v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i \longmapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i].\end{aligned}$$

Zatem $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest ciągłe.

b) obraz $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest otwarty w $\mathbb{P}^n \Gamma$.

$$\begin{aligned}W &: = \pi^{-1}[\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]] = \pi^{-1}[\pi \circ \delta[\Gamma^n]] \\ &= \{q \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i) ; \Gamma \ni q \neq 0, q^i \in \Gamma\} \\ &= \{\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i ; r^0 \neq 0, r^i \in \Gamma\} \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

W jest otwarty w $\Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$ zatem $\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]$ jest otwarty w $\mathbb{P}^n \Gamma$. Do pokazanie, że $\varphi_{\mathbf{v}}^{-1}$ wystarczy złożyć z $\pi|W$ i pokazać ciągłość. Ponieważ złożenie to wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \circ \pi|W (\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i) &\stackrel{r^0 \neq 0}{=} \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} ([\sum_{i=0}^n r^i \cdot v_i]) = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \left(\left[v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{r^i}{r^0} \cdot v_i \right] \right) \\ &= \left(\frac{r^1}{r^0}, \dots, \frac{r^n}{r^0} \right)\end{aligned}$$

o ciągłych współczynnikach to $\varphi_{\mathbf{v}}^{-1} \circ \pi|W$ jest ciągłe, zatem $\varphi_{\mathbf{v}}$ jest homeomorfizmem na obraz.

c) Biorąc bazę $\mathbf{v}_0 = (v_0, \dots, v_n)$ i przesuwając v_i na pierwsze miejsce $\mathbf{v}_i = (v_i, v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ łatwo widzimy, że

$$\bigcup_{i=0}^n \varphi_{\mathbf{v}_i}[\Gamma^n] = \mathbb{P}^n \Gamma.$$

Istotnie, niech $[x] \in \mathbb{P}^n \Gamma$, $x \neq 0$, $x \in \Gamma^{n+1}$. Wtedy $x = \sum_{i=0}^n r^i v_i$ i któraś współrzędna $r^{i_0} \neq 0$. Wtedy

$$[x] = [\sum_{i=0}^n r^i v_i] = [r^{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} r^i v_i] = \left[v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \frac{r^i}{r^{i_0}} v_i \right] \in \text{Im } \varphi_{\mathbf{v}_{i_0}}.$$

Zatem obrazy $\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]$ pokrywają całą przestrzeń $\mathbb{P}^n \Gamma$.

d) Weźmy dowolne bazy $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ i $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$ i parametryzacje $\varphi_{\mathbf{v}}$ i $\varphi_{\mathbf{w}}$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{v}} &: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \quad (q^1, \dots, q^n) \longmapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \\ \varphi_{\mathbf{w}} &: \Gamma^n \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma, \quad (q^1, \dots, q^n) \longmapsto [w_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot w_i].\end{aligned}$$

Obliczmy współrzędne przekształcenia

$$\varphi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \quad \Omega_1 = \varphi_{\mathbf{v}}^{-1}[\varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]], \quad \Omega_2 = \varphi_{\mathbf{w}}^{-1}[\varphi_{\mathbf{v}}[\Gamma^n]] \quad - \text{otwarte podzbiory.}$$

Niech $v_i = \sum_{j=0}^n c_i^j w_j$, $i = 0, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \varphi_{\mathbf{v}}^{-1}[\varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]] = \{(q^1, \dots, q^n); \varphi_{\mathbf{v}}(q^1, \dots, q^n) \in \varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]\} \\
&= \{(q^1, \dots, q^n); [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i] \in \varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]\} \\
&= \{(q^1, \dots, q^n); [\sum_{j=0}^n c_0^j w_j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot \sum_{j=0}^n c_i^j w_j] \in \varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]\} \\
&= \{(q^1, \dots, q^n); [(c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0) \cdot w_0 + (\sum_{j=1}^n c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j) \cdot w_j] \in \varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n]\} \\
&= \{(q^1, \dots, q^n); c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0 \neq 0\} \quad \text{- jest to zbiór otwarty} \\
&= \left\{ (q^1, \dots, q^n); \left[w_0 + \sum_{j=1}^n \frac{c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \cdot w_j \right] \in \varphi_{\mathbf{w}}[\Gamma^n] \right\}
\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{v}}(q^1, \dots, q^n) &= \left[w_0 + \sum_{j=1}^n \frac{c_0^j + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^j}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \cdot w_j \right] \\
&= \varphi_{\mathbf{w}} \left(\frac{c_0^1 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^1}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0}, \dots, \frac{c_0^n + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^n}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \right)
\end{aligned}$$

oraz

$$\varphi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}}(q^1, \dots, q^n) = \left(\frac{c_0^1 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^1}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0}, \dots, \frac{c_0^n + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^n}{c_0^0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot c_i^0} \right)$$

co dowodzi gładkości funkcji przejścia. ■

Exercise 31 Obliczyć bezpośrednio funkcje przejścia dla baz $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$, $i \neq j$,

$$\varphi_{\mathbf{v}_i}^{-1} \circ \varphi_{\mathbf{v}_j}(q^1, \dots, q^n) = \begin{cases} \dots & \text{dla } i \leq j-1 \\ \dots & \text{dla } i \geq j+1 \end{cases} .$$

Conclusion 32 $\mathbb{P}^n \Gamma$ posiada naturalną strukturę rozmaitości różniczkowej Γ -wymiaru n , w szczególności wymiar rzeczywisty dla $\Gamma = \mathbb{C}$ wynosi $2n$ zaś dla $\Gamma = \mathbb{H}$ wynosi $4n$ co zgadza się z wcześniejszymi wyliczeniami wymiarów $\mathbb{P}^n \Gamma = G_{\Gamma}(n+1, 1)$ jako rozmaitości jednorodnych (grupa Liego dzielona przez podgrupę Liego $I_{\Gamma}(n+1)_{/I_{\Gamma}(1) \times I_{\Gamma}(n)} \xrightarrow[\simeq]{\beta_1} G_{\Gamma}(n+1, 1) = \mathbb{P}^n \Gamma$)

Exercise 33 Rzutowanie $\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$ jest gładkie, co więcej jest koregularne.

Theorem 34 Rozmaitość $\mathbb{P}^1 \Gamma = G_{\Gamma}(2, 1)$ jest dyfeomorficzna ze sferą S^1 dla $\Gamma = \mathbb{R}$, S^2 dla $\Gamma = \mathbb{C}$ i S^4 dla $\Gamma = \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}P^1 &= S^1, \\
\mathbb{C}P^1 &= S^2, \\
\mathbb{H}P^1 &= S^4.
\end{aligned}$$

Proof. Weźmy dowolną bazę $\mathbf{v}_0 = (v_0, v_1)$ przestrzeni Γ^2 i parametryzację

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}_0} &: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1\Gamma, \\ q &\longmapsto [v_0 + q \cdot v_1], \quad q \in \Gamma. \end{aligned}$$

Jest to dyfeomorfizm na otwarty podzbiór, przy czym parametryzacja nie obejmuje tylko jednego punktu z $\mathbb{P}^1\Gamma$,

$$\mathbb{P}^1\Gamma \setminus \varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma] = \{[v_1]\}.$$

Istotnie, $[v_1] = [0 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1]$ nie może być w obrazie $\varphi_{\mathbf{v}_0}$, i gdy $[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1]$ nie należy do $\varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma]$ to $q_0 = 0$ bo w przeciwnym wypadku

$$[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1] = \left[v_0 + \frac{q_1}{q_0} \cdot v_1 \right] \in \varphi_{\mathbf{v}_0}[\Gamma].$$

Stąd $[q_0 \cdot v_0 + q_1 \cdot v_1] = [q_1 \cdot v_1] = [v_1]$ bo musi być $q_1 \neq 0$. Stąd z ogólnej topologii [Engelking] odwzorowanie $\varphi_{\mathbf{v}_0}$ rozszerza się do jedno-punktowego uzwarcenia $\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0} : \Gamma \cup \{v_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1\Gamma$ przy czym jest to homeomorfizm. Ale łatwiej i znajomo można 1-punktowe uzwarcie przestrzeni Γ zrobić jako sferę wykorzystując rzut stereograficzny z bieguna północnego utożsamionego z wektorem v_1 . Przy czym

$$\Gamma \cup \{v_1\} = S_\Gamma(1) := \begin{cases} S^1, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^2, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^4, & \text{gdy } \Gamma = \mathbb{H}. \end{cases}$$

Co więcej wykorzystując rzut stereograficzny z bieguna południowego utożsamionego z wektorem v_0 oraz parametryzacji $\varphi_{\mathbf{v}_1}$ dla bazy (v_1, v_0) pokazujemy [ĆWICZENIE !!!] że $\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0} : \Gamma \cup \{v_1\} \rightarrow \mathbb{P}^1\Gamma$ jest dyfeomorfizmem do czego brakuje gładkości tylko w jednym punkcie biegunie południowym. Tzn. powinno być

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \setminus \{0\} & & \\ \uparrow h_+ & \searrow \varphi_{\mathbf{v}_0} & \\ S_\Gamma(1) \setminus \{v_0, v_1\} & \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\mathbf{v}_0}} & \mathbb{P}^1\Gamma \\ \downarrow h_- & \nearrow \varphi_{\mathbf{v}_1} & \\ \Gamma \setminus \{0\} & & \end{array}$$

■

2.3 Rozwłóknienia Hopfa

Weźmy kanoniczny gładki (koregularny) rzut

$$\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\Gamma$$

oraz wybierzmy sferę $S_\Gamma(n)$ w $\Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$ o promieniu 1 względem Γ -normy, $S_\Gamma(n) = \{q \in \Gamma^{n+1}; |q| = 1\}$. Jak wiemy z uwagi (10) o sferze względem Γ -normy sfera $S_\Gamma(n)$ jest po prostu sferą w indukowanej euklidesowej normie.

Tak więc mamy kolejno

$$\begin{aligned} S^n &\subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{R}, \\ S^{2n+1} &\subset \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{C}, \\ S^{4n+3} &\subset \mathbb{H}^{n+1} \quad \text{dla } \Gamma = \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Obetniemy rzut π do tej sfery

$$\rho : S_\Gamma(n) \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \Gamma.$$

a) dla $\Gamma = \mathbb{R}$

$$\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n,$$

b) dla $\Gamma = \mathbb{C}$

$$\rho : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

c) dla $\Gamma = \mathbb{H}$

$$\rho : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n.$$

Pokażemy, że są to wiązki o włóknach typowych $S_\Gamma(0)$ równych kolejno $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$, S^1 i S^3 . Wiazki te nazywają się wiazkami Hopfa. W szczególności dla $n = 1$ skoro

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^1 &= S^1, \\ \mathbb{C}P^1 &= S^2, \\ \mathbb{H}P^1 &= S^4. \end{aligned}$$

to otrzymujemy wiązki

$$\begin{aligned} \rho &: S^1 \rightarrow S^1 \quad \text{- podwójne nakrycie /włókno } \mathbb{Z}_2, \quad \text{dla } S^1 = \{z; |z| = 1\}, \quad \rho(z) = z^2. \\ \rho &: S^3 \rightarrow S^2 \quad \text{- włókno } S^1, \\ \rho &: S^7 \rightarrow S^4 \quad \text{- włókno } S^3. \end{aligned}$$

Wiazki te nie są trywialne, rzutowania ρ nie są ściągające do punktów skąd wynika np, że $\pi_3(S^2) \neq 0$ i $\pi_7(S^4) \neq 0$ tzn. w 2-wymiarowej rozmaitości S^2 są "dziury" 3-wymiarowe a 4-wymiarowej rozmaitości S^4 są dziury 7-wymiarowe!. Rozważając oktawy Cayleya (czego nie robiliśmy) dochodzi się w analogiczny sposób do wiazki $S^{15} \rightarrow S^8$ z włóknem S^7 (sfery S^1 , S^3 i S^7 są jedynymi w których istnieje struktura grupy Liego).

Przypadek rzeczywisty jest banalny. Zajmiemy się przypadkiem 2 i 3.

Niech $(z_0, z_1) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, tzn. $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ ($\mathbb{C}$ -norma punktu (z_0, z_1) jest 1, $|(z_0, z_1)| = 1$). Każdy inny reprezentant klasy $[(z_0, z_1)] \in \mathbb{C}P^1$ jest postaci (tz_0, tz_1) dla $\mathbb{C} \ni t \neq 0$. Jeśli więc dalej $(tz_0, tz_1) \in S^3$ czyli ma $\mathbb{C}$ -normę równą 1 to zachodzi

$$1 = |(z_0, z_1)| = |(tz_0, tz_1)| = |t \cdot (z_0, z_1)| = |t| \cdot |(z_0, z_1)| = |t|.$$

Zatem włókno nad punktem $[(z_0, z_1)]$ jest równe $\{t \cdot (z_0, z_1); |t| = 1\} \cong S^1$.

Analogiczny rachunek dla quaternionów daje to samo: współczynnik proporcjonalności q mam mieć normę quaternionową (czyli zwykłą euklidesową) równą 1, a to oznacza, że $q \in S^3$ i włókno jest dyfeomorficzne z S^3 . Przy okazji obserwujemy bardzo ciekawą rzecz: $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ i $S^7 \subset \mathbb{H}^2$, na $\mathbb{C}^2$ działa z lewa grupa Liego S^1 (mnożenie zwykle przez liczby zespolone), po obcięciu do S^3 nie wychodzi się z S^3 bo norma po pomnożeniu przez element z S^1 nie zmienia się. Aby mieć prawe działanie trzeba mnożyć z lewa przez odwrotny

$$\bullet : S^3 \times S^1 \rightarrow S^3, (q, a) \mapsto q \bullet \alpha := \alpha^{-1} \cdot q,$$

i

$$(q \bullet \alpha) \bullet \beta = (\alpha^{-1} \cdot q) \bullet \beta = \beta^{-1} \cdot (\alpha^{-1} \cdot q) = (\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}) \cdot q = (\alpha\beta)^{-1} \cdot q = q \bullet (\alpha\beta),$$

dostajemy gładkie i tzw. wolne, tzn. gdy $(z_0, z_1) \bullet t = (z_0, z_1)$ to $t = 1$. Znaczy to, że orbitą działania jest S^1 , $(z_0, z_1) \bullet S^1 \cong S^1$, poza tym orbity tego działania pokrywają się co wyżej zaobserwowaliśmy z włóknami rzutowania $\rho : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$. Z Tw Glisona $\rho : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ jest wiązką i to wiązką główną o grupie strukturalnej S^1 .

Analogicznie w przypadku quaternionowym mamy prawe działanie wolne z mnożenia przez odwracanie quaternionów $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^2$

$$\bullet : S^7 \times S^3 \rightarrow S^7, (q, a) \mapsto q \bullet \alpha := \alpha^{-1} \cdot q.$$

Orbitą jest $(q_0, q_1) \cdot S^3 \cong S^3$ i orbity pokrywają się z włóknami rzutowania koregularnego $\rho : S^7 \rightarrow \mathbb{H}P^1 = S^4$. Tak samo z Tw. Glisona jest to wiązka główna z grupą strukturalną S^3 .

Niżej bardziej rachunkowo bez Tw. Glisona pokażemy że mamy do czynienia z wiązkami lokalnie trywialnymi $\rho : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\rho : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ i $\rho : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$, jednym ujęciem z wiązką

$$\rho : S_\Gamma(n) \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$$

o grupie strukturalnej $S_\Gamma(0) = \mathbb{Z}_2, S^1$ i S^3 odpowiednio $/S_\Gamma(n) \subset \Gamma^{n+1} \setminus \{0\}$, $S_\Gamma(0) \subset \Gamma \setminus \{0\}$.

Theorem 35 (a) Dla dowolnej bazy $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n) \in \Gamma^{n+1}$ odwzorowanie

$$\psi_{\mathbf{v}} : U_{\mathbf{v}} \times S_\Gamma(0) \rightarrow \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \subset S_\Gamma(n)$$

gdzie $U_{\mathbf{v}} = \{[v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i] ; q^i \in \Gamma\} \subset \mathbb{P}^n \Gamma$ jest otwartym podzbiorem, zadane wzorem

$$\psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) = \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|}$$

jest dyfeomorfizmem (z więc lokalną trywializacją rzutowania ρ).

(b) dla dowolnych dwu baz $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ i $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$ istnieje gładkie odwzorowanie $\varphi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} : U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}} \rightarrow S_\Gamma(0)$ takie, że

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \psi_{\mathbf{v}} & : (U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}}) \times S_\Gamma(0) \rightarrow (U_{\mathbf{v}} \cap U_{\mathbf{w}}) \times S_\Gamma(0) \\ \psi_{\mathbf{w}}^{-1} \circ \psi_{\mathbf{v}}(x, \alpha) & = (x, \varphi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x) \cdot \alpha). \end{aligned}$$

Proof. (a1) Gładkość $\psi_{\mathbf{v}} : U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0) \rightarrow S_{\Gamma}(n)$. Najpierw obserwujemy, że $U_{\mathbf{v}}$ jest dyfeomorficzny z Γ^n , dyfeomorfizmem jest parametryzacja $\varphi_{\mathbf{v}}$

$$\varphi_{\mathbf{v}} : \Gamma^n \rightarrow U_{\mathbf{v}}, \quad (q^1, \dots, q^n) \mapsto [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i].$$

Składamy $\psi_{\mathbf{v}}$ z dyfeomorfizmem $\varphi_{\mathbf{v}} \times Id_{S_{\Gamma}(0)} : \Gamma^n \times S_{\Gamma}(0) \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0)$ i obliczamy

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0) & & \\ \cong \uparrow \varphi_{\mathbf{v}} \times Id_{S_{\Gamma}(0)} & \searrow \psi_{\mathbf{v}} & \\ \Gamma^n \times S_{\Gamma}(0) & \longrightarrow & S_{\Gamma}(n) \subset \Gamma^{n+1} \\ ((q^1, \dots, q^n), \alpha) & \longmapsto & \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \end{array}$$

Dolna strzałka jest gładka, więc $\psi_{\mathbf{v}}$ jest też gładka.

(a2) $\text{Im } \psi_{\mathbf{v}} = \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]$ -Ćwiczenie

(a3) Gładkość odwrotnego $\psi_{\mathbf{v}}^{-1} : \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times S_{\Gamma}(0)$. Przypomnijmy rzut $\pi : \Gamma^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \Gamma$. Weźmy

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{v}} &: \pi^{-1}[U_{\mathbf{v}}] \rightarrow U_{\mathbf{v}} \times \Gamma \\ q_{\mathbf{v}} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^n q^i v_i}_{q^0 \neq 0} \right) &= \left([\sum_{i=0}^n q^i v_i], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \right). \end{aligned}$$

Odwzorowanie $q_{\mathbf{v}}$ jest gładkie. Pokażemy, że

$$q_{\mathbf{v}}|_{\rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]} = \psi_{\mathbf{v}}^{-1}.$$

Istotnie,

i) gdy $\sum_{i=0}^n q^i v_i \in S_{\Gamma}(n)$ czyli $|\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1$ to $\left| q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \right| = |q^0 v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i| = |\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1$ skąd $q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \in S_{\Gamma}(0)$ więc $\left(q^0 \cdot \left| v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i \right| \right)^{-1} = \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \in S_{\Gamma}(0)$.

ii) $q_{\mathbf{v}}|_{\rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]} \circ \psi_{\mathbf{v}} = q_{\mathbf{v}} \circ \psi_{\mathbf{v}} = id$, istotnie,

$$\begin{aligned} & q_{\mathbf{v}} \circ \psi_{\mathbf{v}} ([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \\ &= q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) = q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha^{-1} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \alpha^{-1} q^i \cdot v_i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) \\ &= q_{\mathbf{v}} \left(\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^{-1} q^i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_i \right) \\ &= \left(\left[\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^{-1} q^i}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \cdot v_i \right], \left(\frac{\alpha^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \right) \\ &= ([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i \cdot v_i], \alpha). \end{aligned}$$

iii) Niech $q = \sum_{i=0}^n q^i v_i \in \rho^{-1}[U_{\mathbf{v}}]$, $q^0 \neq 0$ oraz $|\sum_{i=0}^n q^i v_i| = 1$. Otrzymujemy

$$\psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) = \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{v}} \circ q_{\mathbf{v}}(q) &= \psi_{\mathbf{v}} \circ q_{\mathbf{v}}(\sum_{i=0}^n q^i v_i) = \psi_{\mathbf{v}}\left(\left[\sum_{i=0}^n q^i \cdot v_i\right], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|}\right) \\ &= \psi_{\mathbf{v}}\left(\left[v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i\right], \frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{(q^0)^{-1}}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|}\right)^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \\ &= \frac{q^0 |v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i| \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i|} \\ &= q^0 \cdot \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \frac{q^i}{q^0} \cdot v_i\right) = \sum_{i=0}^n q^i v_i = q. \end{aligned}$$

a4) $\rho \circ \psi_{\mathbf{v}} = pr_1$ - jasne.

a5) Pokażemy, że $\psi_{\mathbf{v}}$ spełnia warunek

$$\psi_{\mathbf{v}}(u, \alpha) \cdot \beta = \psi_{\mathbf{v}}(u, \alpha \cdot \beta), \quad \alpha, \beta \in S_{\Gamma}(0).$$

Niech $u = [v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i]$, wtedy

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \bullet \beta &= \beta^{-1} \cdot \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha) \\ &= \beta^{-1} \cdot \frac{\alpha^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\ &= \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \frac{(v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\ &= (\alpha\beta)^{-1} \cdot \frac{(v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\ &= \frac{(\alpha\beta)^{-1} \cdot (v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i)}{|v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i|} \\ &= \psi_{\mathbf{v}}([v_0 + \sum_{i=1}^n q^i v_i], \alpha\beta) \end{aligned}$$

co pokazuje, że wiązki Hopfa są wiązkami głównymi. ■