

Formy różniczkowe i zastosowania

Jan Kubarski

Politechnika Łódzka, Instytut Matematyki

June 15, 2012

Spis treści

1	Formy różniczkowe na rozmaitościach	3
1.1	1-formy różniczkowe	3
1.2	Mnożenie skośne 1-form różniczkowych	4
1.3	k-formy różniczkowe na rozmaitości	8
1.4	Cofanie form różniczkowych	11
1.5	Rozmaitości zorientowane i całkowanie form różniczkowych maksymalnego stopnia	14
1.6	Różniczkowanie form różniczkowych	19
1.7	Kompleks de Rhama, grupy kohomologii, charakterystyka Eulera-Poincarégo i genus powierzchni	23
2	Hiperpowierzchnie w mechanice klasycznej - przestrzenie konfiguracyjne	27
3	TWIERDZENIE CAŁKOWE STOKESA	29
3.1	Rozmaitości z brzegiem	29
3.2	Twierdzenie Stokesa dla podzbiorów z osobliwościami	33
3.3	Szczególne przypadki ogólnego wzoru Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem	34
3.3.1	Twierdzenie Greena	34
3.3.2	Twierdzenie Stokesa dla powierzchni 2-wymiarowej w $\mathbb{R}^3$	35
3.3.3	Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego	36
4	DOWÓD TWIERDZENIA STOKESA	37
5	Element objętości i Tensor Riemanna	41
6	Zastosowania Tw. Stokesa w topologii	44

7	Zastosowania całki powierzchniowej zorientowanej w Fizyce	45
7.1	Strumień cieczy	45
7.2	Pole cienia	45
7.3	Strumień ciepła	45
7.4	Prawo Gaussa	45
7.5	Zadania	46
7.6	Zadania teoretyczne	47
8	Wykorzystanie wzoru Greena	47
8.1	Zadania praktyczne	49
9	Wykorzystanie wzoru Stokesa dla powierzchni	49
9.1	Zadania praktyczne	49
9.2	Zadania teoretyczne	50
9.3	Wykorzystanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego	52
9.4	Zadania praktyczne	52
9.5	Zadania teoretyczne	52
10	ZASTOSOWANIA TWIERDZEŃ CAŁKOWYCH	53
10.1	Cyrkulacja a rotacja	53
10.2	Dywergencja a strumień	54
11	Zastosowania Tw. Stokesa w elektromagnetyzmie	55
11.1	Równanie Maxwella	55
11.2	Prawo Faradaya	55
11.3	Prawo Gaussa c.d.	55
11.4	Dowód Prawa Gaussa	57
11.5	Ciągłe pole ładunków elektrycznych i równanie Maxwella	57
11.6	Objętość obszaru przestrzennego	57
11.7	Zadania praktyczne	58
11.8	Zadania teoretyczne	59

1 Formy różniczkowe na rozmaitościach

1.1 1-formy różniczkowe

Niech M będzie dowolną rozmaitością klasy C^∞ . W każdym punkcie $p \in M$ jest określona przestrzeń styczna $T_p M$ oraz dualna do niej - tzw. przestrzeń kostyczna

$$T_p^* M = (T_p M)^*$$

składająca się z kowektorów $\alpha : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 1.1.1 *Formą różniczkową stopnia 1 (1-formą różniczkową) na otwartym podziorze $U \subset M$ nazywamy przyporządkowanie ω które każdemu punktowi $p \in U$ przypisuje jakiś kowektor $\omega_p \in T_p^* M$.*

Przykładami 1-form są oczywiście różniczki funkcji df , dla $f \in C^\infty(M)$.

Jak zdefiniować 1-formy różniczkowe klasy C^∞ ? W tym celu posłużymy się lokalnym systemem współrzędnych $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ wokół punktu p i związaną z nim bazą $(dx^1, \dots, dx^n)$ przestrzeni kostycznej $T_p^* M$. Formę ω zapisujemy w tej bazie

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i.$$

Mówimy, że ω jest klasy C^∞ jeżeli współrzędne ω^i są funkcjami klasy C^∞ . Łatwo zobaczyć, że jeśli w pewnej mapie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ wokół punktu p współrzędne formy ω są klasy C^∞ to w każdej innej mapie $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ wokół punktu p są też klasy C^∞ i dlatego definicja jest poprawna. Istotnie, niech $dx^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot dy^j$, wtedy $\sum_{k=1}^n a_k^i \cdot dy^k \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum_{k=1}^n a_k^i \cdot \delta_j^k = a_j^i$ skąd $(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$

$$a_j^i = dx^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad - \text{ jest to funkcja klasy } C^\infty$$

Zapisując ω w dwu mapach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ mamy

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}^i \cdot dy^i$$

możemy obliczyć $\tilde{\omega}^i$ za pomocą ω^i

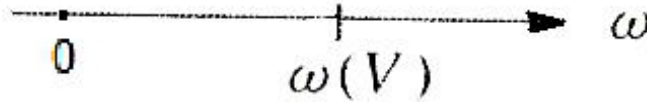
$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot dx^i = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot dy^j = \sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot dy^j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega^i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \cdot dy^j \end{aligned}$$

skąd

$$\tilde{\omega}^i = \sum_{j=1}^n \omega^j \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

Ze wzoru tego widzimy, że jeśli ω^i są klasy C^∞ to także $\tilde{\omega}^i$ są klasy C^∞ .

Geometrycznie, wartość 1-formy ω_p na wektorze $v \in T_p M$ wyobrazimy sobie w pewien sposób nadający się na uogólnienie dla form wyższego stopnia opisane niżej. Rozważmy oś oznaczaną literą ω i na tej osi zaznaczmy punkt $\omega_p(v)$ i rozważmy odcinek o początku w 0 i końcu w $\omega_p(v)$, $\overline{0 \omega_p(v)}$. Długość tego odcinka jest wartością bezwzględną liczby $\omega_p(v)$, $|\overline{0 \omega_p(v)}| = |\omega_p(v)|$. Można zatem powiedzieć, że $\omega_p(v)$ jest znakowaną długością odcinka $\overline{0 \omega_p(v)}$, tzn. długością opatrzoną znakiem $+$ lub $-$, znak zależy od tego czy liczba $\omega_p(v)$ jest dodatnia czy ujemna.



Za uogólnienie odcinka na płaszczyźnie można uważać równoległobok, a w wyższym wymiarze równoległoscian - co będzie istotne w geometrycznym wyobrażeniu wartości form wyższego stopnia.

1.2 Mnożenie skośne 1-form różniczkowych

W tym paragrafie podamy metodę mnożenia 1-form różniczkowych tak aby były zachowane w jakimś sensie własności liniowe. Jeśli ω i ν są dwoma 1-formami określonymi na tym samym podzbiórze otwartym $U \subset M$ rozmaitości M to nie można zdefiniować mnożenia naiwnie wzorem $(\omega \cdot \nu)_p(v) = \omega_p(v) \cdot \nu_p(v)$ dla $p \in U$ i $v \in T_p M$ bo nie będzie to liniowe względem v . Właściwym pomysłem jest zdefiniować mnożenie oznaczane innym symbolem (nie mylącym się ze zwykłym mnożeniem) $\omega \wedge \nu$ [zwanym mnożeniem skośnym lub zewnętrznym] w taki sposób aby była to 2-forma w tym sensie, że w punkcie p określona by była na parach wektorów $(v_1, v_2) \in T_p M \times T_p M$,

$$(\omega \wedge \nu)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

To znaczy, że wartość $(\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2)$ musi zależeć od czterech liczb:

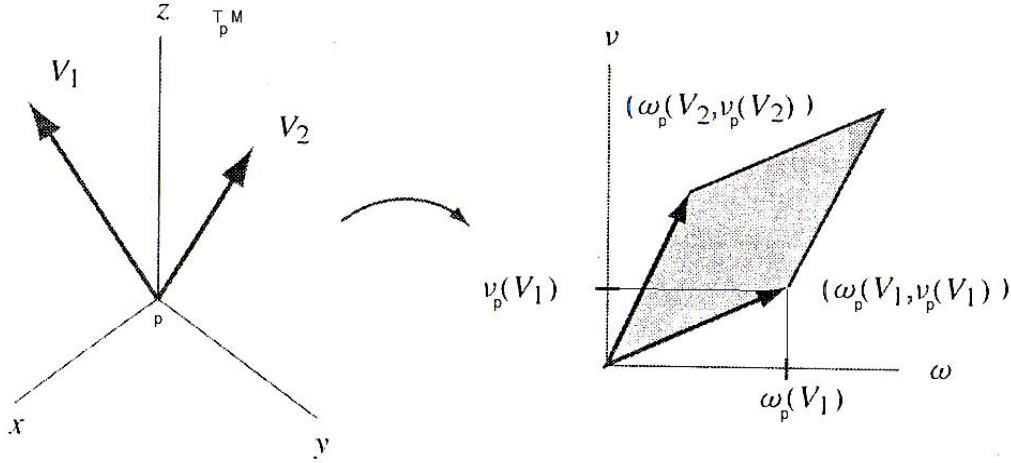
$$\omega_p(v_1), \nu_p(v_1), \omega_p(v_2), \nu_p(v_2).$$

Pierwsze dwie są związane z wektorem v_1 a ostatnie dwie z wektorem v_2 . Wektory o współrzędnych $[\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)]$ i $[\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)]$ traktujemy jak wektory na

płaszczyźnie kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$ o osiach ω i ν . Są to obrazy wektorów v_1 i v_2 za pomocą odwzorowania liniowego

$$(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto [\omega_p(v), \nu_p(v)].$$

Rozważmy równoległobok $P \subset \mathbb{R}^2$ rozpięty przez te dwa wektory. Geometrycznie mówiąc, P jest obrazem równoległoboku w przestrzeni $T_p M$ rozpiętego przez wektory v_1 i v_2 za pomocą odwzorowania $(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}^2 = O\omega\nu$.



Wiemy z analizy, że pole równoległoboku P jest wartością bezwzględną wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{vmatrix}.$$

Bardzo łatwo to pokazać za pomocą całki podwójnej i wzoru na zamianę zmiennych: rozważamy odwzorowanie które nam wyprostuje równoległobok P na kwadrat $K = [0, 1]^2$,

$$\begin{aligned} \Phi(r, s) &= r \cdot (\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)) + s \cdot (\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)) \\ &= (r \cdot \omega_p(v_1) + s \cdot \omega_p(v_2), r \cdot \nu_p(v_1) + s \cdot \nu_p(v_2)), \end{aligned}$$

$r, s \in [0, 1]$. $\Phi^{-1}[P] = [0, 1] \times [0, 1] = K$ i jacobian odwzorowania Φ jest równy właśnie wyznacznikowi powyższemu

$$J\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{vmatrix}.$$

Ze wzoru na zamianę zmiennych $\iint_P d\omega d\nu = \iint_K |J\Phi| dr ds = \left| \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix} \right|$.

$$|K| = \left| \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix} \right|.$$

Przyjmujemy jako definicję, że mnożenie 1-form $(\omega \wedge \nu)_p$ da 2-formę która na parze wektorów $(v_1, v_2) \in T_p M \times T_p M$ będzie równa znakowanemu polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $[\omega_p(v_1), \nu_p(v_1)]$ i $[\omega_p(v_2), \nu_p(v_2)]$, a dokładniej

$$(\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) = \det \begin{bmatrix} \omega_p(v_1) & \nu_p(v_1) \\ \omega_p(v_2) & \nu_p(v_2) \end{bmatrix},$$

czyli znakowanemu polu obrazu równoległoboku w $T_p M$ rozpiętego przez (v_1, v_2) za pomocą odwzorowania liniowego $(\omega_p, \nu_p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v \mapsto [\omega_p(v), \nu_p(v)]$.

Prawa strona powyższego wzoru zależy tylko od wartości form w punkcie p , można zatem za pomocą powyższego wyznacznika określić iloczyn skośny $\omega_p \wedge \nu_p$, czyli

$$(\omega \wedge \nu)_p = \omega_p \wedge \nu_p.$$

Pierwsza ważna obserwacja to skośna symetria mnożenia

$$\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega$$

co wynika z własności wyznacznika: gdy przestawimy dwie sąsiednie kolumny to wyznacznik zmienia się na przeciwny. W szczególności

$$\omega \wedge \omega = 0$$

gdyż $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ skąd $2 \cdot \omega \wedge \omega = 0$ co implikuje $\omega \wedge \omega = 0$.

Stosując do bazowych 1-form dx^i względem mapy $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ mamy tożsamości

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^j &= -dx^j \wedge dx^i \quad \text{dla } i \neq j, \\ dx^i \wedge dx^i &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Druga ważna obserwacja to liniowość względem pierwszej zmiennej v_1 oraz liniowość względem drugiej zmiennej v_2 , np. dla pierwszej zmiennej

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \nu)_p(v_1 + w_1, v_2) &= (\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) + (\omega \wedge \nu)_p(w_1, v_2), \\ (\omega \wedge \nu)_p(rv_1, v_2) &= r \cdot (\omega \wedge \nu)_p(v_1, v_2) \end{aligned}$$

co także wynika z elementarnych własności wyznacznika. Łącznie mówimy, że odwzorowanie $(\omega \wedge \nu)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwu-liniowe (tzn. liniowe względem każdej zmiennej).

Powyższe własności pozwalają łatwo obliczać iloczyn skośny 1-form zapisanych w lokalnej bazie $dx^1, \dots, dx^n$ względem mapy $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, np. na powierzchni 2-wymiarowej M i mapy o współrzędnych zwyczajowo oznaczanych (x, y) mamy dla 1-form

$$\begin{aligned} \omega &= 2x \cdot dx - xy \cdot dy \\ \nu &= \sin x \cdot dx + \cos y \cdot dy \end{aligned}$$

ich skośny iloczyn

$$\begin{aligned}
& \omega \wedge \nu \\
&= (2x \cdot dx - xy \cdot dy) \wedge (\sin x \cdot dx + \cos y \cdot dy) \\
&= 2x \cdot dx \wedge \sin x \cdot dx + 2x \cdot dx \wedge \cos y \cdot dy - xy \cdot dy \wedge \sin x \cdot dx - xy \cdot dy \wedge \cos y \cdot dy \\
&= 2x \cdot \sin x \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + 2x \cdot \cos y \cdot dx \wedge dy - xy \cdot \sin x \cdot \underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx \wedge dy} - xy \cdot \cos y \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\
&= 2x \cdot \cos y \cdot dx \wedge dy + xy \cdot \sin x \cdot dx \wedge dy \\
&= (2x \cdot \cos y + xy \cdot \sin x) \cdot dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy iloczyn skośny kilku 1-form $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ jako odwzorowanie które w danym punkcie p i układowi k -wektorów $(v_1, \dots, v_k) \in T_p M \times \dots \times T_p M$ przypisuje znakowane pole odpowiedniego k -równoległoscianu w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ (o osiach oznaczanych $\omega_1, \dots, \omega_k$) rozpiętego przez wektory wodzące punktów $[(\omega_{1p})(v_i), \dots, (\omega_{kp})(v_i)]$, czyli wyznacznik

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{bmatrix} \omega_{1p}(v_1) & \dots & \omega_{kp}(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{1p}(v_k) & \dots & \omega_{kp}(v_k) \end{bmatrix}.$$

Geometrycznie ten k -równoległoscian w $\mathbb{R}^k$ jest obrazem równoległoscianu w $T_p M$ rozpiętego przez $(v_1, \dots, v_k)$ za pomocą odwzorowania liniowego

$$(\omega_{1p}, \dots, \omega_{kp}) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^k, v \mapsto [\omega_{1p}(v), \dots, \omega_{kp}(v)].$$

Z własności wyznacznika obserwujemy własność: dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ liczb $(1, 2, \dots, k)$

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)} = \text{sgn } \sigma \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Wprost z definicji zarówno dla mnożenia skośnego dwu form jak i większej ich ilości wartość $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p$ w punkcie p zależy tylko od wartości tych form w punkcie p , czyli można przy pomocy tego wyznacznika zdefiniować iloczyn $\omega_{1p} \wedge \dots \wedge \omega_{kp}$ i wówczas mamy

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p = \omega_{1p} \wedge \dots \wedge \omega_{kp}.$$

Z własności wyznacznika wnosimy także, że iloczyn skośny k 1-form jest w każdym punkcie p odwzorowaniem

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k \text{ razy}} \rightarrow \mathbb{R}$$

k -liniowym (t.j. liniowym względem każdej z k zmiennych) oraz **skośnie symetrycznym** w sensie takim, że dla dowolnych wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ z przestrzeni stycznej $T_p M$ i permutacji $\sigma \in \Sigma_k$ mamy równość

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn } \sigma \cdot (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_p(v_1, \dots, v_k).$$

Na rozmaitości M wymiaru n iloczyn 1-form $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ w ilości $k > n$ jest zawsze zerowy

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0, \quad k > \dim M$$

a to dlatego, że po rozkładzie każdej 1-formy ω_i w bazie $dx^1, \dots, dx^n$ i wykonaniu mnożenia każdy składnik będzie zawierał co najmniej dwa jednakowe czynniki dx^i i w konsekwencji będzie równy 0.

Lemat 1.2.1 Dla funkcji $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$ i lokalnego układu współrzędnych $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ na zbiorze otwartym $U \subset M$ mamy na zbiorze U

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_k}} \end{vmatrix} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} df_1 \wedge \dots \wedge df_k &= \sum_{j_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} dx^{j_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_1}}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_k}}} dx^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\sigma_k}} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_1}}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_{\sigma_k}}} dx^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\sigma_k}} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{j_k}} \end{vmatrix} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

■

1.3 k-formy różniczkowe na rozmaitości

Definicja 1.3.1 k -formą na rozmaitości M określona na otwartym podzbiorze $U \subset M$ nazywamy przyporządkowanie ω każdemu punktowi $p \in U$ pewnego odwzorowania

$$\omega_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

które jest k -liniowe i skośnie symetryczne, tzn. $\omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_p(v_1, \dots, v_k)$.

Zbiór wszystkich k -form różniczkowych na określonym podzbiorze otwartym $U \subset M$ rozmaitości M oznaczamy przez $\Omega^k(U)$. W szczególności gdy $U = M$ mamy zbiór $\Omega^k(M)$. Formy różniczkowe można dodawać i mnożyć przez skalary (liczby) "punkt po punkcie", $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$, $(r \cdot \omega)_p = r \cdot \omega_p$, $p \in U$. Jest oczywiste, że otrzymamy w ten sposób przestrzeń wektorową $\Omega^k(U)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Formę różniczkową na U można także mnożyć przez funkcje rzeczywiste określone na U , tzn. dla $f \in C^\infty(U)$ określamy formę $f\omega \in \Omega^k(U)$ punkt po punkcie $(f\omega)_p = f(p) \cdot \omega(p)$, $p \in U$.

Przykładami k form są iloczyny k sztuk 1-form różniczkowych $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, $\omega_i \in \Omega^1(M)$.

Drugim ważnym przykładem są formy otrzymane następująco: rozważamy rozmaitość n -wymiarową $M \subset \mathbb{R}^m$ w przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^m$ i k -formę η w $\mathbb{R}^m$. Formy takie są generowane przez formy bazowe $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$ (gdzie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ jest standardowy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^m$). Ponieważ $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ to formę $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ można uważać także za formę na M określona w kierunku wektorów stycznych do M tym samym przepisem co η , tzn. $\eta_p : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ obcinamy do $\eta_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ i otrzymamy formę na M . Np dla powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ mamy formy $\omega = \omega^1 dx \wedge dy + \omega^2 dx \wedge dz + \omega^3 dy \wedge dz$ które są 2-formami na $\mathbb{R}^3$ i po obcięciu ich w każdym punkcie $p \in S$ do wektorów stycznych do S są także formami na S .

Ponieważ permutacja która przestawia dwie liczby miejscami jest zawsze nieparzysta, to gdy w ciągu wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ są dwa jednakowe wektory wówczas $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$ gdyż stosując taką permutację otrzymujemy $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = -\omega_p(v_1, \dots, v_k)$ dając $2 \cdot \omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$ co daje równość $\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Wynika stąd także, że gdy $k > \dim M$ to zawsze musi być $\omega_p = 0$. Istotnie, biorąc dowolny ciąg wektorów $(v_1, \dots, v_k)$ i rozkładając każdy wektor v_j względem bazy $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ obserwujemy z k -liniowości ω_p , że $\omega_p(v_1, \dots, v_k)$ jest kombinacją liniową składników postaci $\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}|_p\right)$ i skoro $k > \dim M = n$ to w ciągu $(i_1, \dots, i_k)$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ muszą zawsze być conajmniej dwie jednakowe, skąd składnik taki znika.

Niech $k \leq n = \dim M$. Biorąc w otoczeniu punktu p mapę $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ obserwujemy dzięki relacjom (1.2.1), że wartość k -formy ω w punkcie p jest kombinacją liniową bazowych 1-form

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k,$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \omega^{i_1 \dots i_k} \text{ są to funkcje rzeczywiste.}$$

-zwane współczynnikami formy ω

(rzeczywiście: pojawienie się dwu jednakowych form bazowych w takim iloczynie skutkuje zerowaniem się składnika i stąd nie może być go w bazie, zatem należy rozważyć tylko składniki w których $i_1, \dots, i_k$ są różne między sobą a następnie uporządkować je tak aby $i_1 < \dots < i_k$).

Mówimy, że k -forma ω jest klasy C^∞ jeżeli jej współczynniki $\omega^{i_1 \dots i_k}$ względem bazy dx^i są funkcjami klasy C^∞ .

Łatwo sobie wyobrazić mnożenie skośne dwu form ω i η , stopnia k i l odpowiednio, przez siebie zapisując w otoczeniu danego punktu każdą z nich we współrzędnych dx^i j/w

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \eta &= \sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega^{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \omega^{i_1 \dots i_k} \cdot \eta^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}
\end{aligned}$$

po czym porządkujemy wyrazy stosując zasady $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ dla $i \neq j$ i $dx^i \wedge dx^i = 0$. Np. dla form stopnia 1 i 2 na rozmaitości M wymiaru 3 w lokalnych współrzędnych $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
&(xdx - 2yzdy + zy^2dz) \wedge (xydx \wedge dy - 3zdy \wedge dz) \\
&= x^2y \underbrace{dx \wedge dx \wedge dy}_{=0} - 3xzdx \wedge dy \wedge dz - 2xy^2 \underbrace{zdy \wedge dx \wedge dy}_{=0} - 6yz^2 \underbrace{dz \wedge dy \wedge dz}_{=0} + \\
&\quad + xy^3 \underbrace{zdz \wedge dx \wedge dy}_{=0} - 3y^2 \underbrace{z^2dz \wedge dy \wedge dz}_{=0} \\
&= -3xzdx \wedge dy \wedge dz + xy^3zdz \wedge dx \wedge dy = -3xzdx \wedge dy \wedge dz - xy^3zdx \wedge dz \wedge dy \\
&= -3xzdx \wedge dy \wedge dz + xy^3zdx \wedge dy \wedge dz \\
&= (-3xz + xy^3) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Ale czy taka definicja jest poprawna? Tzn. czy nie zależy od wyboru lokalnego układu współrzędnych? Rzeczywiście tak jest, bowiem można zdefiniować mnożenie skośne bez używania lokalnego układu współrzędnych i pokazać, że otrzymujemy to samo.

Definicja 1.3.2 *Iloczynem zewnętrznym [skośnie symetrycznym] form różniczkowych ω i η stopnia k i l odpowiednio na otwartym podzbiorniku $U \subset M$ rozmaitości M nazywamy formę różniczkową stopnia $k+l$ określoną na U następująco: dla dowolnego punktu $p \in U$ i wektorów $v_i \in T_p M$*

$$\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma^{k+l} \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \\ \eta(k+1) < \dots < \sigma(k+l)}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}$$

(czyli z dokładnością do stałej jest to uskośnienie mnożenia $\omega_p(v_1, \dots, v_k) \cdot \eta_p(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$).

Twierdzenie 1.3.1 *Mnożenie skośne w/g powyższej definicji ma następujące własności:*

(1) *antyprzemienność*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

w szczególności gdy obie formy są stopnia nieparzystego to $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$, gdy conajmniej jedna jest stopnia parzystego to $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

(2) dwuliniowość

$$\begin{aligned}(r \cdot \omega_1 + s \cdot \omega_2) \wedge \eta &= r \cdot \omega_1 \wedge \eta + s \cdot \omega_2 \wedge \eta, \\ \omega \wedge (r \cdot \eta_1 + s \cdot \eta_2) &= r \cdot \omega \wedge \eta_1 + s \cdot \omega \wedge \eta_2\end{aligned}$$

(3) łączność

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta),$$

przy czym zachodzi wzór

$$\begin{aligned}& \omega \wedge \eta \wedge \theta(v_1, \dots, v_{k+l+s}) \\ &= \frac{1}{k!l!s!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l+s}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \cdot \theta(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+s)}).\end{aligned}$$

Analogicznie dla większej ilości czynników, np dla 1-form $\omega^1, \dots, \omega^k$

$$\begin{aligned}\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in \Sigma^k} \text{sgn } \sigma \cdot \omega^1(v_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot \omega^k(v_{\sigma(k)}) \\ &= \det [\omega^i(v_j)]\end{aligned}$$

(co oznacza, że mnożenie w/g powyższej definicji oraz definicji pierwotnej dotyczącej 1-form pokrywa się).

Z własności tych wynika, że obie definicje mnożenia wyżej przedstawione dają w efekcie tę samą formę różniczkową.

Najważniejsze rzeczy które można robić z formami różniczkowymi to ich cofanie oraz różniczkowanie oraz dla form maksymalnego stopnia $n = \dim M$ - całkowanie. Omówimy je poniżej.

1.4 Cofanie form różniczkowych

Niech $F : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem klasy C^∞ między rozmaitościami M i N . Dla formy różniczkowej $\omega \in \Omega^\infty(N)$ określimy jej cofnięcie $F^*\omega \in \Omega^k(M)$.

Cofanie 0 form.

Cofanie 0 form czyli funkcji $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ określamy następująco:

$$\begin{aligned}F^* &: \Omega^\infty(N) \rightarrow \Omega^\infty(M), \\ F^*(f) &= f \circ F.\end{aligned}$$

Odwzorowanie to jest oczywiście liniowe $F^*(rf + sg) = r \cdot (f \circ F) + s \cdot (g \circ F) = r \cdot F^*(f) + s \cdot F^*(g)$.

Cofanie 1-form różniczkowych.

Przypomnijmy różniczkę odwzorowania $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, zwanego też pchaniem wektorów.

Definicja 1.4.1 Niech $\omega \in \Omega^1(N)$. Określamy cofnięcie formy ω za pomocą odwzorowania F , $F^*\omega$, wzorem

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}((T_p F)(v)), \quad v \in T_p M.$$

Lemat 1.4.1 Własności operacji cofania $F^* : \Omega^\infty(N) \rightarrow \Omega^\infty(M)$ 1-form.

- (1) F^* jest liniowa, t.j. $F^*(\omega + \omega') = F^*(\omega) + F^*(\omega')$, $F^*(r \cdot \omega) = r \cdot F^*(\omega)$, $r \in \mathbb{R}$,
- (2) $F^*(df) = d(f \circ F)$ dla $f \in C^\infty(N)$,
- (3) $F^*(f \cdot \omega) = F^*(f) \cdot F^*\omega$.

Dowód. (1) jasne, formalny dowód zostawiam jako ćwiczenie.

(2) dla przykładu

$$(F^*(df))_p(v) = (df)_{F(p)}((T_p F)(v)) = (T_{F(p)} f)((T_p F)(v)) = T_p(f \circ F)(v).$$

(3)

$$\begin{aligned} (F^*(f \cdot \omega))_p(v) &= (f \cdot \omega)_{F(p)}((T_p F)(v)) = (f(F(p)) \cdot \omega_{F(p)})((T_p F)(v)) \\ &= f(F(p)) \cdot \omega_{F(p)}((T_p F)(v)) = f(F(p)) \cdot (F^*\omega)_p(v) \\ &= (f \circ F)(p) \cdot (F^*\omega)_p(v) = (F^*(f) \cdot F^*\omega)_p. \end{aligned}$$

■

Wniosek 1.4.1 Niech $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ oznaczają lokalne współrzędne na rozmaitości M w otoczeniu punktu p oraz $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ lokalne współrzędne na rozmaitości N w otoczeniu punktu $F(p)$. Dla współrzędnych F_j odwzorowania F mapie $\mathbf{y}$, $F^j = y^j \circ F$ oraz mamy

$$F^*(dy^j) = d(y^j \circ F) = d(F^j) = \sum_i \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \cdot dx^i.$$

Przypomnijmy, odwzorowanie liniowe $f : V \rightarrow W$ między przestrzeniami wektorowymi V i W wyznacza odwzorowanie tzw. odwzorowanie dualne $f^* : W^* \rightarrow V^*$ wzorem

$$f^*(\omega)(v) = \omega(f(v)), \quad \omega \in W^*, \quad v \in V.$$

Widzimy, że dla 1-formy $\omega \in \Omega^1(N)$ i odwzorowania liniowego $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ oraz odwzorowania dualnego $(F_{*p})^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ cofanie 1-form dla punktu p określone jest przy użyciu odwzorowania dualnego $(F_{*p})^*$

$$(F^*(\omega))_p = \omega_{F(p)}((T_p F)(v)) = (T_p F)^*(\omega_{F(p)})(v).$$

Cofanie k form różniczkowych.

Definicja 1.4.2 Niech $\omega \in \Omega^k(N)$. Określamy $F^*\omega \in \Omega^k(M)$ wzorem

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}((T_p F)(v_1), \dots, (T_p F)(v_k)).$$

Lemat 1.4.2 Własności operacji cofania $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ k -form różniczkowych.

- (1) F^* jest liniowa,
- (2) $F^*(f \cdot \omega) = F^*(f) \cdot F^*\omega$,
- (3) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$.

Dowód. (1) i (2) dowodzi się analogicznie jak dla 1-form.

(3) Dla $\omega, \omega' \in \Omega(N)$, $p \in M$ i wektorów $v_i \in T_pM$,

$$\begin{aligned}
& (F^*(\omega \wedge \eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
&= (\omega \wedge \eta)_p((T_pF)(v_1), \dots, (T_pF)(v_{k+l})) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_{F(p)}((T_pF)(v_{\sigma(1)}), \dots, (T_pF)(v_{\sigma(k)})) \cdot \eta_{F(p)}((T_pF)(v_{\sigma(k+1)}), \dots, (T_pF)(v_{\sigma(k+l)})) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{k+l}} \text{sgn } \sigma \cdot (F^*\omega)_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot (F^*\eta)_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= (F^*\omega)_p \wedge (F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\
&= (F^*\omega \wedge F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

■

Wniosek 1.4.2 Niech $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m)$ oznaczają lokalne współrzędne na rozmaitości M w otoczeniu punktu p oraz $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ lokalne współrzędne na rozmaitości N w otoczeniu punktu $F(p)$. Wtedy z Lematu (1.2.1)

$$\begin{aligned}
F^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d(F^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^{i_k}) \\
&= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial F^{i_1}}{\partial y^{j_1}} & \dots & \frac{\partial F^{i_k}}{\partial y^{j_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^{i_1}}{\partial y^{j_k}} & \dots & \frac{\partial F^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \end{vmatrix} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}.
\end{aligned}$$

Współczynnik przy $dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$ interpretujemy geometrycznie następująco: rozważamy wektory $\left[\frac{\partial F^1}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^{j_1}} \right], \dots, \left[\frac{\partial F^1}{\partial y^{j_k}}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^{j_k}} \right] \in \mathbb{R}^n$, następnie rzutujemy je na podprzestrzeń o osiach $(i_1, \dots, i_k)$ i obliczamy znakowaną k -wymiarową objętość równoległoscianu rozpiętego przez tak otrzymane wektory.

W szczególności, gdy $n = m$ oraz $k = n$ to

$$F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

gdzie JF jest (w danym punkcie) macierzą Jacobiego odwzorowania F w mapach $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$, geometrycznie współczynnik $\det(JF)_p$ to znakowana n -wymiarowa objętość równoległoscianu w $\mathbb{R}^n$ rozpiętego przez wektory pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial y^i} = \left[\frac{\partial F^1}{\partial y^i}, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial y^i} \right]$, $i = 1, \dots, n$. Nieco ogólniej co będzie nam zaraz potrzebne

$$F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = F^*(f) \cdot F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = f \circ F \cdot \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

1.5 Rozmaitości zorientowane i całkowanie form różniczkowych maksymalnego stopnia

Całkowanie w końcowym etapie musi się sprowadzić do znanej operacji całkowania (w sensie Riemanna lub ogólniejszym Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$), tzn. do liczenia całki z funkcji n -zmiennych $f(x^1, \dots, x^n)$ po zbiorze mierzalnym $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n.$$

Wyrażenie pod całką wygląda znajomo, podobnie do formy różniczkowej stopnia n która we współrzędnych kartezjańskich jest postaci

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Jeśli akurat różniczki zmiennych występują w naszej n -formie w innej kolejności to można je poprzerastawiać wykorzystując własności (1.2.1) skośnego mnożenia $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, $dx^i \wedge dx^i = 0$.

Dlatego jest całkiem naturalne po prostu przyjąć, że

$$\int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \stackrel{\text{definicja}}{=} \int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

o ile całka Riemanna lub Lebesgue'a z funkcji $f(x^1, \dots, x^n)$ istnieje. Przy innym porządku zmiennych w iloczynie $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ stosujemy warunki skośności, np.

$$\int_A f(x, y) dy \wedge dx = - \int_A f(x, y) dx \wedge dy = - \int_A f(x, y) dx dy.$$

Jedną z najważniejszych własności (ułatwiających obliczanie całek po "krzywych" obszarach) jest twierdzenie o zamianie zmiennych, bowiem wybierając stosownie zmianę zmiennych można "wyprostować" obszar do tzw. normalnego obszaru lub nawet czasem do prostopadłościanu i w końcu zastosować Twierdzenie Fubiniego czy nawet od razu sprowadzić liczenie do całek iterowanych po kolejnych zmiennych. Zasada stosowania zamiany zmiennych do dyfeomorfizmu $F : D' \rightarrow D$ między otwartymi zbiorami D i D' w $\mathbb{R}^n$ polega na wzorze

$$\int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{D'} f(F(y^1, \dots, y^n)) \cdot |JF((y^1, \dots, y^n))| dy^1 \dots dy^n$$

(zakładając o funkcji f całkowalność). Aby w powyższym wzorze nie był potrzebny moduł Jacobianu to musimy założyć że zmiana zmiennych zachowuje orientację, tzn. $Jf((y^1, \dots, y^n)) > 0$ dla $(y^1, \dots, y^n) \in D'$.

Skonfrontujmy teraz ten ostatni wzór ze wzorem

$$F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = F^*(f) \cdot F^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = f \circ F \cdot \det(JF) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

otrzymanym niedawno i z definicją całki z n -formy. Dla dyfeomorfizmu F zachowującego orientację mamy zatem wzór

$$\int_D f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{D'} F^*(f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n), \quad \text{gdy } \det(JF) > 0$$

Jeżeli dyfeomorfizm F zmienia orientację (tzn. $\det(JF) < 0$) wówczas całki te będą różniły się znakiem

$$\int_D f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = - \int_{D'} F^* (f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n), \quad \text{gdy } \det(JF) < 0.$$

Oznaczając $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ - jest to postać dowolnej n -formy na $\mathbb{R}^n$ - otrzymujemy

$$\int_D \omega = \pm \int_{D'} F^* \omega, \quad (1.5.1)$$

znak zależy od tego, czy dyfeomorfizm F zachowuje czy zmienia orientację (tzn. czy $\det(JF) > 0$ czy $\det(JF) < 0$).

Wzory te podpowiadają nam metodę całkowania n -form ω klasy C^∞ na hiperpowierzchniach n -wymiarowych M . Najpierw założmy, że "cała" forma siedzi w dziedziny $U \subset M$ pewnej mapy $\mathbf{x}$, tzn. dokładniej, że tzw. nośnik formy ω czyli domknięcie zbioru tych punktów, w których forma jest niezerowa jest zawarty w U ; nośnik ω oznaczamy symbolem $\text{supp } \omega$, zatem

$$\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M, \omega_p \neq 0\}} \subset U.$$

Forma ω na U jest postaci $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Należy teraz wziąć parametryzację $\varphi = \mathbf{x}^{-1} : \mathbb{R}^n \supset U' \rightarrow U \subset M$, odwrotną do mapy $\mathbf{x}$ i cofnąć naszą formę do przestrzeni parametrów $\varphi^*(\omega)$ a tak otrzymaną n -formę na $\mathbb{R}^n$ daje się już klasycznie scałkować $\int_{U'} \varphi^*(\omega)$ jak było wyżej opisane. Pytanie: a jak ta całka $\int_{U'} \varphi^*(\omega)$ zależy od wyboru parametryzacji? Otóż, jeżeli wziąć drugą parametryzację $\psi : \mathbb{R}^n \supset U'' \rightarrow U \subset M$ tego samego otwartego podzbioru $U \subset M$, to dzięki wyżej pisanemu wzorowi na zmianę zmiennych (stosowanego dla dyfeomorfizmu przejścia $F = \psi^{-1} \circ \varphi : U' \rightarrow U''$) jest jasne, że jeśli funkcja przejścia F ma jakobian dodatni, to wartości całek będą takie same. Jeśli natomiast wziąć ψ taką, że funkcja przejścia ma jakobian ujemny to wartości całek będą przeciwne (na podstawie (1.5.1)):

$$\int_{U''} \psi^*(\omega) = \pm \int_{U'} F^*(\psi^*(\omega)) = \pm \int_{U'} (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\psi^*(\omega)) = \pm \int_{U'} \varphi^*((\psi^{-1})^*(\psi^*(\omega))) = \pm \int_{U'} \varphi^*(\omega).$$

Co w takim razie zrobić aby definicja była poprawna? Aby określić całkę z formy ω określonej na hiperpowierzchni M przede wszystkim musimy mieć możliwość wyboru atlasu parametryzacji takich, aby funkcje przejścia miały jakobiany dodatnie. A to oznacza, że można całkować formy tylko po **hiperpowierzchniach zorientowanych** czyli takich, dla których taki atlas jest zadany (nie każda hiperpowierzchnia dopuszcza taki atlas, np. wstęga Möbiusa nie dopuszcza takiego atlasu, nie jest orientowalna).

Definicja 1.5.1 *Hiperpowierzchnię M nazywamy orientowalną jeżeli dopuszcza atlas dla którego funkcje przejścia mają dodatni Jakobian.*

Zauważmy, że dana parametryzacja φ otwartego podzbioru $U \subset M$ orientuje każdą przestrzeń styczną $T_p M$ dla $p \in U$ za pomocą bazy kanonicznej wyrażonej przy pomocy mapy $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p \right)$ i że dwie parametryzacje na tym samym zbiorze

U i zgodne w tym sensie, że funkcja przejścia ma dodatni Jakobian jednakowo orientującą przestrzenie styczne $T_p M$. Zatem orientację M można zadać równoważnie poprzez orientację każdej przestrzeni stycznej $T_p M$ ale tak, żeby orientacja "gładko" zależała od punktu [w tym sensie, aby w otoczeniu U dowolnego punktu istniała mapa która orientuje przestrzeń styczną tak samo jak zadana orientacja].

Uwaga 1.5.1 Dodajmy jeszcze, że gdy $M \subset \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią zorientowaną, to na M istnieje pole wektorowe ciągle wszędzie niezerowe N i prostopadłe do M . Mianowicie, pole takie określone jest przez wykorzystanie iloczynu wektorowego: na dziedzinie mapy $\mathbf{x} = (x, y)$ zgodnej z zadaną orientacją pole N definiujemy wzorem

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \right\|}.$$

I odwrotnie, zadanie takiego pola orientuje powierzchnię, bo wybieramy atlas map takich, które na swojej dziedzinie orientują przestrzeń styczną zgodnie z zadaną orientacją i łatwo zobaczyć, że dwie takie mapy mają funkcje przejścia o dodatnim Jakobianie. Daje się to uogólnić na przypadek hiperpowierzchni wymiaru $n - 1$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ stosując iloczyn wektorowy $n - 1$ wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Jest jeszcze jeden równoważny sposób orientowania n -wym. hiperpowierzchni: mianowicie M jest orientowalna gddy istnieje na M forma różniczkowa ω stopnia n niezerowa w każdym punkcie.

Założmy zatem, że nasza hiperpowierzchnia M jest zorientowana. Pojawia się drugi problem: jeżeli forma ω nie jest "skupiona" w jednej mapie, tzn. jej nośnik nie siedzi w jednej mapie. Co wtedy zrobić? Otóż, w tym celu trzeba by umieć rozłożyć formę ω na sumę form

$$\sum_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

takich aby każdy składnik miał mały nośnik, tzn. zawarty w jednej mapie. Do tego celu służy narzędzie zwane rozkładem jedynki.

Rozważamy otwarte pokrycie $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$ hiperpowierzchni M dziedzinami map (parametryzacji φ_{α}). Udowadnia się (co pominiemy) istnienie funkcji klasy C^{∞} na hiperpowierzchni M

$$\{\rho_{\alpha}\}$$

takich, że

- (a) nośnik funkcji ρ_{α} jest zawarty w U_{α} , $\text{supp } \rho_{\alpha} \subset U_{\alpha}$,
- (b) rodzina nośników $\{\text{supp } \rho_{\alpha}\}$ jest lokalnie skończona w tym sensie, że każdy punkt $p \in M$ ma otoczenie otwarte V które przecina się tylko ze skończoną ilością nośników $\text{supp } \rho_{\alpha}$ (dzięki czemu suma - może być nieskończona - $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$ ma sens).

$$(c) \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = 1$$

Dzięki własności (c) rodzina $\{\rho_{\alpha}\}$ nazywa się **rozkładem jedności** (podporządkowanym pokryciu $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$).

Dowolną n -formę ω na M możemy przedstawić w postaci

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) \cdot \omega = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} \cdot \omega) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}, \quad \text{gdzie } \omega_{\alpha} = \rho_{\alpha} \cdot \omega,$$

i oczywiście nośniki form ω_α są wtedy małe, zawarte w dziedzinach U_α parametryzacji φ_α , $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$. Definiujemy (pod warunkiem zwartości nośnika ω - np. gdy sama rozmaitość jest zwarta - co zapewnia istnienie poniższej całki)

$$\int_M \omega = \sum_a \int_{\varphi_a[U_a]} (\varphi_a)^* (\rho_a \cdot \omega).$$

Dowodzi się, że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od pomocniczych wyborów jak np. atlasu zgodnie orientującego M zadaną orientacją, oraz od rozkładu jedności.

Będzie przydatne w końcu wykładu twierdzenie:

Twierdzenie 1.5.1 *Dla n -formy ω nigdzie niezerowej na rozmaitości zorientowanej zwartej M*

$$\int_M \omega \neq 0.$$

Dowód. Ustalmy pokrycie mapami zgodnymi z orientacją zadaną $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ i zapiszmy formę ω w mapach

$$\omega|_{U_\alpha} = f^\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Z założenia f^α jest niezerowa. Dla ustalenia uwagi, załóżmy że w dla jakiejś mapy $\mathbf{x}_\alpha$ funkcja $f^\alpha > 0$. Pokażemy, że w każdej innej mapie $\mathbf{x}_\beta$ funkcja $f^\beta > 0$. Najpierw rozważmy drugą mapę o dziedzinie U_β przecinającą U_α , $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Niech $\omega|_{U_\beta} = f^\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n$. Przedstawiamy różniczki dx_β^i za pomocą różniczek dx_α^k ,

$$dx_\beta^i = \sum_k a_k^i dx_\alpha^k.$$

Obliczamy

$$a_k^i = dx_\beta^i \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \right) = \frac{\partial (x_\beta^i)}{\partial x_\alpha^k}.$$

Macierz

$$a = [a_k^i] = \left[\frac{\partial (x_\beta^i)}{\partial x_\alpha^k} \right]$$

ma dodatni wyznacznik bo mapy są zgodne oraz

$$\begin{aligned} f^\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n &= \omega|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ &= f^\beta dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n \\ &= f^\beta \sum_{k_1} a_{k_1}^1 dx_\alpha^{k_1} \wedge \dots \wedge \sum_{k_n} a_{k_n}^n dx_\alpha^{k_n} \\ &= f^\beta \det a \cdot dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n \end{aligned}$$

skąd

$$f^\alpha = f^\beta \det a$$

co implikuje, że obie funkcje f^α i f^β są tego samego znaku. Biorąc dowolnie punkt $x \in U_\alpha$ oraz $y \in M$ i łącząc x z y dowolnym łukiem ciągłym można (ze zwartości łuku) znaleźć

skończony "łańcuch" map $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ taki, że dwa sąsiednie mają niepustą część wspólną dziedzin. Z powyższego wywodu kolejne dwie funkcje f^i, f^{i+1} są tego samego znaku, więc w szczególności ta ostatnia jest tego samego znaku co pierwsza. W sumie $\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha[U_\alpha]} (\varphi_\alpha)^* (\rho_\alpha \cdot \omega)$ definiującej całkę, każdy składnik całkuje funkcje $f^\alpha \circ \varphi_\alpha$ ($\varphi_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^{-1}$) nieujemną i gdzieś niezerową, skąd musi być $\int_M \omega > 0$. ■

Uwaga 1.5.2 (Na zapas) Po wprowadzeniu wzoru Stokesa i różniczkowania form z warunku $\int_M \omega \neq 0$ wynikać będzie, że forma ω nie jest dokładna, tzn. nie jest różniczką żadnej $(n-1)$ -formy. Istotnie, gdyby $\omega = d\eta$ to skoro brzeg rozmaitości M jest pusty mamy ze wzoru Stokesa

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0$$

wbrew założeniu. Zatem napewno będzie $H^n(M) \neq 0$ ($H^n(M)$ to n -ta grupa kohomologii rozmaitości M).

Zastosowania całkowania form w fizyce często polegają na stowarzyszeniu z polem wektorowym odpowiedniej formy różniczkowej.

Przykład 1.5.1 Rozważmy na $\mathbb{R}^n$ pole wektorowe $\mathbf{F}$ o współrzędnych $\mathbf{F} = [P_1, \dots, P_n]$. Wiążemy z nim 1-formę różniczkową

$$\eta = P_1 dx^1 + \dots + P_n dx^n.$$

Jeśli w dziedzinie pola jest określony pewien łuk $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, (zadany jest dzięki temu na obrazie łuku - czyli krzywej - kierunek obiegu parametru, a więc zadana jest orientacja tej krzywej) to można liczyć całkę

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \eta &: = \int_a^b \mathbf{c}^*(\eta) = \int_a^b \mathbf{c}^*(P_1 dx^1 + \dots + P_n dx^n) = \\ &= \int_a^b P_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx^1}{dt} + \dots + P_n(\mathbf{c}(t)) \frac{dx^n}{dt} \\ &= \int_a^b [P_1, \dots, P_n] \bullet \left[\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right] \quad / \text{mamy tu iloczyn skalarny} \end{aligned}$$

i widzimy, że jest to całka skierowana wzdłuż łuku $\mathbf{c}$ z pola wektorowego $\mathbf{F}$ (znaną z semetru III). Całkę oznacza się także $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ i jest to praca pola wektorowego $\mathbf{F}$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\mathbf{c}$. Z ostatniego wzoru widzimy także, że pole $\mathbf{F}$ prostopadłe do drogi żadnej pracy nie wykona.

Przykład 1.5.2 Jeśli $S \subset \mathbb{R}^3$ jest 2-wymiarową **zorientowaną** powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ jest polem wektorowym którego dziedzina zawiera powierzchnię S to z polem wektorowym $\mathbf{F}$ wiążemy 2 formę $\eta = Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$. Całkę $\int_S \eta$ oznaczamy także $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ i nazywamy **strumieniem pola $\mathbf{F}$ przez powierzchnię zorientowaną S**

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_S Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy.$$

Jeśli powierzchnia zorientowana S określona jest poprzez jedną parametryzację $\varphi : U \rightarrow S$ zgodną z orientacją (nie trzeba wtedy rozkładu jedności) wówczas mamy

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} & : = \int_S P dy \wedge dz - Q dx \wedge dz + R dx \wedge dy = \\ & = \int_U \varphi^* (P dy \wedge dz - Q dx \wedge dz + R dx \wedge dy) = \dots \end{aligned}$$

Po nietrudnych standardowych obliczeniach dostajemy znany z III semestru wzór (nie trzeba go pamiętać - wystarczy "na palcach" cofać naszą formę przez φ !)

$$\begin{aligned} & = \iint_U \left(P(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - Q(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + R(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv \\ & = \iint_U \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dudv, \quad / \text{mamy tu iloczyn skalarny} \end{aligned}$$

Z ostatniego wzoru także widzimy, że pole $\mathbf{F}$ prostopadłe do $(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v})$ czyli styczne do powierzchni daje zerowy strumień.

1.6 Różniczkowanie form różniczkowych

Definicja 1.6.1 Różniczkę 0-formy na rozmaitości M , czyli funkcji f określamy jako zwykłą różniczkę df . Jest to 1-forma na M . Różniczkę k formy $\omega \in \Omega^k(M)$, $k \geq 1$, określamy następująco: różniczką jest $k+1$ forma oznaczana przez $d\omega$ taka, że gdy przedstawimy formę ω lokalnie w jakimś układzie współrzędnych $(U, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\omega|_U = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, to na dziedzinie U tej mapy zachodzi

$$(d\omega)|_U = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (1.6.1)$$

Należy pokazać poprawność definicji, tzn. niezależność $(d\omega)|_U$ od wyboru mapy na U . Dowód przebiega następująco: najpierw pokazujemy własności operatora

$$d_x : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$$

określonego dla ustalonej mapy x o dziedzinie U wzorem j/w.

Twierdzenie 1.6.1 1. d_x jest liniowy,

$$2. d_x(f) = df,$$

$$3. d_x(\omega \wedge \eta) = d_x\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_x\eta, \text{ dla formy } \omega \text{ stopnia } k \text{ i dowolnej formy } \eta,$$

$$4. d_x(d_x f) = 0.$$

Następnie pokazujemy, że jest tylko **jeden** operator $\tilde{d} : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ spełniający takie 4 postulaty. Stąd d_x nie może zależeć od mapy x , dla map $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ musi bowiem być $d_{\mathbf{x}} = \tilde{d} = d_{\mathbf{y}}$.

Jak to pokazujemy?

a) weźmy dowolne funkcje $f_1, \dots, f_k$, wówczas $\tilde{d}(df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$. Istotnie, pokażemy to indukcją względem k . Dla $k = 1$

$$\tilde{d}(df_1) \stackrel{(2)}{=} \tilde{d}(\tilde{d}f_1) \stackrel{(4)}{=} 0.$$

Założmy, że równość zachodzi dla pewnej liczby k , pokażemy że zachodzi dla liczby $k + 1$

$$\tilde{d}(df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge df_{k+1}) \stackrel{(3)}{=} \underbrace{\tilde{d}(df_1)}_{=0 \text{ dla } k=1} \wedge (df_2 \wedge \dots \wedge df_{k+1}) - df_1 \wedge \underbrace{\tilde{d}(df_2 \wedge \dots \wedge df_{k+1})}_{=0 \text{ z zał. ind dla } k} = 0$$

d) zapiszmy dowolną k formę w jakimkolwiek lokalnym układzie współrzędnych $\mathbf{x}$ na U w postaci $\omega = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Pokazujemy (stosując 1), 3), 2) i a), że

$$\tilde{d}(\omega) = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (1.6.2)$$

Prawa strona zależy zatem tylko od różniczek funkcji. Zatem gdy $\tilde{d}$ i $\bar{d}$ są dwoma operatorami spełniającymi te 4 postulaty to $\tilde{d}(\omega) = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \bar{d}(\omega)$ co dowodzi jednoznaczności operacji spełniającej te 4 postulaty. Pokażemy wzór (1.6.2) korzystając tylko z aksjomatów 1-4 oraz wykazanych własności a), b) i c).

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\omega) &= \tilde{d}\left(\sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \quad /z \text{ 1. czyli z liniowości} \\ &= \sum \tilde{d}\left(\omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \quad /z \text{ 3 i 2} \\ &= \sum d\left(\omega^{i_1, \dots, i_k}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \underbrace{\omega^{i_1, \dots, i_k} \cdot \tilde{d}\left(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right)}_{=0 \text{ z a)}} \\ &= \sum d\left(\omega^{i_1, \dots, i_k}\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Oczywiście, operator globalny $d = d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ określony lokalnym wzorem (1.6.1) spełnia te same 4 postulaty jak operator dla dziedziny mapy. Pokażemy, że postulaty 1), 2), 3), 4) jednoznacznie charakteryzują globalny operator d_M . W tym celu pokażemy najpierw lemat o **lokalności** operatora d_M spełniającego 1), 3).

Lemat 1.6.1 *Operator d_M spełniający 2 powyższe globalne postulaty 1), 3)*

1) d_M jest liniowy,

3) $d_M(\omega \wedge \eta) = d_M\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_M\eta$,

jest lokalny, tzn. gdy $\omega, \omega' \in \Omega(M)$ są dwiema formami na M równymi na podzbiorze otwartym $B \subset M$, $\omega|_B = \omega'|_B$. to $(d_M\omega)|_B = (d_M\omega')|_B$.

Dowód. Weźmy dowolnie $x \in B$ oraz funkcję ρ rozdzielającą x w B , tzn. taką, że $\text{supp } \rho \subset B$ oraz $\rho|_V = 1$ dla pewnego otwartego podzbioru $V \subset B$ zawierającego x , wówczas

$$\rho(\omega - \omega') = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{1)}{=} d_M(0) &= d_M(\rho(\omega - \omega')) \stackrel{3)}{=} d_M(\rho) \wedge (\omega - \omega') + \rho \cdot d_M(\omega - \omega') \\ &\stackrel{1)}{=} d_M(\rho) \wedge (\omega - \omega') + \rho \cdot (d_M\omega - d_M\omega'). \end{aligned}$$

Stąd na otoczeniu V punktu x mamy

$$\begin{aligned} 0 &= (d_M(\rho))|_V \wedge (\omega - \omega')|_V + \rho|_V \cdot \left((d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V \right) \\ &= (d_M(\rho))|_V \wedge 0 + 1 \cdot \left((d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V \right) \\ &= (d_M\omega)|_V - (d_M\omega')|_V \end{aligned}$$

skąd

$$(d_M\omega)|_V = (d_M\omega')|_V.$$

Z dowolności wyboru punktu $x \in B$ wnosimy, że

$$(d_M\omega)|_B = (d_M\omega')|_B.$$

■

Twierdzenie 1.6.2 *Dla dowolnej parazwartej rozmaitości Hausdorffa M istnieje dokładnie jeden operator globalny $d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ spełniający postulaty 1), 2), 3), 4)*

Lemat 1.6.2 *1) d_M jest liniowy,*

$$2) d_M f = df,$$

$$3) d_M(\omega \wedge \eta) = d_M\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d_M\eta,$$

$$4) d_M(d_M f) = 0.$$

Jest on określony lokalnym wzorem (1.6.1).

Dowód. Istnienie. Operator globalny d określony lokalnym wzorem (1.6.1) jak wiemy spełnia te postulaty, więc operator d_M spełniający 1), 2), 3), 4) istnieje.

Jednoznaczność. Tak samo jak wyżej pokazujemy, a) że $d_M(df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = 0$ dla funkcji f_i na M . Niech d', d'' będą dwoma globalnymi operatorami spełniającymi 1), 2), 3), 4). Lemat zaświadcza, że każdy z nich jest lokalny. Weźmy więc mapę $\mathbf{x}$ na dziedzinie U i przedstawmy formę $\omega_U = \sum \omega^{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Ustalmy $x \in U$ i wybierzmy funkcję ρ rozdzielającą x w U , $\rho|_B = 1$, dla $x \in B \subset U$. Wtedy $\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}$, $\rho \cdot x^i$ są funkcjami gładkimi na całej rozmaitości M oraz $\omega|_B = (\sum (\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}))|_B$. Z lokalności operatorów d', d'' mamy

$$\begin{aligned} (d'\omega)|_B &= d' \left(\sum (\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}) \right)|_B \\ &= \left(\sum d(\rho \cdot \omega^{i_1, \dots, i_k}) \wedge d(\rho \cdot x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\rho \cdot x^{i_k}) \right)_B \\ &= (d''\omega)|_B. \end{aligned}$$

Z dowolności x wnosimy o równości $d'\omega = d''\omega$. Z powyższych równości skoro $\rho|_B = 1$ to

$$(d_M\omega)|_B = \left(\sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right)|_B$$

i z dowolności x wnosimy o równości $(d_M\omega)|_U = \sum d\omega^{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. ■

Przykład 1.6.1 *Obliczyć $d(x^2y dx + x dy)$.*

Twierdzenie 1.6.3 *Operator cofania form komutuje z różniczkowaniem form, tzn. gdy $F : M \rightarrow N$ jest odwzorowaniem między hiperpowierzchniami wówczas dla dowolnej formy ω na rozmaitości N zachodzi wzór*

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Dowód. Dla formy stopnia 0 było napisane we wcześniejszym Lemacie, $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi) = d(\Phi^*f)$. Załóżmy indukcyjnie, że przemienność cofania z różniczkowaniem zachodzi dla form pewnego stopnia $k \geq 0$. Pokażemy, że zachodzi dla form stopnia $k+1$. Z liniowości tych operatorów wynika, że wystarczy sprawdzić lokalnie dla form postaci $f \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}$ gdzie $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ jest lokalnym systemem współrzędnych (czyli mapą) na podzbiorze otwartym $U \subset N$. Forma taka ma postać $\omega \wedge dx^{i_{k+1}}$ dla pewnej formy $\omega = f \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ stopnia k dla której zachodzi założenie indukcyjne.

$$\begin{aligned} d(F^*(\omega \wedge dx^{i_{k+1}})) &= d(F^*\omega \wedge d(F^{i_{k+1}})) \quad / F^{i_{k+1}} = x^{i_{k+1}} \circ F \quad \text{na zbiorze } F^{-1}[U] \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) + (-1)^k F^*\omega \wedge dd(F^{i_{k+1}}) \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) + 0 \\ &= d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^*(d(\omega \wedge dx^{i_{k+1}})) &= F^*(d\omega \wedge dx^{i_{k+1}} + (-1)^k \omega \wedge ddx^{i_{k+1}}) \\ &= F^*(d\omega \wedge dx^{i_{k+1}} + 0) = F^*(d\omega) \wedge F^*(dx^{i_{k+1}}) \\ &\stackrel{\text{zał. ind}}{=} d(F^*\omega) \wedge d(F^{i_{k+1}}). \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 1.6.4 *Globalny wzór na różniczkę $d_M : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$. Niech $\omega \in \Omega^k(M)$ i niech X_i będą polami wektorowymi na M .*

$$\begin{aligned} &(d_M\omega)(X_0, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{i} \dots X_k)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_k) \end{aligned}$$

(daszkiem oznacza opuszczenie wyrazu).

Ćwiczenie 1.6.1 *Pokazać na przykładzie $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega = x^2 y dx + x dy$ oraz zmiany zmiennych*

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ F(r, \varphi) &= \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

zachodzenie przemienności cofania z różniczkowaniem.

1.7 Kompleks de Rhama, grupy kohomologii, charakterystyka Eulera-Poincarégo i genus powierzchni

Kompleksem de Rhama hiperpowierzchni M nazywamy ciąg przestrzeni form różniczkowych $\Omega^k(M)$ i operatorów d^k różniczkowania form

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d^n=0} 0.$$

W kompleksie tym złożenie dwu sąsiednich odwzorowań dd daje 0, $dd = 0$. Stąd $\text{Im } d^{k-1} \subset \ker d^k$. Iloraz

$$H_{dR}^k(M) := \ker d^k / \text{Im } d^{k-1}$$

jest przestrzenią wektorową zwaną k -tą **grupą kohomologii de Rhama** hiperpowierzchni M . Każdy element przestrzeni $H_{dR}^k(M)$ nazywa się klasą kohomologii.

Definicja 1.7.1 Forma różniczkowa ω nazywa się zamknięta gdy $d\omega = 0$, tzn. gdy $\omega \in \ker d$.

$$\ker d = \{\omega \in \Omega(M); d\omega = 0\} =: Z(M).$$

Forma różniczkowa ω nazywa się dokładna (lub zupełna) gdy jest różniczką pewnej formy, t.j. gdy $\omega = d\eta$ dla pewnej formy η , tzn. gdy $\omega \in \text{Im } d$.

$$\text{Im } d = \{\eta; \exists \omega \eta = d\omega\} =: B(M).$$

Klasę kohomologii formy zamkniętej ω oznaczamy $[\omega]$. Klasa ta jest zerowa wtedy i tylko wtedy gdy forma ω jest dokładna.

$H^k(M) = 0$ gdddy gdy każda k -forma zamknięta jest dokładna. Np. Lemat Poincarégo mówi, że na otwartym obszarze gwiazdistym $U \subset \mathbb{R}^n$ każda k -forma ($k \geq 1$) zamknięta jest dokładna, a tym samym $H^k(U) = 0$ dla $k \geq 1$.

Gdy M jest spójna to $H^0(M) = \mathbb{R}$. Istotnie, gdy $df = 0$ to $f = \text{const}$, skąd $\ker d^0 = \mathbb{R}$ i $H^0(M) = \mathbb{R}/\{0\} = \mathbb{R}$. Gdy M jest zwarta i zorientowana n -wymiarowa to $H^k(M) \cong H^{n-k}(M)$ - dualność Poincarégo. W szczególności gdy M jest spójna, zwarta i zorientowana to $H^n(M) = \mathbb{R}$. Gdy M nie jest zwarta lub jest nieorientowalna to $H^n(M) = 0$.

Twierdzenie 1.7.1 Niech $n = \dim M$. a) Jeżeli M jest spójna to $H^0(M) = \mathbb{R}$, b) jeżeli M jest zwarta i orientowalna to $H^n(M) = \mathbb{R}$, w pozostałych przypadkach (niezwarta lub nieorientowalna) $H^n(M) = 0$.

Twierdzenie 1.7.2 Jeżeli M jest zwartą hiperpowierzchnią to wszystkie grupy kohomologii $H^k(M)$ są skończenie wymiarowe.

Definicja 1.7.2 Jeżeli $H^k(M)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, to jej wymiar $\dim H^k(M)$ oznaczamy przez b_k ,

$$b_k = \dim H^k(M),$$

i nazywamy k -tą **liczbą Bettiego** hiperpowierzchni M . Wielomian $P_M(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ nazywamy wielomianem Poincarégo hiperpowierzchni M .

Gdy M jest zwarta i zorientowana to $b_k = b_{n-k}$. W szczególności $b_0 = b_n$.

Np. dla okręgu S^1 mamy $H^0(S^1) = \mathbb{R} = H^1(S^1)$ czyli $b_0 = b_1 = 1$. Zatem wielomian Poincarégo okręgu to $1 + t$. Jest twierdzenie o wielomianie Poincarégo dla iloczynu kartezjańskiego $M \times N$, mianowicie $P_{M \times N}(t) = P_M(t) \cdot P_N(t)$. Rozważmy dla prostego przykładu torus $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, jego wielomian Poincarégo to iloczyn wielomianów $(1 + t) \cdot (1 + t) = 1 + 2t + t^2$ skąd mamy $b_1 = 2$.

Definicja 1.7.3 *Jeżeli wszystkie grupy kohomologii $H^k(M)$ są skończone wymiarowe [np. tak jest dla zwartych hiperpowierzchni] i $b_k = \dim H^k(M)$ są liczbami Bettiego to liczba*

$$\chi_M = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$$

nazywa się charakterystyką Eulera-Poincarégo hiperpowierzchni M .

Dalej ograniczmy się do $n = 2$, t.j. powierzchni 2-wymiarowych oznaczanych raczej przez S . Wśród nich są tzw. **powierzchnie Riemanna**. Aby je lepiej zobaczyć, utożsamiamy płaszczyznę z liczbami zespolonymi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Jeżeli funkcje przejścia dla takiej S są holomorficzne, to S nazywamy powierzchnią Riemanna (są to zatem hiperpowierzchnie (lepiej rozmaitości) zespolone wymiaru zespolonego 1). Dla powierzchni 2-wymiarowych

$$\chi_S = b_0 - b_1 + b_2.$$

Jeśli S jest zwarta i zorientowana to $b_0 = 1 = b_2$ zatem wtedy $\chi_S = 2 - b_1$.

Teraz dojdziemy do genusu i zwiążemy go z χ_S oraz wyjaśnimy jego znaczenie.

Formalnie

– dla zwartej **orientowalnej** powierzchni S genus (po polsku **rodzaj**) to liczba

$$g = \frac{2 - \chi_S}{2}$$

ale dalej nie widać co ona oznacza. Za pomocą liczb Bettiego mamy

$$g = \frac{2 - (2 - b_1)}{2} = \frac{b_1}{2}.$$

Przykładowo dla sfery S^2 mamy $H^1(S^2) = 0$ skąd $b_1 = 0$ i $\chi_{S^1} = b_0 - b_1 = 0$ oraz $g = 0$. Dla torusa $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ łatwo obliczyliśmy wyżej $b_1 = 2$ skąd $\chi_{\mathbb{T}} = 2 - b_1 = 0$ i $g = 1$.

Najpierw podamy metodę "na palcach" policzenia charakterystyki Eulera-Poincarégo przy pomocy triangulacji (dowód np. w książce Rotmana An Introduction to Algebraic Topology, GTM119, Springer 1988).

Definicja 1.7.4 *Trójkątem na powierzchni S nazywamy obszar domknięty homeomorficzny ze zwykłym trójkątem na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Trójkąt na powierzchni S ma więc trzy wierzchołki i trzy krawędzie.*

Stwierdzenie 1.7.1 *Triangulacją powierzchni S nazywamy skończoną rodzinę $\mathcal{F}$ trójkątów $T_i \subset S$, $i = 1, \dots, n$, taką, że*

1) $\bigcup T_i = S$,

2) *gdy $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ to $T_i \cap T_j$ jest albo wspólną krawędzią **całą** obu trójkątów albo wspólnym wierzchołkiem.*

Wprowadźmy dla danej triangulacji $\mathcal{F}$ powierzchni S następujące oznaczenia:

F = ilość ścian (t.j. trójkątów),
 E = ilość boków (t.j. krawędzi),
 V = ilość wierzchołków.

Definicja 1.7.5 *Liczba*

$$\chi_{\mathcal{F}} = V - E + F$$

nazywa się charakterystyką Eulera-Poincarégo triangulacji $\mathcal{F}$.

Twierdzenie 1.7.3 (Dowód np. u Rotmana): Dla danej powierzchni zwartej S zachodzi równość

$$\chi_S = \chi_{\mathcal{F}},$$

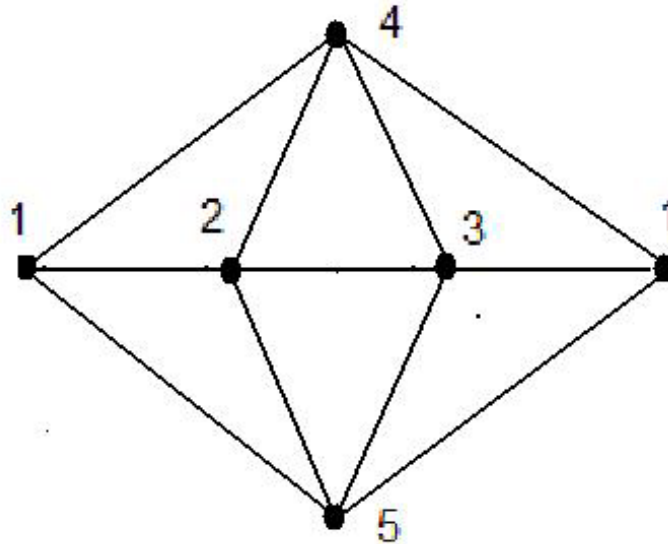
w szczególności $\chi_{\mathcal{F}}$ nie zależy od wyboru triangulacji.

Twierdzenie 1.7.4 Jeżeli S i S' są dwiema zwartymi powierzchniami w $\mathbb{R}^3$ o jednakowych charakterystykach Eulera-Poincarégo $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ to S jest homeomorficzna z S' . Jedynymi liczbami będącymi charakterystykami Eulera-Poincarégo zwartych powierzchni w $\mathbb{R}^3$ są

$$2, 0, -2, -4, \dots, -2n, \dots$$

Powierzchniami o takich charakterystykach są

- sfera, $\chi_{S^2} = 2$, oto przykładowa triangulacja sfery



ilość wierzchołków - 5

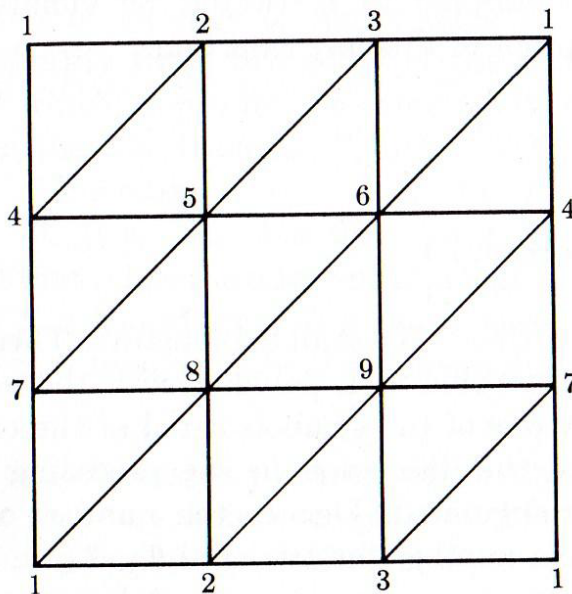
ilość krawędzi - 9

ilość trójkątów - 6

$$\chi_{S^2} = 5 - 9 + 6 = 2$$

$$g = \frac{2 - 2}{2} = 0 \text{ - sfera bez rączek}$$

Twierdzenie 1.7.5 - sfera z jedną rączką (torus), $\chi_{\mathbb{T}} = 0$, przykładowa triangulacja



ilość wierzchołków - 9

ilość krawędzi - 27

ilość trójkątów - 18

$$\chi_{\mathbb{T}} = 9 - 27 + 18 = 0$$

$$g = \frac{2 - 0}{2} = 1 \text{ sfera z 1 rączką}$$

- sfera z n -rączkami (n -torus), $\chi_S = 2 - 2n$.

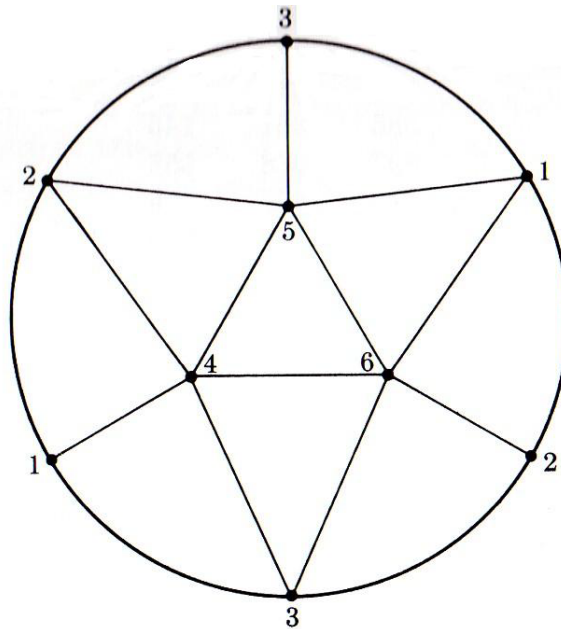
W konsekwencji każda zwarta powierzchnia S w $\mathbb{R}^3$ jest homeomorficzna ze sferą z pewną ilością rączek (jest więc też orientowalna). Liczba rączek n dla powierzchni S o charakterystyce Eulera-Poincarégo χ_S wynosi

$$\frac{2 - \chi_S}{2}$$

i jest to właśnie genus powierzchni S .

Przykład 1.7.1 Dla nieorientowalnej powierzchni zwartej - butelki Kleina = przestrzeń rzutowa = wycinamy w sferze koło i zaklejamy wstęgą Möbiusa (równoważnie sklejamy punkty antypodyczne). Na rysunku zewnętrzny okrąg obrazuje wycięte koło i utożsamiamy punkty antypodyczne ponumerowane tymi samymi cyframi i krawędzie łączące wierzchołki

o takich samych wierzchołkach



ilość wierzchołków - 6

ilość krawędzi - 15

ilość trójkątów - 10

$$\chi_{\mathbb{K}} = 6 - 15 + 10 = 1$$

$$\chi_{\mathbb{K}} = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - b_1 + 0 = 1 - b_1 = 1 \text{ skąd } b_1 = 0$$

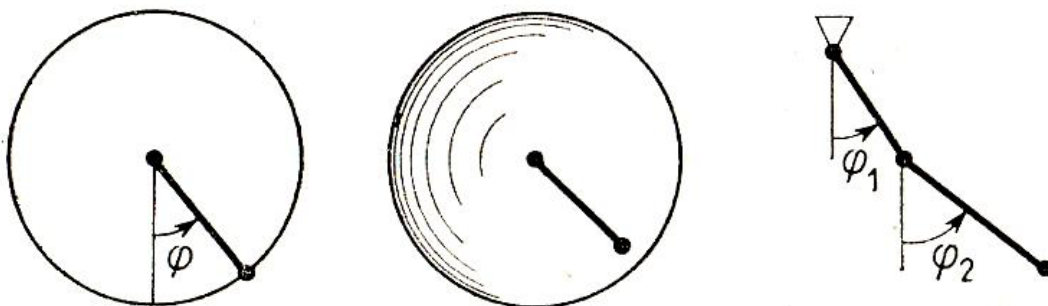
Skoro $b_1 = 0$ dla butelki Kleina to oznacza to, że $H^1(\mathbb{K}) = 0$ czyli każda 1-forma różniczkowa zamknięta jest dokładna czyli jest różniczką pewnej funkcji.

2 Hiperpowierzchnie w mechanice klasycznej - przestrzenie konfiguracyjne

Przestrzeń konfiguracyjna (intuicyjnie mówiąc) to pewna matematyczna przestrzeń K będąca zbiorem możliwych stanów danego układu fizycznego. Załóżmy że układ fizyczny zawiera n elementów (punktów), każdy opisany jest przez 3 współrzędne w $\mathbb{R}^3$. Wygodniej jest z matematycznego punktu widzenia rozpatrywać ten układ n elementów równoważnie jeden punkt w przestrzeni $3n$ wymiarowej. Dlatego zbiór możliwych stanów (czyli przestrzeń konfiguracyjna K) będzie podzbiorem w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Jeśli na te elementy nie są nałożone żadne więzy to przestrzenią konfiguracyjną jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^{3n}$. Jeśli jednak istnieją jakieś więzy, wówczas przestrzeń konfiguracyjna K jest jakimś podzbiorem w $\mathbb{R}^{3n}$, najczęściej w typowych układach fizycznych jest to jakaś hiperpowierzchnia a jej wymiar to ilość stopni swobody naszego układu.

Przykład 2.0.2 n punktów materialnych w $\mathbb{R}^3$ bez żadnych więzów. Przestrzeń konfiguracyjna K to $\mathbb{R}^{3n}$, $K = \mathbb{R}^{3n}$.

Przykład 2.0.3 1 punkt materialny połączony sztywnym nieważkim prętem długości l z ustalonym punktem $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$. Układ ten to tzw. **wahadło sferyczne**. Przestrzeń konfiguracyjna K to sfera dwuwymiarowa $S^2(\mathbf{x}_0, l)$ w $\mathbb{R}^3$ o środku w $\mathbf{x}_0$ i promieniu l , $K = S^2(\mathbf{x}_0, l)$. Jest ona dyfeomorficzna ze sferą o środku w 0 i promieniu l oznaczaną przez $S^2(l)$. Dyfeomorfizmem jest $f : S^2(\mathbf{x}_0, l) \rightarrow S^2(l)$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. [Dla wahadła płaskiego mielibyśmy okrąg jako przestrzeń konfiguracyjną].



Rys. Wahadła: płaskie, sferyczne i podwójne

Przykład 2.0.4 Niech układ składa się z dwóch punktów poruszających się swobodnie w $\mathbb{R}^3$, ale związanych ze sobą sztywnym, nieważkim prętem o długości l . Układ ten to poruszający się swobodnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ odcinek. Wtedy przyjmując dowolnie położenie pierwszego punktu o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) dostajemy warunek na współrzędne drugiego punktu (y_1, y_2, y_3) w formie: $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = l^2$. Jest to równanie sfery 2-wymiarowej o środku w punkcie (x_1, x_2, x_3) i promieniu l . Dostajemy więc, że przestrzeń konfiguracyjna to pięciowymiarowa hiperpowierzchnia w $\mathbb{R}^6$ opisana powyższym warunkiem. Jest ona dyfeomorficzna z $\mathbb{R}^3 \times S^2(l)$, dyfeomorfizm $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2(l)$ jest dany wzorem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$. W przypadku płaskim otrzymujemy przestrzeń K dyfeomorficzną z $\mathbb{R}^2 \times S^1(l)$.

Przykład 2.0.5 Zmodyfikujmy układ dwupunktowy płaski z poprzedniego przykładu i dodatkowo założmy, że pierwszy punkt połączony jest sztywnym nieważkim prętem o długości l_1 z początkiem układu współrzędnych 0. Otrzymujemy tzw. **wahadło podwójne**. Wtedy pierwszy punkt zakreśla okrąg $S^1(l_1)$ o równaniu $x_1^2 + x_2^2 = l_1^2$; przyjmując dowolnie położenie pierwszego punktu o współrzędnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ dostajemy, że drugi punkt przebiega okrąg $S^1(\mathbf{x}, l)$ o środku w $\mathbf{x}$ i promieniu l . Dyfeomorfizm o takim samym wzorze jak w poprzednim przykładzie przekształca dyfeomorficznie przestrzeń konfiguracyjną K wahadła podwójnego na iloczyn kartezjański okręgów $S^1(l_1) \times S^1(l)$, czyli na torus.

Przykład 2.0.6 Rozważmy układ sztywny składający się z trzech niewspółliniowych punktów p, q, r , tzn. każde dwa punkty połączone są sztywnym, nieważkim prętem o pewnej długości. Równoważnie można powiedzieć, że mamy ciało sztywne - trójkąt w $\mathbb{R}^3$. Jak wygląda przestrzeń konfiguracyjna? Jeden punkt p można dowolnie ustawić w $\mathbb{R}^3$. Jeśli już to zrobiliśmy, to dozwolone dalej ruchy będą ruchami sztywnymi, czyli obrotami zachowującymi ten ustalony punkt. Z geometrii analitycznej wiadomo, że ruch sztywny

trzymający jeden punkt jest izometrią liniową zachowującą orientację, a więc opisana jest przez macierz ortogonalną o wyznaczniku $+1$, czyli przez macierz z grupy Liego $SO(3)$. Zatem $K \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, jest to hiperpowierzchnia 6 wymiarowa w $\mathbb{R}^{12}$ (bo $SO(3)$ jest 3 wymiarową hiperpowierzchnią w $\mathbb{R}^9$).

Przykład 2.0.7 Strona internetowa dotycząca przestrzeni konfiguracyjnej dla robotów:
http://riad.usk.pk.edu.pl/~zk/GO_LAB_00/robot/robot.htm

3 TWIERDZENIE CAŁKOWE STOKESA

Celem jest Twierdzenie Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem:

Twierdzenie 3.0.6 (Stokes) Jeżeli M jest n -wymiarową hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M i na brzegu mamy orientację dodatnią to dla dowolnej $n-1$ formy na M o zwartym nośniku zachodzi wzór

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Twierdzenie to jest daeko idącym uogólnieniem zasadnicze Tw rachunku różniczkowego i całkowego $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Przykład 3.0.8 Niech $M = [a, b]$, wtedy $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$. Orientacja brzegu to zero-forma na $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$ równa $+1$ na b i -1 na a . Dla formy stopnia 0 na M czyli funkcji f mamy $df = f' \cdot dx$ stąd

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} f &= f(b) - f(a), \\ \int_M df &= \int_a^b f'(x) dx. \end{aligned}$$

Zatem wzór Stokesa staje się w tym trywialnym przypadku zasadniczym Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

W dowodzie ogólnego Tw. Stokesa $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ wykorzystujemy ten wzór $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, który jest znany z dowodu z kursu analizy I.

Najpierw musimy wprowadzić hiperpowierzchnie z brzegiem.

3.1 Rozmaitości z brzegiem

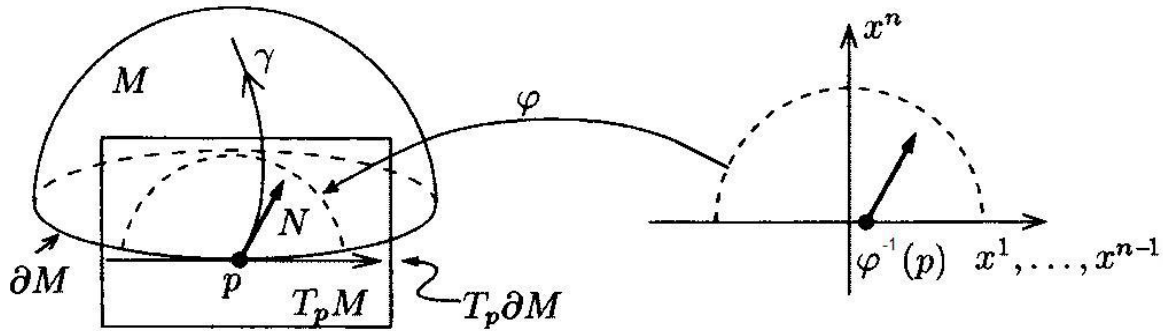
Rozważmy półprzestrzeń

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_n \geq 0\}$$

ze swoją topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$.

Definicja 3.1.1 *Hiperpowierzchnią kl. C^∞ wymiaru n z brzegiem nazywamy podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego punktu $p \in M$ istnieje odwzorowanie $\varphi : U \rightarrow M$ (zwane także parametryzacją) określone na podzbiorze $U \subset \mathbb{R}_+^n$ otwartym w $\mathbb{R}_+^n$ tak, że $p \in \varphi[U]$, które jest różnowartościowe, regularne kl. C^∞ i homeomorficzne na otwarty podzbiór w M .*

Punkty $p \in M$ dla których nie istnieje parametryzacja określona na podzbiorze otwartym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy punktami brzegowymi. Ich podzbiór oznaczamy ∂M . Są to punkty z obrazu $\varphi[\partial \mathbb{R}_+^n \cap U]$ po wszelkich parametryzacjach (to jest ćwiczenie - nie jest to fakt oczywisty).



Funkcje przejścia są (jak w przypadku bez brzegu) dyfeomorfizmami między podzbiórmi otwartymi w $\mathbb{R}_+^n$.

Jeżeli $U \subset \mathbb{R}_+^n$ jest otwartym podzbiorem to $\partial \mathbb{R}_+^n \cap U$ utożsamiamy z podzbiorem

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}; (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in U\}$$

w $\mathbb{R}^{n-1}$ i jest to podzbiór otwarty. Mianowicie inkluzja $i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ jest ciągła więc przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty.

Twierdzenie 3.1.1 *Jeżeli M jest n wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^∞ z brzegiem ∂M to brzeg ∂M jest $n - 1$ wymiarową hiperpowierzchnią klasy C^∞ (bez brzegu). Parametryzacjami brzegu ∂M są obcięcia parametryzacji $\varphi|U \cap \partial \mathbb{R}_+^n \rightarrow \partial M$.*

Uwaga 3.1.1 *Dla hiperpowierzchni z brzegiem pozostają tak samo określone: formy różniczkowe, operator różniczkowania, przestrzeń styczna, rozkład jedyńki, orientacja.*

Twierdzenie 3.1.2 *Jeżeli M jest hiperpowierzchnią zorientowaną klasy C^∞ z brzegiem ∂M i $\mathcal{U}$ jest atlasem $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}$ parametryzacji zgodnych z orientacją, wówczas atlas obcięć $\{\varphi_\alpha|U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^n; U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^n\}$ jest atlasem orientującym brzeg ∂M .*

Dowód. Niech φ_α i φ_β będą dwoma parametryzacjami z zadanego atlasu orientującego. Wtedy funkcja przejścia $\Lambda : \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ jest dyfeomorfizmem zachowującym orientację [czyli o jacobianie dodatnim] między podzbiórami otwartymi w $\mathbb{R}_+^n$. Ponieważ $\varphi_\alpha [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] \subset \partial M$ to

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] = (\varphi_\beta|_{U_\beta})^{-1} \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha}) [U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n] \subset \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Stąd funkcje przejścia $\Lambda' = (\varphi_\beta|_{U_\beta \cap \partial\mathbb{R}_+^n})^{-1} \circ (\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial\mathbb{R}_+^n})$ dla atlasu na brzegu ∂M i funkcje przejścia $\Lambda = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ na M są związane zależnością $\Lambda'_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Lambda_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz

$$\begin{aligned} (\Lambda'(x_1, \dots, x_{n-1}), 0) &= \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &= (\Lambda_1(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \dots, \Lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), 0). \end{aligned}$$

Zatem macierze Jacobiego dla funkcji przejścia Λ i Λ' są w punktach z brzegu $\partial\mathbb{R}_+^n$ powiązane zależnością

$$\left[\frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{array} & 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Cały wyznacznik jest dodatni przy czym z własności wyznacznika wynika, że jest to iloczyn

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n}$$

Zatem ostatnia liczba $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} \neq 0$. Wiemy, że $\Lambda_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \geq 0$ oraz, że $\Lambda_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$. Stąd nie może być $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} < 0$. Zatem $\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n} > 0$. Implikuje to

że $\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Lambda'_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} > 0$ co znaczy że parametryzacje obcięte do brzegu są też zgodne. ■

Definicja 3.1.2 Orientację brzegu zadana tym obcięciem atlasem nazywamy dodatnią gdy n parzyste, a ujemną gdy n nieparzyste. (uzasadnienie poprzez wzów Stokesa: aby zawsze było $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ a nie $\int_{\partial M} \omega = -\int_M d\omega$).

Definicja 3.1.3 Niech M będzie hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M . Jeżeli rozważymy orientację przestrzeni wektorowej $T_p M$ zgodną z atlasem orientującym to gdy $p \in \partial M$ wówczas orientacja w $T_p(\partial M)$ dana reperem $(v_1, \dots, v_{n-1})$ jest dodatnia jeżeli, dla wektora $w \in T_p M$ skierowanego do wewnątrz M [tzn. $w = \alpha'(0)$ dla łuku $\alpha : [0, a) \rightarrow M$ takiego, że $\alpha((0, a)) \subset M \setminus \partial M$, $\alpha(0) = p$] baza $(-w, v_1, \dots, v_{n-1})$ jest dodatnia.

Przykład 3.1.1 (1) Orientacja półpłaszczyzny $\partial\mathbb{R}_+^n$ za pomocą wersorów $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ jest $(-1)^n$ - zgodna, t.j. gdy n jest parzyste wtedy baza $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ jest dodatnia a gdy nieparzyste - ujemna. Mianowicie dodatnią bazą $\mathbb{R}^n$ w punkcie $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ ma być $(-\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$. Biorąc $(-\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ widzimy, że jest to zgodne z $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, (-1)^n \mathbf{e}_n)$ skąd teza.

(2) Niech $M \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem domkniętym [domknięcie zbioru otwartego U , $M = \bar{U}$] którego brzeg ∂M składa się z krzywych klasy C^∞ . Orientacja na U jest dodatnia. Orientacja brzegu ∂M jest dodatnia gdy: idąc wzdłuż brzegu mamy obszar U po lewej ręce. Uzasadnienie. W punkcie $p \in \partial M$ wektor v styczny do brzegu, $v \in T_p \partial M$ należy do dodatniej orientacji krzywej ∂M gdy dla wektora w skierowanego do wewnątrz U para $(-w, v)$ jest dodatnia, czyli para (v, w) jest dodatnia, czyli zgodna z wersorami osi współrzędnych.

(3) Rozpatrzmy powierzchnię zamkniętą M w $\mathbb{R}^3$ i niech $p_0 \in M$ będzie punktem dla którego współrzędna z będzie największą wartością dla punktów p z M . Wokół p_0 powierzchnia jest zadana jako wykres $z = f(x, y)$. Parametryzacja $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. $\phi|_x$ i $\phi|_y$ są bazą $T_p M$. W punkcie p_0 są to wersory osi OX i OY . Weźmy wersor $\mathbf{e}_z$ osi OZ . Baza $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ byłaby dodatnia gdy $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ jest dodatnia, ale $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ jest równoważna $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ czyli jest OK. orientacja dodatnia na ∂M to orientacja zadana na zewnątrz. Ogólniej dla $M \subset \mathbb{R}^n$ kowymiaru 1 jest dodatnia przez $(-1)^n \cdot V$ dla pola na zewnątrz, t.j. dla n nieparzystego ($n-1$ jest parzyste i przedstawienie $\mathbf{e}_n$ na koniec nie zmienia orientacji) orientacja dodatnia jest dla pola na zewnątrz a dla n parzystego dodatnia jest do wewnątrz.

(4) M dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$ o brzegu L zorientowana przez pole V . Wtedy dodatnia na L to taka: idąc po L z głową w kierunku V mamy mieć M po lewej ręce. Zrozumieć dlaczego.

Przykład 3.1.2 Określić dodatnie orientacje brzegów następujących hiperpowierzchni z brzegiem (a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 \geq 0\}$, (b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 \leq 0\}$, (c) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 \leq 0\}$, (d) $M_4 = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 \geq 0\}$. (e) $M_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_4 \geq 0\}$

1. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_1$, $\phi(x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$ jest zgodna czy **nie**?
2. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_2$, $\phi(x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
3. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_3$, $\phi(x_1, x_3) = (x_1, 0, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
4. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial M_4$, $\phi(x_1, x_3) = (x_1, 0, x_3)$ **jest** zgodna czy **nie**?
5. Czy parametryzacja $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \partial M_5$, $\phi(x, y, z) = (x, y, z, 0)$ **jest** zgodna czy **nie**?

Np. orientacja ∂M_3 zadana przez ϕ składa się z bazy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Wektorem skierowanym do wewnątrz ∂M_3 jest $-\mathbf{e}_2$. Rozważmy zatem bazę w dowolnym punkcie $(x_1, 0, x_3)$ brzegu ∂M_3 równą $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Jest ona niezgodna z $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ale ta ostatnia jest dodatnia, zatem nasza parametryzacja jest niezgodna.

Dowód Tw. Stokesa zostawimy na potem, a teraz przejdziemy do jego szczególnych przypadków oraz najprostszych zastosowań oraz podamy uogólnienie na przypadek brzegu z osobliwościami (np. brzeg prostokąta to 4 odcinki połączone wierzchołkami, brzeg sześciokąta to nie jedna powierzchnia a 6 połączonych krawędziami).

3.2 Twierdzenie Stokesa dla podzbiorów z osobliwościami

Poniższe tw. zwane Tw Greena dla prostokąta wskazuje, że należy oczekiwać uogólnienia na przypadek gdy brzeg ma osobliwości.

Twierdzenie 3.2.1 Twierdzenie Greena dla prostokąta. Niech $R \subset \mathbb{R}^2$ będzie prostokątem o dodatnio zorientowanym brzegu ∂R i $\omega \in \Omega^1(U)$ niech będzie 1 formą określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$ zawierającym prostokąt R , $R \subset U$. Wtedy

$$\int_{\partial R} \omega = \iint_R d\omega.$$

Jeśli wyrazić ω we współrzędnych $\omega = Pdx + Qdy$ wtedy

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdx + Qdy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= 0 - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + 0 \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

i wzór Stokesa dla prostokąta staje się tzw. **wzorem Greena**

$$\int_{\partial R} (Pdx + Qdy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dowód. Dowód tego szczególnego przypadku tw. Stokesa. Niech $R = [a, b] \times [c, d]$, Na mocy Tw. Fubiniiego i zasadniczego Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\begin{aligned} &\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy - \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx \\ &= \int_{\partial R} (Pdx + Qdy) \end{aligned}$$

(∂R składa się z czterech odcinków odpowiednio zorientowanych). Np odcinek łączący (a, c) i (a, d) o parametryzacji $c(y) = (a, y)$, $y \in [c, d]$ ma ujemną orientację stąd $\int_{(a,c),(a,d)} (Pdx + Qdy) = - \int_c^d Q(a, y) dy$ itd. ■

Niech A będzie zwartym podzbiorem n wymiarowej hiperpowierzchni $M \subset \mathbb{R}^m$ (bez brzegu). Niech $IntA$ oznacza wnętrze zbioru A w przestrzeni topologicznej M i rozważmy brzeg zbioru A

$$FrA = A \setminus IntA.$$

Punkt $p \in FrA$ nazywamy **regularnym** jeśli część wspólna zbioru FrA i pewnego otoczenia punktu p w M jest podhiperpowierzchnią gładką $n - 1$ -wymiarową. Pozostałe punkty z brzegu FrA nazywamy punktami **osobliwymi**. Oznaczmy podzbiór punktów regularnych przez Fr_rA a osobliwych przez Fr_sA (osobliwy = singularny, stąd indeks s).

Podzbiór $A \subset M$ nazywamy **regularny** jeżeli każdy punkt $p \in Fr_rA$ należy do domknięcia wnętrza zbioru A , $IntA, Fr_rA \subset \overline{IntA}$. (Rysunek c) ze str 424 w książce Birkholca jest przykładem zbioru nieregularnego).

Twierdzenie 3.2.2 *Ogólne Tw Stokesa dla podzbiorów regularnych w hiperpowierzchniach. (Birkholc, "Analiza matematyczna, funkcje wielu zmiennych", Tw 8.1)*

Niech $M \subset \mathbb{R}^m$ będzie gładką n wymiarową hiperpowierzchnią i $A \subset M$ regularnym zwartym podzbiorem M , oraz ω - gładką $n - 1$ -formą różniczkową na M . Zakładamy, że — brzeg osobliwy Fr_sA zbioru A zawiera się w przeliczalnej rodzinie podhiperpowierzchni o wymiarach mniejszych od $n - 1$.

Wtedy zachodzi wzór Stokesa

$$\int_A d\omega = \int_{Fr_rA} \omega.$$

3.3 Szczególne przypadki ogólnego wzoru Stokesa dla hiperpowierzchni z brzegiem

3.3.1 Twierdzenie Greena

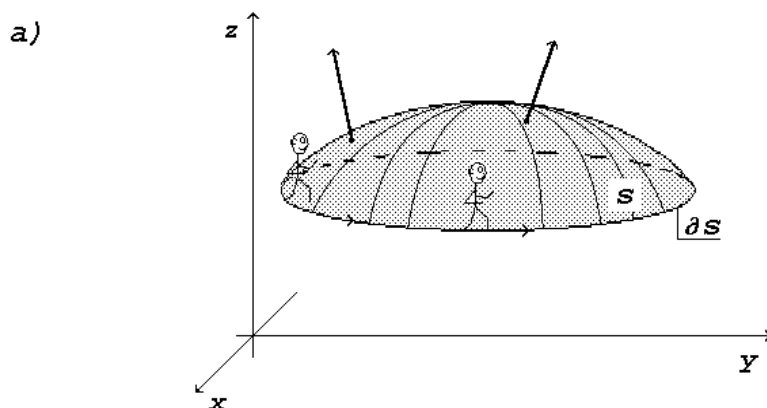
Twierdzenie 3.3.1 (Twierdzenie Greena) Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie ograniczonym płaskim obszarem którego brzeg ∂D tworzy jedna lub kilka krzywych C^∞ zorientowanych dodatnio względem D . (Dodatnia orientacja każdej krzywej z brzegu ∂D jest dana przez obieg punktów w takim kierunku, że obszar D mamy po lewej stronie). Dla 1-formy różniczkowej $\omega = P dx + Q dy$ określonej w obszarze D zachodzi wzór

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega &= \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

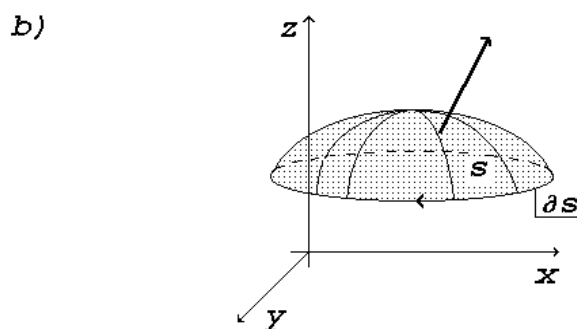
UWAGA: Tw. jest prawdziwe przy osłabieniu założeń: wystarczy żądać, aby brzeg ∂D składał się z krzywych przedziałami kl C^1 [Kołodziej, str. 442-443 - jest to szczególny przypadek Tw. Stokesa po podzbiórze z osobliwościami].

3.3.2 Twierdzenie Stokesa dla powierzchni 2-wymiarowej w $\mathbb{R}^3$

Twierdzenie 3.3.2 (*Twierdzenie Stokesa dla powierzchni z brzegiem*, 2 wymiarowej w $\mathbb{R}^3$) Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie ograniczoną powierzchnią zorientowaną o brzegu ∂S składającym się z jednej lub kilku krzywych kl. C^∞ zorientowanym dodatnio względem orientacji S (równoważnie: idąc wzdłuż takiej krzywej z głową zwróconą w stronę pola wektorowego $\mathbf{n}$ orientującego S będziemy mieli powierzchnię po lewej stronie).



Orientacja brzegu ∂S powierzchni S przy prawoskrętnym układzie współrzędnych



Orientacja brzegu ∂S powierzchni S przy lewoskrętnym układzie współrzędnych

Wówczas, dla 1-formy różniczkowej $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ zachodzi wzór

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \omega &= \int_{\partial S} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_S d\omega = \int_S d(Pdx + Qdy + Rdz) = \dots \\ &= \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

UWAGA: z 1-formą $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ wiążemy pole wektorowe $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ a z nim rotację pola

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right].$$

Strumień tego nowego pola $\text{rot } \mathbf{F}$ przez powierzchnię S to właśnie

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Zatem w terminach pola wektorowego wzór Stokesa w tym przypadku oznacza

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

UWAGA: Tw jest prawdziwe dla powierzchni S kl. C^2 której brzeg jest sumą krzywych przedziałami kl. C^1 .

Wniosek 3.3.1 Jeżeli powierzchnia $S \subset \mathbb{R}^3$ jest zamknięta (t.j. nie ma brzegu $\partial S = \emptyset$) to

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

3.3.3 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Twierdzenie 3.3.3 (Tw. Gaussa-Ostrogradskiego) Niech W będzie domkniętym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^3$ którego brzeg ∂W jest sumą skończonej ilości powierzchni $S_1, \dots, S_k$ kl. C^∞ . Orientujemy brzeg $\partial W = S_1 \cup \dots \cup S_k$ za pomocą pola wektorowego normalnego jednostkowego $\mathbf{n}$ skierowanego **na zewnątrz** obszaru W . Wówczas, dla dowolnej 2 formy ω postaci $\omega = Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$ zachodzi wzór

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial W} Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy \\ &= \iiint_W d(Pdy \wedge dz - Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy) \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

UWAGA: Z polem $\mathbf{F} = [P, Q, R]$ wiążemy funkcję zwaną dywergencją pola $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Dlatego w terminach pola wektorowego wzór Stokesa w tym przypadku ma postać

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (\text{div } \mathbf{F}) dV.$$

Twierdzenie jest prawdziwe gdy brzeg ∂W jest sumą skończonej ilości domkniętych płatów powierzchniowych $S_1, \dots, S_k$ przecinających się wzajemnie skończoną ilości krzywych przedziałami kl. C^1 .

4 DOWÓD TWIERDZENIA STOKESA

Twierdzenie 4.0.4 (Tw Stokes) *Jeżeli M jest hiperpowierzchnią zorientowaną z brzegiem ∂M i na brzegu mamy orientację dodatnią to dla dowolnej $n - 1$ formy na M o zwartym nośniku zachodzi wzór*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dowód. KROK I. $M = \mathbb{R}^k$. W tym przypadku $\partial M = \emptyset$. Niech ω będzie dowolną $k - 1$ formą o zwartym nośniku. Potrzeba udowodnić równość $\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = 0$. Forma ω jest sumą składników postaci

$$\omega_i = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Dla krótkości piszemy daszek nad opuszczonym wyrazem, zatem

$$\omega_i = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Stąd

$$\begin{aligned} d\omega_i &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Równość $\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = 0$ będzie wykazana, jeżeli pokażemy ją dla każdego składnika: $\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k = 0$. Niech

$$\text{supp } f \subset \prod_{j=1}^k [a_j, b_j].$$

Wtedy z Tw. Fubiniiego (ustawiając odpowiednio kolejność całkowania)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge \dots \wedge \widehat{i} \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

Do wykazania kroku I wystarczy pokazać, że $\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$. Ponieważ

$$f(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) = 0 \quad \text{dla} \quad x_i \notin [a_i, b_i]$$

to z ciągłości f także są zera na końcu przedziału. Stąd z zasadniczego Tw. rachunku różniczkowego i całkowego

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_k^0) dx_i = f(x_1^0, \dots, b_i, \dots, x_k^0) - f(x_1^0, \dots, a_i, \dots, x_k^0) = 0.$$

KROK II. $M = \mathbb{R}_+^k$. Wtedy $\partial M = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$. Niech ω będzie dowolną $k-1$ formą o zwartym nośniku na M . Forma ω jest sumą składników postaci

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} dq_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

Weźmy parametryzację hiperpowierzchni $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$

$$\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}, \quad (x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, 0).$$

Jest ona $(-1)^k$ -zgodna z dodatnią orientacją brzegu $\partial(\mathbb{R}_+^k) = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ (pokażać szczegółowo). Stąd skoro $\varphi^*(dx_k) = d(0) = 0$, to

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* \left(q_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k \right) \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} q_i(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \varphi^* (dx_1) \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge \underbrace{\varphi^*(dx_k)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \\
&= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}) \\
&= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}_+^k} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^k} \left((-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \right) \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k.
\end{aligned}$$

Ponieważ dla $i < k$ otrzymujemy z Tw. Fubiniiego (ustawiając odpowiednio kolejność całkowania)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_k \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_k dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{x} \dots \wedge dx_{k-1}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(co zauważamy analogicznie jak poprzednio na mocy argumentu nośnika ...). Zatem

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}_+^k} d\omega \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_k \\
&= (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
&\stackrel{(*)}{=}
\end{aligned}$$

Z powodu zwartości nośnika $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$ gdy $x_k > b$ dla pewnej $b > 0$ skąd także $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$ dla $x_k > b$ co implikuje $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \int_0^b \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ i dalej

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(*)}{=} (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^b \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \Big|_{x_k=0}^{x_k=b} \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \left(\underbrace{f(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0)}_{=0} \right) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^k \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \dots dx_{k-1} \\
& = P.
\end{aligned}$$

KROK III. M jest dowolną zorientowaną hiperpowierzchnią z brzegiem ∂M . Załóżmy, że nośnik formy ω jest zawarty w dziedzinie jednej mapy $U'_\alpha \subset M$. W tej sytuacji nośnik $d\omega$ także jest zawarty w U'_α skąd

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{U'_\alpha} d\omega, \\
\int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega.
\end{aligned}$$

Wystarczy zatem pokazać

$$\int_{U'_\alpha} d\omega = \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega.$$

Niech $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ będzie parametryzacją zgodną z orientacją M (U_α jest otwarty w $\mathbb{R}_+^k$).

$$L = \int_{U'_\alpha} d\omega = \int_{U_\alpha} \varphi^*(d\omega) = \int_{U_\alpha} d(\varphi^*\omega).$$

Nośnik $\varphi^*\omega$ jest zawarty w U_α można więc rozszerzyć formę $\varphi^*\omega$ do gładkiej formy λ określonej na całej przestrzeni $\mathbb{R}_+^k$ kładąc 0 poza U_α (pokazać szczegółowo). Wtedy na mocy kroku 2

$$\int_{U_\alpha} d(\varphi^*\omega) = \int_{\mathbb{R}_+^k} d\lambda = \int_{\partial \mathbb{R}_+^k} \lambda = \int_{\partial \mathbb{R}_+^k \cap U_\alpha} \varphi^*\omega.$$

Z drugiej strony $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ po obcięciu do brzegów

$$\varphi : U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k \rightarrow U'_\alpha \cap \partial M$$

jest parametryzacją ∂M przy czym rozważając na $U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ orientację dodatnią względem $\mathbb{R}_+^k$ (czyli $(-1)^k$ zgodną z naturalną orientacją $\mathbb{R}^{k-1}$) mapa obcięta

jest zgodna z orientacją ∂M . Stąd

$$P = \int_{\partial M \cap U'_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha \cap \partial \mathbb{R}_+^k} \varphi^* \omega = L.$$

KROK IV. Przypadek ogólny. M jest dowolną zorientowaną hiperpowierzchnią z brzegiem ∂M . Załóżmy, że nośnik formy ω jest zwarty. Rozważmy dowolny atlas $\{\varphi_\alpha, U_\alpha\}$ parametryzacji zgodnych z orientacją M i wybierzmy skończony ciąg indeksów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takich, że $\text{supp } \omega \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$. Wpiszmy w pokrycie $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, M \setminus \text{supp } \omega\}$ gładki rozkład jedności $\{\rho_{\alpha_i}, \rho\}$. Wtedy $\omega = \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega$ (bo $\rho\omega = 0$ więc $\omega = \omega \cdot 1 = \omega \cdot ((\sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}) + \rho) = \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega$).

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i} \cdot \omega\right) = \sum_{i=1}^n \int_M d(\rho_{\alpha_i} \cdot \omega) \quad / \text{supp } \rho_{\alpha_i} \cdot \omega \subset U_{\alpha_i} \\ &= \sum_i \int_{\partial M} \rho_{\alpha_i} \cdot \omega = \int_{\partial M} \sum_\alpha \rho_{\alpha_i} \cdot \omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

■

Zauważmy, że dla dowodu tw. Stokesa dla form o zwartych nośnikach wystarcza mieć istnienie gładkich rozkładów jedności wpisanych dla rodzin skończonych co jest znacznie łatwiejsze do wykazania.

5 Element objętości i Tensor Riemanna

Niech na k wymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej V będzie dany iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, t.j. dwuliniowe odwzorowanie symetryczne niezdegenerowane. Pokazuje się, że istnieje baza $(e_1, \dots, e_k)$ która jest ortonormalna (w skrócie ON), czyli taka, że wektory tej bazy mają długości 1 i są prostopadłe do siebie

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Jeżeli weźmiemy inną bazę ON $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$ to macierz przejścia $a := [a_i^j]$ od jednej bazy do drugiej

$$\bar{e}_i = \sum_j a_i^j e_j$$

jest ortogonalna, tzn. wiersze macierzy są długości 1 i są prostopadłe (co powinno być znane z algebry). Istotnie,

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle \sum_r a_i^r e_r, \sum_s a_j^s e_s \rangle = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s \langle e_r, e_s \rangle = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s \delta_{rs} \\ &= \sum_r a_i^r a_j^r. \end{aligned}$$

Inaczej ten fakt można zapisać w postaci

$$\sum_r a_i^r (a^T)_r^j = \delta_{ij}$$

który oznaczają, że

$$a \cdot a^T = Id.$$

Z własności macierzy (Tw. Cauchy'ego)

$$1 = \det Id = \det (a \cdot a^T) = \det a \cdot \det a^T = \det a \cdot \det a = (\det a)^2$$

otrzymujemy, że macierz przejścia a ma wyznacznik $\det a = \pm 1$.

W konkluzji, jeżeli obie bazy orientują V jednakowo (czyli macierz przejścia ma wyznacznik dodatni) to musi być: $\det a = +1$.

Zakładając, że na V dana jest orientacja, i biorąc bazy e_i oraz $\bar{e}_j$ ON i dodatnie (czyli orientujące zgodnie z zadaną orientacją), stwierdzamy z powyższego, że macierz przejścia a ma wyznacznik $+1$. Rozważmy bazy dualne e_i^* i $\bar{e}_j^*$ w przestrzeni kowektorów V^* . Zwiążemy z tymi bazami (e_i) oraz $(\bar{e}_j)$ tensory skośnie symetryczne stopnia k postaci

$$\begin{aligned}\omega &= e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*, \\ \bar{\omega} &= \bar{e}_1^* \wedge \dots \wedge \bar{e}_k^*.\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\begin{aligned}\omega(e_1, \dots, e_k) &= 1, \\ \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) &= 1.\end{aligned}$$

Pokażemy, że $\omega = \bar{\omega}$ co będzie oznaczało, że tensor ω określony dla dowolnej bazy ON dodatniej nie zależy od wyboru tej bazy. Otóż, skoro $\bar{\omega} = r \cdot \omega$ dla pewnej liczby rzeczywistej r to

$$\begin{aligned}1 &= \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) = r \cdot \omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot \det a \cdot \omega(e_1, \dots, e_k) \quad / \text{Spivak Tw. 4.6 str 76} \\ &= r \cdot 1 \cdot 1 = r\end{aligned}$$

(co można też łatwo zobaczyć z definicji

$$\begin{aligned}1 &= \bar{\omega}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) = r \cdot \omega(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k) \\ &= r \cdot \det [e_i^*(\bar{e}_j)] \\ &= r \cdot \det [e_i^*(\sum_r a_j^r e_r)] \\ &= r \cdot \det [\sum_r a_j^r e_i^*(e_r)] \\ &= r \cdot \det [\sum_r a_j^r \delta_{ir}] = r \cdot \det [a_j^i] = r\end{aligned}$$

Tensor ω równy $\omega = e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*$ dla dowolnej bazy ON dodatniej nazywa się **tensorem objętości** zorientowanej przestrzeni wektorowej k -wymiarowej V . Z powyższego jest także jasne, że jest to jedyny tensor stopnia k na V skośnie symetryczny taki, że $\omega(e_1, \dots, e_k) = 1$ dla pewnej (dowolnej) bazy ON dodatniej.

Niech teraz $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolną hiperpowierzchnią k wymiarową w $\mathbb{R}^n$. Weźmy kanoniczny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \sum_i \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{w}^i.\end{aligned}$$

Dla $p \in M$ rozważmy przestrzeń styczną $T_p M \subset \mathbb{R}^n$. Skoro $T_p M$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{R}^n$ to iloczyn skalarny obcina się do tej przestrzeni dając tensor symetryczny dwuliniowy i także niezdegenerowany

$$G(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p M \times T_p M} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tensor G na hiperpowierzchni M nazywamy **tensorem Riemanna**. Niech M będzie zorientowana. Tak jak przed chwilą rozważając dowolną bazę $e_i(p)$ ON dodatnią na przestrzeni wektorowej zorientowanej $T_p M$ wprowadzamy na M k -formę różniczkową ω która w punkcie p równa jest elementowi objętości tej przestrzeni stycznej, $\omega(p) = e_1^*(p) \wedge \dots \wedge e_k^*(p)$. Nazywa się ona **formą objętości hiperpowierzchni M** i bywa oznaczana symbolem dV .

Ćwiczenie 5.0.1 * Element objętości $dV(p) : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ na wektorach $(v_1, \dots, v_k)$ jest równy znakowanej objętości równoległoscianu rozpiętego na tych wektorach (znak $+$ gdy wektory orientują $T_p M$ dodatnio i $-$ gdy ujemnie (oczywiście gdy wektory są liniowo zależne to objętość jest 0)).

Twierdzenie 5.0.5 Dla zwartej zorientowanej hiperpowierzchni M

$$\int_M dV$$

jest równa $\mu(M)$ - mierze k -wymiarowej M - czyli objętości M . W szczególności dV jest niedokładna.

Dowód. Szkic dowodu. Dla płyta $U'_\alpha \subset M$ o parametryzacji $\varphi : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ zgodnej i formy objętości dV mamy równość (do dowodu wykorzystujemy ćwiczenie)

$$\varphi^*(dV) = |\varphi'| \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

skąd

$$|U'_\alpha| = \int_{U'_\alpha} 1 = \int_{U_\alpha} |\varphi'| dx_1 \dots dx_k = \int_{U_\alpha} |\varphi'| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{U_\alpha} \varphi^*(dV) = \int_{U'_\alpha} dV.$$

W dowolnym przypadku wykorzystujemy rozkład jedności aby wykazać, że $\int_M 1 = \int_M dV$.

■

UWAGA: uzasadnia to stary symbol na całkę z funkcji skalarnej f po hiperpowierzchni M : $\int_M f = \int f dV$.

Poniższe tw uogólnia Tw. 5.6 z książki Spivaka "Analiza na rozmaitościach", PWN.2005.

Twierdzenie 5.0.6 Jeżeli M jest zorientowana hiperpowierzchnia k -wymiaru 1, $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim M = n$, i $N = [N_1, \dots, N_{n+1}]$ jest jednostkowym polem wektorowym ciągłym normalnym do M to forma objętości dV jest równa

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} N_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Przykład 5.0.1 Weźmy sferę $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Polem normalnym jest pole punktu wodzącego $N = [x_1, \dots, x_{n+1}]$ stąd forma objętości na S^n jest równa

$$dS^n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Skoro jest to forma objętości, to

$$\int_{S^n} dS^n \neq 0$$

bo to jest objętość sfery S^n . W szczególności forma ta jest niedokładna, czyli nie istnieje na S^n żadna forma η dtopnia $n-1$ taka, że $d\eta = dS^n$.

Podamy teraz pewne ciekawe zastosowania Tw. Stokesa w topologii.

6 Zastosowania Tw. Stokesa w topologii

Oznaczmy przez K^{n+1} kulę w $\mathbb{R}^{n+1}$ o promieniu 1 i środku w 0, zatem $\partial K^{n+1} = S^n$.

Twierdzenie 6.0.7 Nie istnieje gładkie odwzorowanie

$$\mathbf{r} : K^{n+1} \rightarrow S^n$$

które jest identycznością na sferze S^n .

Dowód. Przypuśćmy, że takie odwzorowanie $\mathbf{r}$ istnieje. Weźmy dowolną n -formę na S^n taką, że $\int_{S^n} \omega \neq 0$. Forma taka istnieje (np. forma objętości - lub nawet dowolna n forma nigdzie nie równa zeru - patrz Tw 1.5.1). Wtedy (skoro $\mathbf{r}|_{S^n} = id$)

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \mathbf{r}^* \omega = \int_{\partial K^{n+1}} \mathbf{r}^* \omega \stackrel{\text{Tw. Stokesa}}{=} \int_{K^{n+1}} d(\mathbf{r}^* \omega) = \int_{K^{n+1}} \mathbf{r}^* (d\omega) \\ &= \int_{K^{n+1}} \mathbf{r}^* (0) = 0 \end{aligned}$$

bo $d\omega$ jest $n+1$ formą na S^n a taka forma musi być zerowa. ■

Twierdzenie 6.0.8 Tw. Brouwera o punkcie stałym. Niech $f : K^n \rightarrow K^n$ będzie gładkim odwzorowaniem kuli w kulę. Wtedy istnieje punkt $x \in K^n$ taki, że $f(x) = x$ (t.j. f posiada punkt stały).

Dowód. Przypuśćmy, że f nie ma punktów stałych. Tzn. dla wszystkich $x \in K^n$ punkty x i $f(x)$ są różne. Zdefiniujemy odwzorowanie $\mathbf{r} : K^n \rightarrow S^{n-1}$ następująco: $\mathbf{r}(x)$ jest to punkt jaki promień startujący z $f(x)$ i przechodzący przez x przetnie sferę. Trzeba sprawdzić licząc współrzędne że jest to odwzorowanie gładkie. Z konstrukcji $\mathbf{r}$ mamy $\mathbf{r}(x) = x$ dla punktów $x \in S^n$. Istnienie takiego odwzorowania jest sprzeczne z poprzednim twierdzeniem. ■

7 Zastosowania całki powierzchniowej zorientowanej w Fizyce

7.1 Strumień cieczy

Niech S będzie powierzchnią zorientowaną i $\mathbf{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S$, polem wektorowym prędkości przepływu cieczy przez powierzchnię S . Wtedy

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

jest objętością cieczy przepływającej przez powierzchnię S w jednostce czasu w kierunku dodatniej strony powierzchni. Jeśli całka ta jest liczbą ujemną, oznacza to, że więcej cieczy płynie w przeciwnym kierunku.

7.2 Pole cienia

Założmy, że światło pada promieniami równoległymi do siebie w kierunku wektora jednostkowego $\mathbf{G}$ na płaszczyznę P prostopadłą do $\mathbf{G}$. Założmy też, że powierzchnia zorientowana S o parametryzacji $\Phi : D \rightarrow S$ jest tak ułożona między światłem i płaszczyzną P , że każdy promień światła przecina ją w co najwyżej jednym punkcie.

Wówczas, pole A cienia powierzchni S na płaszczyznę P dane jest wzorem

$$A = \iint_D \left| \mathbf{G} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \right| du dv.$$

Jeśli światło pada od strony ujemnej powierzchni S to moduł w tym wzorze można pominąć i całka wówczas równa się

$$A = \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}.$$

7.3 Strumień ciepła

Wcześniej stwierdziliśmy, że przepływ ciepła w ciele o temperaturze $T(x, y, z)$ opisuje pole wektorowe $\mathbf{J} = -k \cdot \nabla T$. Stąd całka

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -k \cdot \iint_S \nabla T \cdot d\mathbf{S}$$

wyraża globalną ilość ciepła przepływającą przez zorientowaną powierzchnię S .

7.4 Prawo Gaussa

Założmy, że pole elektryczne $\mathbf{E}$ jest wytworzone przez ładunek elektryczny Q punktowy, liniowy, powierzchniowy lub przestrzenny. *Prawo Gaussa* wiąże strumień pola

elektrycznego $\mathbf{E}$ przez zamkniętą powierzchnię S z całkowitym ładunkiem Q zawartym wewnątrz S za pomocą całki pola $\mathbf{E}$ przez powierzchnię S zorientowaną na zewnątrz

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\epsilon Q, = \frac{1}{\epsilon_o} Q \quad (7.4.1)$$

gdzie ϵ jest współczynnikiem występującym w prawie Coulomba a ϵ_o jest *współczynnikiem przenikalności elektrycznej* danego ośrodka w którym umieszczony jest ładunek Q . Będzie ono uzasadnione dla ładunku punkowego w rozdziale dotyczącym wzorów całkowych.

7.5 Zadania

Zadanie

Oblicz $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, gdzie S jest zorientowaną do wewnątrz powierzchnią boczną bryły ograniczonej od góry płaszczyzną $z = 0$ a od dołu elipsoidą $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ dla pola $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$.

Zadanie

Oblicz $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ gdzie $\mathbf{F} = [1, 1, z(x^2 + y^2)^2]$ i S jest powierzchnią całkowitą walca $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, zaś $\mathbf{n}$ jest polem jednostkowym normalnym skierowanym do wewnątrz cylindra.

Zadanie

Załóżmy, że funkcja temperatury jest dana wzorem $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i niech S będzie sferą jednostkową $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz. Obliczyć bez używania parametryzacji sfery strumień ciepła przez powierzchnię S jeżeli $k = 1$. Zinterpretować znak wyniku. Odp. -8π .

Zadanie

Niech pole prędkości przepływu cieczy będzie dane wzorem $\mathbf{V} = \sqrt{x}\mathbf{j}$ (mierzone w m/s). Obliczyć ile m^3 cieczy płynie na sekundę przez powierzchnię $x = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 1$, zorientowaną przez pole dla którego $\cos \alpha > 0$.

Zadanie

Niech temperatura T w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana będzie wzorem $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Obliczyć strumień ciepła wpływający do środka walca $x^2 + y^2 = 2$, $0 \leq x \leq 2$, przez jego powierzchnię boczną (dla $k = 1$).

Zadanie

Niech S będzie zamkniętą powierzchnią która składa się z górnej półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, i koła $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Niech $\mathbf{E}$ będzie polem elektrycznym zdefiniowanym wzorem $\mathbf{E} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Obliczyć ładunek elektryczny zamknięty przez powierzchnię S .

Zadanie

Światło pada z góry na dół w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $x + 2y + 3z = -1$. Obliczyć pole cienia rzucanego przez dysk $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, $z = 0$. Odp. $\frac{3\pi}{4\sqrt{14}}$.

Zadanie

Niech S będzie górną połówką sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, zorientowaną przez pole normalne skierowane na zewnątrz. Weźmy pola wektorowe

- $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

- $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Obliczyć dla tych pól

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{ i } \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

gdzie C jest brzegiem powierzchni półsfery S – okręgiem jednostkowym w płaszczyźnie OXY przebieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara patrząc z dodatniej części osi OZ (zakładamy prawoskrętny układ współrzędnych). Zauważyć fenomen równości tych całek. Będzie on wyjaśniony w następnym rozdziale za pomocą wzoru Stokesa.

Zadanie

Pokazać, że jeżeli pole wektorowe $\mathbf{F}$ jest styczne do powierzchni S to strumień tego pola przez powierzchnię S jest zerowy.

7.6 Zadania teoretyczne

Zadanie

Jeśli poniższe zdanie jest prawdziwe, udowodnij je, jeżeli jest fałszywe daj kontrprzykład:

— jeżeli $f(x, y, z)$ jest funkcją różniczkowalną, to strumień pola ∇f przez powierzchnię sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ jest równy zero.

8 Wykorzystanie wzoru Greena

Przykład 8.0.1 Niech C będzie brzegiem kwadratu $D = [0, 1] \times [0, 1]$ zorientowanego przeciwko ruchowi wskazówek zegara. Całka po łuku C musi rozpaść się na sumę całek po czterech odcinkach. Twierdzenie Greena pozwala wykonać to jedną całką (o ile współrzędne pola [formy różniczkowej] są określone i różniczkowalne wewnątrz kwadratu). Np.

$$\int_C (y^4 + x^3) dx + 2x^6 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (2x^6) - \frac{\partial}{\partial y} (y^4 + x^3) \right) dx dy = 1.$$

Twierdzenie 8.0.1 (Pole obszaru płaskiego) Jeżeli krzywa C jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru płaskiego D [C może składać się z kilku części] to pole D równa się

$$|D| = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \int_C x dy = - \int_C y dx.$$

Dowód.

$$\frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy = \iint_D dx dy = |D|.$$

Pozostałe wzory dowodzimy identycznie. ■

Twierdzenie 8.0.2 (Twierdzenie Greena w terminach pola wektorowego) Niech $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = [P, Q]$ będzie polem wektorowym kl. C^1 określonym w obszarze płaskim D ograniczonym dodatnio zorientowaną zamkniętą krzywą ∂D . Wówczas

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy.$$

Dowód. Zgodnie z def. rotacji $\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$. Stąd $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. ■

Twierdzenie 8.0.3 (Twierdzenie Gaussa o dywergencji na płaszczyźnie) Niech D będzie obszarem płaskim i $\mathbf{n}$ – jednostkowym normalnym polem wektorowym wzdłuż brzegu ∂D skierowanym na zewnątrz obszaru D . Dla dowolnego pola wektorowego $\mathbf{F}$ kl. C^1 na D zachodzi wzór

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F} \, dx \, dy.$$

Dowód. Niech $\mathbf{T}$ będzie ciągłym jednostkowym i stycznym polem wzdłuż brzegu ∂D zgodnym z jego dodatnią orientacją (t.j. $(\mathbf{n}, \mathbf{T})$ dodatnio orientuje płaszczyznę, zatem $(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k})$ dodatnio orientuje przestrzeń skąd - co wynika z własności iloczynu wektorowego z początku wykładu - w ciągu $(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{k}, \dots)$ iloczyn wektorowy dwu sąsiednich wektorów jest wektorem następnym). Implikuje to $\mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$, a także $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ i

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{T}) \, ds = - \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T}) \, ds.$$

Z drugiej strony, z własności iloczynu mieszanego

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) = (\mathbf{F} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{T} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T},$$

i zamiany całki zorientowanej na całkę niezorientowaną z funkcji skalarnej

$$\int_{\partial D} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_{\partial D} ((\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}) \, ds = \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Niech $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, wtedy $\mathbf{k} \times \mathbf{F} = A\mathbf{k} \times \mathbf{i} + B\mathbf{k} \times \mathbf{j} = A\mathbf{j} - B\mathbf{i}$. Stosując Twierdzenie Greena do całki krzywoliniowej (dla $P = -B$ i $Q = A$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\mathbf{k} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial D} (A\mathbf{j} - B\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \iint_D (\text{div } \mathbf{F}) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

■

Uwaga 8.0.1 Fizycznie, lewa strona płaskiego Twierdzenia Gaussa o dywergencji wyraża strumień pola wektorowego wypływający z wnętrza obszaru D przez jego brzeg ∂D . Jeżeli zatem pole $\mathbf{F}$ reprezentuje płaskie pole przepływu cieczy, twierdzenie orzeka, że strumień cieczy wypływający z D przez jego brzeg ∂D w jednostce czasu równa się całce po D z dywergencji pola $\mathbf{F}$. W szczególności,

- jeżeli dywergencja znika, to strumień jest zerowy.

8.1 Zadania praktyczne

Zadanie

Sprawdzić Tw. Greena dla pola $\mathbf{F} = [x, xy]$ i koła jednostkowego $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Zadanie

Stosując całki zorientowane obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą:

- (a) elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- (b) hipocykloidą $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,
- (c) krzywą Steinera

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}R \cos t + \frac{1}{3}R \cos(2t), \\ y(t) = \frac{2}{3}R \sin t - \frac{1}{3}R \sin(2t), \quad t \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ wypływający z wnętrza kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.

9 Wykorzystanie wzoru Stokesa dla powierzchni

9.1 Zadania praktyczne

Zadanie

Znaleźć cyrkulację pola wektorowego $\mathbf{F} = [z, -x, -y]$ wzdłuż brzegu trójkąta zorientowanego tak, aby kolejnymi wierzchołkami były $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$.

Zadanie

Niech S będzie częścią sfery $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$, $z \geq 0$, zorientowaną przez pole skierowane na zewnątrz. Obliczyć $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla $\mathbf{F} = [y, -x, e^{xz}]$. (Odp. -2π)

Zadanie

Rozważyć pole grawitacyjne $\mathbf{F} = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3}$. Pokazać, że

- $\text{div } \mathbf{F} = 0$,
- istnieje zamknięta powierzchnia przez którą strumień jest niezerowy (rozważyć sferę jednostkową o środku w początku układu współrzędnych)
- pole $\mathbf{F}$ nie ma potencjału wektorowego! (Gdyby miało, $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, to zgodnie z wnioskiem $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = 0$ dla każdej powierzchni zamkniętej S ale jest to sprzeczne z poprzednim punktem.)

Zadanie

Wykorzystując Tw. Stokesa obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

gdzie C jest przecięciem cylindra $x^2 + y^2 = 1$ z płaszczyzną $x + y + z = 1$; orientacja C odpowiada ruchowi przeciw wskazówkom zegara (w/g obserwatora umieszczonego wysoko na osi OZ). (Odp. $\frac{3\pi}{2}$).

Zadanie

Korzystając z uwagi 9.2.1 obliczyć całkę krzywoliniową nieorientowaną

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

gdzie S jest częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z \geq 1$, $\mathbf{n}$ jest polem normalnym jednostkowym zwróconym na zewnątrz sfery zaś $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. (Odp. $-\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$).

Zadanie

Rozważmy pole wektorowe

$$\mathbf{F} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Sprawdzić, że $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ oraz $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ dla jednostkowego okręgu leżącego w płaszczyźnie OXY będącego brzegiem koła. Dlaczego nie jest to sprzeczne z Tw. Stokesa?

Zadanie

Obliczyć $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla pola wektorowego $\mathbf{F} = [3y, -xz, -yz^2]$ po części powierzchni S o równaniu $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$, (a) bezpośrednio, (b) przez zastosowanie Tw. Stokesa. Założyć, że powierzchnia S jest zorientowana za pomocą pola wektorowego normalnego dla którego $\cos \gamma > 0$.

9.2 Zadania teoretyczne

Zadanie

Udowodnić równość

$$\int_{\partial D} \phi \cdot \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D (\phi \cdot \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \, dx \, dy.$$

Zadanie

Wykazać, że jeśli f jest funkcją harmoniczną w obszarze D to

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

Zadanie

Weźmy pole wektorowe $\mathbf{F} = \left[-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right]$. Zakładając, że D jest jednostkowym dyskiem $x^2 + y^2 \leq 1$ wyjaśnić dlaczego Twierdzenie Greena nie zachodzi w tym przypadku.

Przykład 9.2.1 Rozważmy pole wektorowe $\mathbf{F} = ye^z \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + xye^z \mathbf{k}$. Wykażemy (korzystając z Tw. Stokesa), że całka po dowolnej krzywej zamkniętej będącej brzegiem pewnej powierzchni znika.

I-sposób. Sprawdzamy bezpośrednio związek $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i stosujemy Tw. Stokesa.

II-sposób. Zauważamy, że pole $\mathbf{F}$ jest gradientem $\mathbf{F} = \nabla (xye^z)$ i stosujemy Lemat mówiący, że rotacja gradientu znika.

Uwaga 9.2.1 Z Tw. Stokesa wynika, że jeżeli dwie zorientowane powierzchnie mają ten sam zorientowany brzeg, wtedy całki z rotacji pola wektorowego przez te dwie powierzchnie są równe.

Zadanie

Niech C będzie krzywą zamkniętą która jest brzegiem powierzchni S i niech f i g będą funkcjami kl. C^2 określonymi w dziedzinie zawierającej S . Pokazać równości

- $\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}.$
- $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$

Zadanie

Pokazać dla zamkniętej powierzchni S i stałego pola $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{v}$ wzór

$$2 \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

gdzie jak zwykle $\mathbf{r}$ jest polem wektorowym punktu wodzącego.

Przykład 9.2.2 $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}) \neq 0$. Zbiór $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ jest jednospójny. Weźmy 2 formę

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy).$$

Jest to 2-forma odpowiadająca polu wektorowemu grawitacyjnemu. Łatwo sprawdzamy, że

(1) $d\omega = 0$, skąd forma ω wyznacza klasę kohomologii $[\omega] \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\})$.

(2) dla sfery S^2 (może być dowolny promień)

$$\int_{S^2} \omega \neq 0.$$

Wiemy z wniosku z tw. Stokesa że gdyby $\omega = d\eta$ to $\int_{S^2} d\eta = 0$. Zatem forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\})$ nie jest dokładna! Oznacza, to że klasa kohomologii $[\omega]$ nie jest zerowa! czyli $\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}) \neq 0$. Oznacza to także, że pole wektorowe

$\mathbf{F} = \left[\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right]$ chociaż w $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ ma zerową dywergencję to nie posiada globalnie potencjału wektorowego.

9.3 Wykorzystanie wzoru Gaussa-Ostrogradskiego

9.4 Zadania praktyczne

Zadanie

Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S (2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$, gdzie S jest sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zorientowaną na zewnątrz. Odp. $\frac{8\pi}{3}$.

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ przez powierzchnię całkowitą walca $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, zorientowaną na zewnątrz. Odp. π

Zadanie

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{V} = [x^3, y^3, z^3]$ przenikający na zewnątrz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Odp. $\frac{12\pi}{5}$.

Zadanie

Znaleźć strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = [x, y, z]$ przenikający przez na zewnątrz sfery jednostkowej $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (a) bezpośrednio, (b) za pomocą Tw.G-0.

Zadanie

Niech $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Obliczyć $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dla każdego obszaru ograniczonego poniższymi powierzchniami

(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$,

(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$,

(c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \leq 0$.

Zadanie

Obliczyć $\iint_M xyzi \cdot d\mathbf{S}$, gdzie M jest powierzchnią całkowitą walca $x^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 10$, zorientowaną do wewnątrz.

9.5 Zadania teoretyczne

Zadanie

Wykazać równość

$$\iiint_W (\nabla f) \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial W} f \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS - \iiint_W f \cdot \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Zadanie

Wykazać identyczności Greena:

(a) $\iint_{\partial W} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$,

(b) $\iint_{\partial W} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_W (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$.

Zadanie

Ustalmy k wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ i rozważmy k ładunków elektrycznych $q_1, \dots, q_k$ umieszczonych odpowiednio w $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Weźmy funkcję

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|}, \quad \text{gdzie } \mathbf{r} = [x, y, z].$$

Pokazać, że dla zamkniętej powierzchni S na której nie leży żaden ładunek i pola $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ zachodzi

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

gdzie Q jest sumą ładunków leżących wewnątrz S .

10 ZASTOSOWANIA TWIERDZEŃ CAŁKOWYCH

10.1 Cyrkulacja a rotacja

W teorii pola wektorowego wspomnieliśmy, że $\text{rot } \mathbf{F}$ ma związek z efektami obrotowymi pola $\mathbf{F}$. Oto wyjaśnienie dokładne tego związku będące konsekwencją Tw. Stokesa.

Twierdzenie 10.1.1 *Niech C_ε będzie okręgiem o promieniu ε i środku w punkcie $\mathbf{x}_o$ prostopadłym do wektora jednostkowego $\mathbf{n}$. Orientujemy C_ε w/g rysunku: [zrobić sobie proszę samemu]*

Niech $\mathbf{F}$ będzie polem wektorowym określonym w obszarze zawierającym $\mathbf{x}_o$. Wtedy

$$(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (10.1.1)$$

Oznacza to, że rzut rotacji $(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_o)$ na kierunek $\mathbf{n}$ może być interpretowany jako cyrkulacja pola $\mathbf{F}$ po brzegu jednostkowego obszaru leżącego w płaszczyźnie normalnej do $\mathbf{n}$ (we wzorze powyższym $\pi \varepsilon^2$ jest polem koła ograniczonego przez okrąg C_ε).

Dowód. Oznaczmy przez S_ε dysk (tzn. koło) o środku w $\mathbf{x}_o$ i promieniu ε leżący w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{n}$. Oczywiście $C_\varepsilon = \partial S_\varepsilon$. Z Tw. Stokesa

$$\iint_{S_\varepsilon} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\varepsilon} (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Z Tw. o wartości średniej dla całki podwójnej wynika istnienie punktu $\mathbf{x}_\varepsilon \in S_\varepsilon$ takiego, że

$$\iint_{S_\varepsilon} (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = ((\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}) \cdot |S_\varepsilon|.$$

Stąd

$$(\text{rot } \mathbf{F})(\mathbf{x}_\varepsilon) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|S_\varepsilon|} \cdot \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dla $\varepsilon \rightarrow 0$ zachodzi $\mathbf{x}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{x}_o$. Zatem

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

■

Wniosek 10.1.1 Z wzoru (10.1.1) wynika, że

- *jeśli cyrkulacja pola wzdłuż każdego łuku zamkniętego jest zerowa, to pole wektorowe jest bezwirowe.*

Na odwrót wiemy, że nie zachodzi. Pole wektorowe bezwirowe może mieć niezerową cyrkulację (np. $\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$, chyba, że jest określone w obszarze jednospójnym !

Zadanie

Sprawdzić prawdziwość powyższego wzoru dla pola wektorowego opisującego ruch obrotowy.

10.2 Dywergencja a strumień

Wykorzystamy Tw. Gaussa-Ostrogradskiego do podania fizycznej geometrycznej interpretacji dywergencji.

Twierdzenie 10.2.1 *Jeśli B_r jest kulą o promieniu r i środku w punkcie $\mathbf{x}_o$ oraz brzegu $S_r = \partial B_r$ zorientowanym na zewnątrz, to dla dowolnego pola $\mathbf{F}$ określonego w otoczeniu punktu $\mathbf{x}_o$ dywergencja pola $\mathbf{F}$ w $\mathbf{x}_o$ jest dana wzorem*

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \cdot \iint_{S_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (10.2.1)$$

Dowód tego twierdzenia przebiega podobnie do dowodu Tw. (10.1.1). Wykorzystuje się tu Tw. G-O i twierdzenie o wartości średniej dla całki potrójnej.

Uwaga 10.2.1 Wzór (10.2.1) orzeka, że dywergencja $(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}_o)$ pola $\mathbf{F}$ w punkcie $\mathbf{x}_o$ może być interpretowana jako strumień pola $\mathbf{F}$ wypływający z zamkniętej jednostkowej objętości zawierającej $\mathbf{x}_o$. W przypadku interpretacji hydromechanicznej i pola $\mathbf{F}$ opisującego prędkość przepływu cieczy wyjaśnia to nazwy punktów "źródło" i "ujście".

Wniosek 10.2.1 Z wzoru (10.2.1) wynika, że

- *pole wektorowe dla którego strumień przez każdą powierzchnię zamkniętą jest zerowy ma znikającą dywergencję,*

Na odwrót wiemy, że nie zachodzi. Pole wektorowe bezźródłowe może mieć niezerowy strumień przez zamkniętą powierzchnię (np. pole grawitacyjne $\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3} \cdot \mathbf{r}$) chyba, że jest określone w obszarze gwiaździstym. Zauważmy dodatkowo, że jednospójność obszaru nie wystarcza do równoważności bezźródłowości ze znikaniem strumienia, np. ww wspomnianym zadaniu dziedziną pola jest przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z usuniętym punktem a ten zbiór jest jednospójny!

11 Zastosowania Tw. Stokesa w elektromagnetyzmie

Rachunek wektorowy gra istotną rolę w teorii elektromagnetyzmu.

11.1 Równanie Maxwella

W zamkniętym obwodzie C zbudowanym z przewodnika pojawiają się prądy elektryczne (zwane indukcyjnymi), jeżeli przez powierzchnię S ograniczoną obwodem przenika zmienny strumień magnetyczny. Natężenie prądu indukowanego zależy jedynie od szybkości zmian strumienia magnetycznego (jest to tzw. *zjawisko indukcji elektromagnetycznej Faradaya*). Przykładowo, zjawisko to ma miejsce gdy do obwodu zbliżamy i oddalamy stały magnes.

Zmienne w czasie natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(t)$ i pole wektorowe indukcji magnetycznej $\mathbf{B}(t)$ związane są ze sobą jednym z **równań Maxwella**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (11.1.1)$$

11.2 Prawo Faradaya

Związek między cyrkulacją natężenia pola elektrycznego wzdłuż obwodu C (nazywane też “spadkiem napięcia wzdłuż”) a strumieniem indukcji pola magnetycznego przez powierzchnię S ograniczoną obwodem C wyraża równanie zwane *prawem Faradaya*:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Łatwo jest uzasadnić to prawo korzystając z równania Maxwella (11.1.1) i Tw. Stokesa. Z Tw. Stokesa dostajemy

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Korzystając z równania Maxwella (11.1.1) i zakładając, że znamy prawo matematyczne wchodzenia z różniczkowaniem pod znak całki otrzymujemy

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

11.3 Prawo Gaussa c.d.

Podstawą wykazania Prawa Gaussa jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11.3.1 *Niech W będzie obszarem w $\mathbb{R}^3$ dla którego początek układu współrzędnych $(0, 0, 0)$ nie leży na brzegu ∂W . Wtedy*

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{jeśli } (0, 0, 0) \in W \\ 0 & \text{jeśli } (0, 0, 0) \notin W, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ jest wektorem wodzącym punktu (x, y, z) a $r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dowód. Jeśli $(0,0,0) \notin W$ to powyższy wzór wynika bezpośrednio z Tw. Gaussa-Ostrogradskiego o dywergencji

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = 0$$

bo pole $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ma zerową dywergencję. Istotnie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \operatorname{div} (\mathbf{r}) + \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gdyż $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ oraz

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \dots, \dots \right] = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) 2x, \dots, \dots \right] \\ &= \left[-3 \frac{x}{r^5}, -3 \frac{y}{r^5}, -3 \frac{z}{r^5} \right] \\ &= -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}. \end{aligned}$$

Jeśli $(0,0,0) \in W$ to argumentacja powyższa jest fałszywa, bo pole $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ nie jest określone w punkcie $(0,0,0)$. W tym przypadku weźmy małą kulkę B o środku w $(0,0,0)$ i promieniu r_o całkowicie zawartą wewnątrz obszaru W i oznaczmy przez $\tilde{W}$ obszar przestrzenny zawarty między ∂W i ∂B . Oczywiście $(0,0,0) \notin \tilde{W}$. Orientujemy brzeg ∂B kulki B standardowo przez pole wektorowe skierowane na zewnątrz kulki, jednakże wtedy – jako część brzegu obszaru $\tilde{W}$ – jest to powierzchnia zorientowana ujemnie (gdyż kulka B leży na zewnątrz obszaru $\tilde{W}$). Stosujemy pierwszą część dowodu dla obszaru $W = \tilde{W}$

$$0 = \iint_{\partial \tilde{W}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS - \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS.$$

Stąd

$$\iint_{\partial W} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

gdyż na brzegu ∂B sfery B o promieniu r_o zachodzi $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{r(x,y,z)}$ i dlatego

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

oraz

$$\iint_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \iint_{\partial B} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r_o^2} \cdot |\partial B| = \frac{1}{r_o^2} \cdot 4\pi r_o^2 = 4\pi.$$

11.4 Dowód Prawa Gaussa

Potencjałem w punkcie (x, y, z) pola elektrycznego indukowanego przez ładunek elektryczny Q umieszczony w środku układu współrzędnych jest (patrz prawo Coulomba

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Pole elektryczne $\mathbf{E}$ wyznaczone jest swoim potencjałem V jednoznacznie jako pole skierowane w stronę największego spadku potencjału V

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Z Tw (11.3.1) wnosimy, że strumień pola elektrycznego $\mathbf{E}$ wypływający z powierzchni zamkniętej ∂W nie przechodzącej przez $(0, 0, 0)$ wynosi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial W} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \right) dS \\ &= \iint_{\partial W} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{jeśli } (0, 0, 0) \in W \\ 0 & \text{jeśli } (0, 0, 0) \notin W. \end{cases} \end{aligned}$$

Jest to treść prawa Gaussa.

11.5 Ciągłe pole ładunków elektrycznych i równanie Maxwella

Rozważmy teraz ciągłe pole ładunków elektrycznych o gęstości $\rho(x, y, z)$. Jedno z **równań Maxwella** dla takiego pola ustanawia związek natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ wywołanego ciągłym polem ładunków z jego gęstością ρ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Stosując Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego dostajemy

$$\iint_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_W \rho(x, y, z) dV.$$

Liczba $Q = \iiint_W \rho(x, y, z) dV$ wyraża całkowity ładunek elektryczny objęty powierzchnią ∂W .

11.6 Objętość obszaru przestrzennego

Tw. G-O może również służyć do obliczania objętości obszaru przestrzennego W , analogicznie jak Tw. Greena może służyć do obliczania pola powierzchni płaskiej. Mianowicie, objętość $|W|$ obszaru przestrzennego ograniczonego zamkniętą powierzchnią ∂W dodatnio zorientowaną jest równa całce powierzchniowej pola wektorowego $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ którego dywergencja $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ jest tożsamościowo równa 1 :

Twierdzenie 11.6.1 (Objętość obszaru przestrzennego) Jeśli $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$ to

$$|W| = \iiint_W dV = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Na przykład polami wektorowymi $\mathbf{F}$ o dywergencji równej 1 są $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$, $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, ..., $\mathbf{F} = \frac{1}{3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, itp. Dlatego zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11.6.2 (Objętość obszaru przestrzennego, wzory konkretne) Jeśli zamknięta po-wierzchnia S jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru przestrzennego W [S może składać się z kilku "części"] to objętość $|W|$ obszaru W równa się

$$|W| = \iint_S x\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S y\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{3} \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Przykład 11.6.1 Załóżmy, że parametryzacją dodatnią powierzchni zamkniętej S jest $\Phi(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$, $(t, u) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Wtedy

$$x(t, u) \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} = x(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Stąd, objętość obszaru W ograniczonego powierzchnią S równa się

$$|W| = \iiint_W dV = \iint_S x\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D x(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt du.$$

Analogicznie możemy wyprodukować inne wzory wyrażające objętość obszaru W wychodząc od innego pola $\mathbf{F}$ o dywergencji 1, np. $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$ lub $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} |W| &= \iiint_W dV = \iint_S y\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D y(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt du, \\ |W| &= \iiint_W dV = \iint_S z\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D z(t, u) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} dt du. \end{aligned}$$

11.7 Zadania praktyczne

Zadanie

Powtarzając rozumowanie z przykładu (11.6.1) (aby utrwalić teorię całki krzywoliniowej i wzór G-O) obliczyć objętość torusa o dużym promieniu R i małym r . Odp. $2\pi^2 Rr^2$ - tyle samo ile wynosi objętość walca powstałego z przecięcia torusa wzdłuż małego okręgu i jego "wyprostowania".

Zadanie *

(Wykorzystanie wzoru G-O w drugą stronę) Obliczyć $\iiint_W x^2 dx dy dz$ po obszarze ograniczonym paraboloidą eliptyczną $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ i płaszczyzną $z = 1$. (Znaleźć pole $\mathbf{F}$ którego dywergencją jest funkcja x^2 i zastosować wzór G-O). Odp. $\frac{\pi}{6}$.

11.8 Zadania teoretyczne

Zadanie

Wykorzystując ostatni z napisanych wyżej wzorów rozwiązać następujące zadanie:
Dana jest zamknięta krzywa w płaszczyźnie OYZ o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} y = y(t) > 0, \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Obracamy ją dookoła osi OZ otrzymując powierzchnię obrotową o parametryzacji

$$\Phi(t, u) = (y(t) \sin u, y(t) \cos u, z(t)), \quad u \in [0, 2\pi], \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Obliczyć objętość otrzymanej bryły obrotowej W . Odp. $|W| = -2\pi \int_{\alpha}^{\beta} z(t) y'(t) y(t) dt$.