

ŁYK GEOMETRII ANALITYCZNEJ Przestrzeni Euklidesowych:

Z wykładu geometrii analitycznej (sem II) wiemy:

Odwzorowanie liniowe o macierzy ortogonalnej jest izometrią i odwrotnie: izometria jest złożeniem izomorfizmu o macierzy ortogonalnej z przesunięciem. Formalnie: oznaczmy przez $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ standardowy iloczyn skalarny $\langle v, w \rangle = \sum_i v^i w^i$.

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem liniowym. Trzy warunki są równoważne (patrz Geometria Analityczna przestrzeni Euklidesowych) - jest to banalny fakt typu "ćwiczenia":

- f jest izometrią (czyli zachowuje odległość $d_e(v, w) = d_e(f(v), f(w))$)
- f zachowuje iloczyn skalarny $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$
- jego macierz w bazie e_i jest ortogonalna.

Inzaczek mówiąc: utożsamiając macierz z odwzorowaniem liniowym o tej macierzy mamy

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ jest izomorfizmem liniowym i } \forall v \forall w (\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle) \} \quad (1)$$

Nawet więcej (mniej trywialny fakt) - jeżeli odwzorowanie dowolne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $f(0) = 0$ jest izometrią to jest liniowe i dalej j/w; dowolna izometria $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest postaci $g(x) = g(0) + f(x)$ dla pewnej izometrii liniowej f (czyli $f(x) := g(x) - g(0)$ jest liniowa i jest izometrią, czyli ma macierz ON).

Zobaczmy ortogonalność macierzy izometrii względem standardowego iloczynu skalarnego $\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i$. Dla wersorów e^i mamy $\langle e^i, e^j \rangle = \delta^{ij}$. Zatem macierz odwzorowania dwuliniowego-iloczyn skalarny- to macierz jednostkowa $\mathbf{1}_n$. Jeżeli zapisać wektory z $\mathbb{R}^n$ w postaci macierzy 1-kolumnowych to $\langle v, w \rangle = v^T \cdot \mathbf{1}_n \cdot w$, istotnie

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i = [v_1, \dots, v_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = v^T \cdot \mathbf{1}_n \cdot w.$$

Zdefiniujemy macierz A izomorfizmu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ w taki sposób aby zachodziła równość $f(v) = A \cdot v$. Wybieramy sposób taki: niech $f(e^i) = \sum_j a_j^i e^j$, wtedy określamy macierz A w postaci $A = [a_j^i]$. [Druga metoda da macierz transponowaną $f(e_i) = \sum_j a_i^j e_j$]. Sprawdzamy

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = f\left(\sum_i v_i e^i\right) = \sum_i v_i f(e^i) = \sum_i v_i \sum_j a_j^i e^j = \sum_j \sum_i a_j^i v_i e^j \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i a_1^i v_i \\ \vdots \\ \sum_i a_n^i v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & & a_1^n \\ & \ddots & \\ a_n^1 & & a_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = A \cdot v. \end{aligned}$$

Z dwuliniowości $\langle, \rangle$ widzimy, że warunek $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ jest równoważny warunkom tylko dla bazy e^i , $\langle e^i, e^j \rangle = \langle f(e^i), f(e^j) \rangle$. Istotnie, gdy dla bazy zachodzi to

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \Sigma_i v_i e^i, \Sigma_j w_j e^j \rangle = \Sigma_{i,j} v_i w_j \langle e^i, e^j \rangle = \Sigma_{i,j} v_i w_j \langle f(e^i), f(e^j) \rangle \\ &= \langle \Sigma_i v_i f(e^i), \Sigma_j w_j f(e^j) \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle. \end{aligned}$$

Dla macierzy $A = [a_j^i]$, $f(e^i) = \Sigma_j a_j^i e^j$ jest to równoważne

$$\begin{aligned} \delta_i^j &= \langle e^i, e^j \rangle = \langle f(e^i), f(e^j) \rangle = \langle \Sigma_k a_k^i e^k, \Sigma_r a_r^j e^r \rangle \\ &= \Sigma_{k,r} a_k^i a_r^j \langle e^k, e^r \rangle = \Sigma_{k,r} a_k^i a_r^j \delta^{kr} = \Sigma_k a_k^i a_k^j \\ &= \Sigma_k (a^T)_i a_k^j = \Sigma_k (A^T \cdot A)_i^j. \end{aligned}$$

Czyli

$$\mathbf{1} = A^T \cdot A$$

Rozpatrzmy tylko izometrie posiadające 0 jako punkt stały. Są to wszystkie izomorfizmy liniowe o macierzy ortogonalnej.

1. *Obrotem elementarnym* w $\mathbb{R}^n$ rozumiemy izometrię $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ która jest obrotem względem pewnych dwu współrzędnych i identycznością względem pozostałych współrzędnych.

2. *Izometrią elementarną* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy złożenie skończonej ilości obrotów elementarnych i przesunięcia.

3. Izometrię $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *zwykłą* (albo *zachowującą orientację*) jeżeli jej wyznacznik jest równy +1 i nazywamy *zwierciadlaną* (albo *zmieniającą orientację*) jeżeli jej wyznacznik jest równy -1.

4. Izometrie zwykle tworzą grupę. Wszystkie macierze izometrii zwykłych $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tworzą grupę $SO(n)$.

5. Każda izometria zwykła (czyli zachowująca orientację) jest izometrią elementarną, czyli jest złożeniem obrotów elementarnych z przesunięciem. Zatem wymiar $SO(n, \mathbb{R})$ to ilość wyborów dwu zmiennych spośród n .

Ile jest wyborów dwu zmiennych spośród n ? Odpowiedź $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim SO(n, \mathbb{R}) = \dim O(n, \mathbb{R})$. Dla $n = 2$ mamy wymiar 1, dla $n = 3$ mamy wymiar 3, dla $n = 4$ mamy wymiar 6.