CZĘŚĆ III.

Przestrzenie zespolone

ROZDZIAŁ XV.

Ogólne własności przestrzeni zespolonych

120. Punkty przestrzeni zespolonych. Okazaliśmy we wstępie, jak przestrzenie rozpatrywane w elementarnej geometrii euklidesowej dają się potraktować, dzięki wprowadzeniu spółrzędnych kartezjańskich, jako przestrzenie, których punktami są układy uporządkowane liczb rzeczywistych. To nas doprowadziło do pojęcia n-wymiarowych przestrzeni kartezjańskich C_n, których badanie stanowiło przedmiot części I tej książki. Okazało się (w Nr 16 i 19), że hiperpłaszczyzny w przestrzeni C_n dają się analitycznie scharakteryzować jako zbiory punktów, których spółrzędne są funkcjami liniowymi (tj. pierwszego stopnia) względem niezależnych parametrów rzeczywistych, zaś $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny są (w myśl Nr 23) identyczne z tworami pierwszego stopnia, czyli ze zbiorami punktów, określonymi przez jedno równanie pierwszego stopnia względem ich spółrzędnych.

Dążenie do potraktowania równoległości prostych jako granicznego przypadku ich przecinania się doprowadziło, w części II tej książki, do pojęcia punktów niewłaściwych i przestrzeni rzutowych, dzięki którym własności tworów pierwszego stopnia przybrały bardziej harmonijną postać. Inne rozszerzenie przestrzeni kartezjańskich stanowiły przestrzenie Möbiusa, w których twory liniowe zostały potraktowane jako szczególny przypadek sfer.

W rozdziałach VII i VIII poznaliśmy szereg zagadnień geometrycznych, wyprowadzających nas poza zakres tworów pierwszego stopnia. Wśród poznanych tam zbiorów większość określona była przez równania stopnia drugiego, przy czym okazało się, że — w przeciwieństwie do tworów stopnia pierwszego — twory stopnia drugiego przedstawi znaczną rozmaitość kształtów. Poznanie ich ogólnych własności i klasyfikacja stanowić będą w dalszym ciągu główną część naszego zadan Łatwo jest przewidzieć, że ograniczanie się do rzeczywistych warto spółrzędnych, które wystarczały nam w dziedzinie tworów stop pierwszego, będzie wysoce niedogodne przy tworach określonych pr równania stopnia drugiego, naturalną bowiem dziedziną dla równ algebraicznych stopni wyższych nie jest dziedzina liczb rzeczywisty lecz dziedzina liczb zespolonych.

Z tego względu korzystne będzie stanąć od razu na gruncie bardz ogólnym i wprowadzić tzw. *przestrzenie zespolone*.

Mianowicie przez *n-wymiarową przestrzeń kartezjańską zespolo* rozumieć będziemy zbiór $\mathfrak{C}_n$ wszystkich układów uporządkowany $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, złożonych z n liczb zespolonych, zaś przez *n-wymiaro przestrzeń rzutową zespoloną* — zbiór $\mathfrak{P}_n$ wszystkich układów uporządkow nych $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, złożonych z $n+1$ liczb zespolonych, nie wszystki jednocześnie równych zeru, przy czym układy proporcjonalne uważa s zawsze za jeden i ten sam punkt.

Ponieważ liczby rzeczywiste są szczególnym przypadkiem liczb z spolonych, więc punkty przestrzeni C_n należą również do przestrze $\mathfrak{C}_n$.

Nazywać je będziemy *rzeczywistymi punktami przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$.

Podobnie każdy punkt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ przestrzeni P_n uważać możem za punkt przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, identyfikując go ze wszystkimi układar postaci $\{\lambda\cdot x_0, \lambda\cdot x_1, \ldots, \lambda\cdot x_n\}$, gdzie λ jest dowolną liczbą zespolor różną od zera.

Punkty tej postaci nazywamy *rzeczywistymi punktami przestrzeni* $\mathfrak{P}$

Dla każdej liczby zespolonej $z=x+iy$ oznaczać będziemy przez $\bar{z}$ liczt sprzężoną $x-iy$. Z algebry wiadomo, że cztery działania arytmetyczn wykonywane na liczbach sprzężonych, dają zawsze wyniki sprzężone ora że liczby sprzężone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy są rzeczy wiste.

Dla każdego $p=(z_1, z_2, \ldots, z_n)\ \varepsilon\ \mathfrak{C}_n$ oznaczmy przez $\bar{p}$ punkt o spól rzędnych sprzężonych $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$; punkty p i $\bar{p}$ nazywamy *sprzęż nymi*. Podobnie, dla każdego punktu $p=\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\ \varepsilon\ \mathfrak{P}_n$ *punkten sprzężonym* nazywamy punkt $\bar{p}=\{\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}$.

By wiedzieć, że ta ostatnia definicja jest poprawna, należy stwierdzić że zastąpienie liczb $z_0, z_1, \ldots, z_n$ przez liczby do nich proporcjonaln $\lambda\cdot z_0, \lambda\cdot z_1, \ldots, \lambda\cdot z_n$ nie zmieni punktu $\bar{p}$. Istotnie, wobec $\overline{\lambda\cdot z_\nu}=\bar{\lambda}\cdot\bar{z}$ mamy $\{\overline{\lambda\cdot z_0}, \overline{\lambda\cdot z_1}, \ldots, \overline{\lambda\cdot z_n}\}=\{\bar{\lambda}\cdot\bar{z}_0, \bar{\lambda}\cdot\bar{z}_1, \ldots, \bar{\lambda}\cdot\bar{z}_n\}=\bar{p}$.

Twierdzenie. *Punkty sprzężone p i $\bar{p}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są rzeczywiste.*

Dowód. Dla przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ prawdziwość twierdzenia jest oczywista. Pozostaje więc podać jego dowód dla przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

Niech $p=\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ będzie równe $\bar{p}=\{\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}$. Istnieje zatem liczba zespolona λ taka, że

$$\bar{z}_\nu=\lambda\cdot z_\nu \quad \text{dla } \nu=0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Istnieje wskaźnik ν_0 taki, że $z_{\nu_0}\neq 0$. Wówczas $\lambda=\dfrac{\bar{z}_{\nu_0}}{z_{\nu_0}}$, a więc (1) przyjmuje postać

$$\bar{z}_{\nu_0}\cdot z_\nu=z_{\nu_0}\cdot\bar{z}_\nu \quad \text{dla } \nu=0, 1, \ldots, n.$$

Ale liczby stojące po obu stronach tej ostatniej równości są sprzężone, równość ich znaczy więc, że są one rzeczywiste. Zatem punkt

$$p=\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}=\{\bar{z}_{\nu_0}\cdot z_0, \bar{z}_{\nu_0}\cdot z_1, \ldots, \bar{z}_{\nu_0}\cdot z_n\}$$

jest punktem rzeczywistym, co było do okazania.

W określonych w ten sposób przestrzeniach zespolonych $\mathfrak{C}_n$ i $\mathfrak{P}_n$ nie będziemy wprowadzać pojęcia odległości. Treść geometryczną nadamy im opierając się na uwadze, że uzyskane poprzednio zależności analityczne między spółrzędnymi, stanowiące w dziedzinie rzeczywistej analityczny wyraz faktów geometrycznych, zachowują na ogół swój sens również wtedy, gdy przeniesiemy je na przypadek zespolony. Stanowić one będą w tej ogólniejszej dziedzinie definicje pojęć geometrycznych, co w istocie sprowadza się do rozciągnięcia terminologii geometrycznej na dziedzinę zespoloną. Bliżej rozpatrzymy to w Nr 121—125.

ĆWICZENIE. Okazać, że dla każdej pary punktów $p=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ oraz $p'=(z_1', z_2', \ldots, z_n')$ przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ funkcja

$$\varrho(p, p')=\sqrt{|z_1-z_1'|^2+|z_2-z_2'|^2+\ldots+|z_n-z_n'|^2}$$

spełnia warunki charakteryzujące pojęcie odległości.

Przy takim zmetryzowaniu przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ jest izometryczna z C_{2n}.

121. Geometria przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. Każda geometria jest teorią niezmienników pewnej grupy przekształceń (rozdział VI, Nr 58). Obierając w rozmaity sposób grupę przekształceń, otrzymujemy rozmaite geometrie danego zbioru punktów. W ten sposób grupa izometrii przestrzeni C_n dawała nam metryczną geometrię tej przestrzeni, grupa podobieństw — geometrię podobieństw, grupa przekształceń afinicznych — geometrię afiniczną przestrzeni C_n. Podobnie i w przypadku przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ rozróżniamy parę sposobów wyboru grupy przekształceń:

Najmniej obszerną z tych grup jest *grupa izometrii rzeczywist*; które określimy obecnie arytmetycznie jako przekształcenia post

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z_2', \ldots, z_n'),$$

gdzie:

(2) $z_j' = a_{0,j} + a_{1,j} \cdot z_1 + a_{2,j} \cdot z_2 + \ldots + a_{n,j} \cdot z_n$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$,

przy czym spółczynniki $a_{i,j}$ są liczbami *rzeczywistymi*, a maci $(a_{i,j})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ jest ortogonalna.

Są to więc te same przekształcenia (wzajemnie jednoznaczne), z który mieliśmy do czynienia w dziedzinie rzeczywistej (w Nr 50), z tym, obecnie stosujemy je do przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. Przy tych przekształcenia przestrzeń C_n przechodzi na siebie tak, że otrzymana geometria pr: strzeni $\mathfrak{C}_n$ obejmuje geometrię przestrzeni C_n. Ponieważ w książce t przede wszystkim interesujemy się własnościami figur leżących w prz strzeni C_n, a wprowadzenie przestrzeni zespolonych jest — jak wspomni liśmy w Nr 120 — jedynie wynikiem naturalnego rozszerzenia alg braicznego instrumentu badań na twory geometryczne stopni wyższy od pierwszego, więc teoria niezmienników grupy izometrii rzeczywisty będzie najbardziej istotną częścią naszych rozważań.

W ten sposób określoną geometrię przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ nazywać będzien geometrią *metryczną rzeczywistą*.

Grupa izometrii o spółczynnikach rzeczywistych stanowi podgru obszerniejszej *grupy izometrii zespolonych*, a więc przekształceń f określ nych przez wzór (2) o spółczynnikach $a_{i,j}$ *zespolonych*, gdzie macie $(a_{i,j})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ jest ortogonalna, tj. gdzie $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mu,j} \cdot a_{\nu,j} = \delta_\nu^\mu$ dl $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$.

Teorię niezmienników tej grupy przekształceń nazywać będziem *geometrią metryczną zespoloną przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$.

Podobnie jak w przestrzeni C_n (ob. Nr 54), tak i w *przestrzeni* $\mathfrak{C}$ *przekształcenie izometryczne zawsze możemy interpretować jako wprowa dzenie nowego układu spółrzędnych prostokątnych*.

W przypadku, gdy izometria jest rzeczywista — mówić będziemy układzie *rzeczywistym* spółrzędnych prostokątnych.

Przekształcenie przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ postaci f, określone przez wzory (2) gdzie spółczynniki $a_{i,j}$ spełniają warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\mu,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{\nu,j}^2 \neq 0 \text{ oraz } \sum_{j=1}^{n} a_{\mu,j} \cdot a_{\nu,j} = 0 \quad \text{dla} \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ \mu \neq \nu,$$

nazywamy (zgodnie z Nr 56) *podobieństwami*.

Jeżeli wszystkie spółczynniki $a_{i,j}$ są rzeczywiste, to podobieństwo nazywa się *rzeczywistym*, a bez tego założenia mamy podobieństwo *zespolone*.

Teoria niezmienników *grupy podobieństw rzeczywistych* w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ nazywa się *rzeczywistą geometrią podobieństw* przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, zaś teoria niezmienników *grupy podobieństw zespolonych* — *zespoloną geometrią podobieństw* przestrzeni $\mathfrak{C}_n$.

Przekształcenia przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ postaci f, określone przez wzory (2) o wyznaczniku $|a_{i,j}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ różnym od zera, nazywamy *przekształceniami afinicznymi zespolonymi*.

Tworzą one *grupę*, której podgrupę stanowią *przekształcenia afiniczne rzeczywiste*, czyli te, w których spółczynniki $a_{i,j}$ są rzeczywiste. Teoria niezmienników grupy zespolonych przekształceń afinicznych nazywa się *zespoloną geometrią afiniczną* przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, zaś teoria niezmienników grupy rzeczywistych przekształceń afinicznych — *rzeczywistą geometrią afiniczną* przestrzeni $\mathfrak{C}_n$.

Jasne jest, że grupa izometrii zespolonych stanowi podgrupę grupy podobieństw, ta zaś podgrupę grupy przekształceń afinicznych zespolonych. Podobnie grupa izometrii rzeczywistych stanowi podgrupę grupy podobieństw rzeczywistych, ta zaś podgrupę grupy przekształceń afinicznych rzeczywistych.

Ponieważ przy *rzeczywistych* przekształceniach izometrycznych, podobieństwach lub przekształceniach afinicznych przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ przestrzeń C_n przechodzi na siebie, więc rzeczywiste geometrie: metryczna, podobieństw i afiniczna przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, obejmują w szczególności odpowiednie geometrie przestrzeni C_n.

Podobnie jak w przestrzeniach rzeczywistych (ob. Nr 60), tak i w przestrzeni zespolonej przekształcenie afiniczne zespolone możemy zawsze interpretować jako przejście do innego układu spółrzędnych, tzw. *ukośnokątnego układu zespolonego*.

Pojęcie *granicy* w swej postaci arytmetycznej (wzór (14) z Nr 52) przenosi się bez zmiany na przestrzeń $\mathfrak{C}_n$.

Tym samym zdefiniowana jest grupa homeomorfizmów przekształcających przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ na siebie, zawierająca w szczególności jako podgrupę grupę wszystkich przekształceń afinicznych.

Teoria niezmienników grupy homeomorfizmów nazywa się *topologią przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$.

Dla przekształceń afinicznych udowodnimy twierdzenie, które odda nam podobne usługi, jak twierdzenie z Nr 9 w przestrzeniach C_n:

Twierdzenie. *Jeżeli* $c_i=(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n})$, *gdzie* $i=0, 1, \ldots, k$, *są punktami przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$, *przy czym macierz*

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,n} \\ 1 & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & c_{k,1} & c_{k,2} & \cdots & c_{k,n} \end{pmatrix}$$

ma rząd równy $k+1$, *to istnieje takie przekształcenie afiniczne* (*zespolone*) f *przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$ *na siebie, że* $f(v_i)=c_i$, *gdzie* $v_i=(\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i)$ *dla* $i=1, 2, \ldots, k$.

Dowód. Ponieważ permutacja spółrzędnych jest oczywiście przekształceniem afinicznym, więc możemy założyć, że:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & c_{0,1} & c_{0,2} \cdots c_{0,k} \\ 1 & c_{1,1} & c_{1,2} \cdots c_{1,k} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & c_{k,1} & c_{k,2} \cdots c_{k,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1}-c_{0,1} & c_{1,2}-c_{0,2} \cdots c_{1,k}-c_{0,k} \\ c_{2,1}-c_{0,1} & c_{2,2}-c_{0,2} \cdots c_{2,k}-c_{0,k} \\ \cdots & \cdots \\ c_{k,1}-c_{0,1} & c_{k,2}-c_{0,2} \cdots c_{k,k}-c_{0,k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Niech

$$c_{i,j}=c_{0,j}+\delta_j^i \text{ dla } i=k+1, k+2, \ldots, n, \text{ oraz } j=1, 2, \ldots, n.$$

Weźmy pod uwagę przekształcenie:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)=(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n),$$

określone przez wzory:

$$(4)\qquad \bar{z}_j=c_{0,j}+\sum_{\nu=1}^{n}(c_{\nu,j}-c_{0,j})\cdot z_\nu \text{ dla } j=1, 2, \ldots, n.$$

Dla $i=0, 1, \ldots, k$ mamy wówczas:

$$f(v_i)=f(\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i)=(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n})=c_i,$$

ponieważ

$$c_{i,j}=c_{0,j}+\sum_{\nu=1}^{n}(c_{\nu,j}-c_{0,j})\cdot\delta_\nu^i, \text{ dla } i=0, 1, \ldots, n \text{ oraz } j=1, 2, \ldots, n.$$

Pozostaje więc okazać, że wyznacznik spółczynników ze wzorów (4) jest różny od zera. Wyznacznik ten ma postać:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}-c_{0,1} & c_{2,1}-c_{0,1} & \cdots & c_{n,1}-c_{0,1} \\ c_{1,2}-c_{0,2} & c_{2,2}-c_{0,2} & \cdots & c_{n,2}-c_{0,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1,n}-c_{0,n} & c_{2,n}-c_{0,n} & \cdots & c_{n,n}-c_{0,n} \end{vmatrix}$$

Lecz dla $i>k$ jest $c_{i,j}-c_{0,j}=\delta_j^i$, a więc w ostatnich $n-k$ kolumnach wyrazy na głównej przekątnej są jedynkami, pozostałe zaś zerami.

Wynika stąd, że wyznacznik ten jest równy wyznacznikowi (3), a więc jest różny od zera, co było właśnie do okazania.

ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni $\mathfrak{C}_1$ dane są dwa punkty (z_1) i (z_2). Kiedy istnieje przekształcenie afiniczne o spółczynnikach rzeczywistych, przy którym z_1 przejdzie na z_2?

2. Na płaszczyźnie zespolonej $\mathfrak{C}_2$ dane są dwie pary różnych punktów z_1, z_2 i z_3, z_4 oraz takie przekształcenia afiniczne o spółczynnikach rzeczywistych f_1 i f_2, że $f_1(z_1)=z_3$ i $f_2(z_2)=z_4$. Czy istnieje takie przekształcenie afiniczne f o spółczynnikach rzeczywistych, że $f(z)_1=z_3$ i $f(z_2)=z_4$?

3. Podać przykład przekształcenia izometrycznego płaszczyzny $\mathfrak{C}_2$, dla którego żaden ze spółczynników $a_{i,j}$ nie jest rzeczywisty. Zbadać, czy własności macierzy ortogonalnej, dowiedzione w Nr 59, zachowują się, gdy wyrazy jej są liczbami zespolonymi.

122. Pojęcia afiniczne w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. Znaczna część pojęć i wyników, podanych dla przestrzeni rzeczywistych w części I i II tej książki, przenosi się bez zmiany na przestrzenie zespolone.

Tę możność rozciągania rozważań na dziedzinę zespoloną zaznaczaliśmy tam literą »z» umieszczoną przy Nr definicji lub twierdzeniu.

Zestawmy obecnie te, które potrzebne nam będą w dalszym ciągu. Należą do nich podane w Nr 7 definicje działań na punktach przestrzeni, jak również prawa formalne, którym działania te podlegają. Podane w Nr 10 przedstawienie analityczne punktów prostej L, przechodzącej przez dwa różne punkty a i b, w postaci $p(t)=t\cdot a+(1-t)\cdot b$, przyjmiemy obecnie za definicję *prostej* (*zespolonej*) w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ z tym, że zakres zmienności parametru t zostanie teraz rozszerzony na zbiór wszystkich liczb zespolonych. Bez zmiany też przenosi się wprowadzone w Nr 10 pojęcie stosunku pojedynczego podziału oraz arytmetyczne określenie środka pary punktów a i b jako punktu $\dfrac{a+b}{2}$.

Zauważmy, że — podobnie jak w dziedzinie rzeczywistej — jeśli t_1 i t_2 są różnymi liczbami (zespolonymi), to odpowiednie punkty $p(t_1)$ i $p(t_2)$ prostej L są różne, przy czym prosta L' przechodząca przez nie jest identyczna z L. Istotnie, punkty prostej L' są postaci:

$$t\cdot[t_1\cdot a+(1-t_1)\cdot b]+(1-t)\cdot[t_2\cdot a+(1-t_2)\cdot b]=$$
$$=[t\cdot t_1+(1-t)\cdot t_2]\cdot a+[1-t\cdot t_1-(1-t)\cdot t_2]\cdot b,$$

a więc należą do L, przy czym spółczynnik $\lambda=t\cdot t_1+(1-t)\cdot t_2$ przybiera przy zmiennym t każdą wartość zespoloną.

A więc *przez każde dwa różne punkty przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$ *przechodzi dokładnie jedna prosta* (*zespolona*).

Dowód (z Nr 59), że tak wprowadzone pojęcie prostej jest niezmiennikiem afinicznym, czyli że *przekształcenia afiniczne są kolineacjami*, przenosi się bez zmiany na przypadek przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ i na przekształcenia afiniczne o dowolnych spółczynnikach zespolonych.

Dotyczy to również pojęcia stosunku pojedynczego podziału oraz pojęcia środka pary punktów.

Mając określone proste w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, możemy na przestrzeń tę przenieść definicje *zbiorów liniowych*, *złączów* oraz *liniowej zależności i niezależności punktów* (z Nr 16 i 17).

Przenosi się również bez zmiany twierdzenie z Nr 16 orzekające, że *punkty złącza punktów* $p_0, p_1, \ldots, p_k$, *są identyczne z punktami postaci*

$$t_0 \cdot p_0 + t_1 \cdot p_1 + \ldots + t_k \cdot p_k, \quad \text{gdzie } t_0 + t_1 + \ldots + t_k = 1,$$

gdyż dowód tego twierdzenia opierał się jedynie na formalnych prawach działań arytmetycznych, tych samych w dziedzinie liczb rzeczywistych, co i w dziedzinie liczb zespolonych. Parametry t_i będą jednak teraz przebiegać wartości zespolone. Wynika stąd dalej, że *arytmetyczna charakteryzacja liniowej niezależności punktów*, dana przez twierdzenie z Nr 17, pozostaje prawdziwa również w dziedzinie zespolonej. Wszystkie te pojęcia jako oparte na pojęciu prostej są niezmiennikami przekształceń afinicznych zespolonych.

Bez zmiany przenosi się na dziedzinę zespoloną (z Nr 12, 13 i 14) pojęcie *wektora* jako pary uporządkowanej punktów, arytmetyczne definicje *równości wektorów*, *wektora swobodnego*, *działań na wektorach swobodnych* (dodawania, odejmowania i mnożenia przez liczbę) oraz pojęcie *równoległości wektorów* i ich *kierunku* (ale nie ich zwrotu!). Zachowujemy też znakowanie przyjęte dla wektorów w dziedzinie rzeczywistej.

Wektory leżące na jednej prostej są równoległe; ich kierunek nazywa się *kierunkiem* tej *prostej*. Podobnie jak w dziedzinie rzeczywistej, tak i w zespolonej prosta przechodząca przez punkt a i posiadająca kierunek wektora $\mathfrak{a} \neq 0$ jest identyczna ze zbiorem punktów p postaci $a + \lambda \cdot \mathfrak{a}$, gdzie parametr λ przebiega wszystkie wartości zespolone.

Bez zmiany przenosi się również pojęcie *liniowej niezależności wektorów* i jego związek z liniową niezależnością punktów (z Nr 18) oraz twierdzenia z Nr 20, dotyczące algebraicznego wyznaczania maksymalnej liczby liniowo niezależnych wektorów i punktów. Wszędzie przy tym mamy tam do czynienia z niezmiennikami dowolnych przekształceń afinicznych.

Natomiast traci swój sens pojęcie orientacji układu wektorów liniowo niezależnych, gdyż opierało się ono na znaku wyznacznika, którego wartością może być obecnie dowolna liczba zespolona.

Hiperpłaszczyznę k-wymiarową w przestrzeni C_n określiliśmy (Nr 10) jako zbiór izometryczny z przestrzenią C_k. Później okazało się (w Nr 59), że pojęcie to jest niezmiennikiem afinicznym. W przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ definicję *hiperpłaszczyzny k-wymiarowej (zespolonej)* przyjmiemy od razu w postaci afinicznej. Powiemy mianowicie, że jest to zbiór liniowy zawierający $k+1$, ale nie więcej, punktów liniowo niezależnych.

Jasne jest, że jednowymiarowe hiperpłaszczyzny są identyczne z prostymi (zespolonymi). Zauważmy, że w szczególności k-wymiarową hiperpłaszczyzną jest zbiór $\mathfrak{C}_{n,k}$, określony dla każdego naturalnego $k \leq n$ (podobnie jak w przypadku rzeczywistym zbiór $C_{n,k}$) jako zbiór wszystkich punktów postaci $(z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$. Jeśli $\mathfrak{H}$ jest hiperpłaszczyzną k-wymiarową (zespoloną) leżącą w $\mathfrak{C}_n$, to istnieje liniowo niezależny układ punktów $c_0, c_1, \ldots, c_k \,\varepsilon\, \mathfrak{H}$ taki, że $\mathfrak{H}$ jest ich złączem. Wobec twierdzenia z Nr 121 istnieje takie przekształcenie afiniczne f przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ na siebie, że $f(v_i) = c_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$. Ponieważ $\mathfrak{C}_{n,k}$ jest złączem punktów $v_0, v_1, \ldots, v_k$, więc wynika stąd, że f przekształca $\mathfrak{C}_{n,k}$ na $\mathfrak{H}$.

W ten sposób widzimy, że k-wymiarowa hiperpłaszczyzna nie różni się afinicznie od hiperpłaszczyzny $\mathfrak{C}_{n,k}$, a więc, *z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej, k-wymiarowe hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ nie różnią się między sobą.*

Inaczej przedstawia się sprawa z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej, a więc również z punktu widzenia rzeczywistej geometrii metrycznej. Istotnie, jasne jest, że np. prosta L, wyznaczona w płaszczyźnie $\mathfrak{C}_2$ przez punkty $(0, 0)$ i $(1, i)$, zawiera tylko jeden punkt rzeczywisty $(0, 0)$, skąd wynika, że żadne przekształcenie afiniczne o spółczynnikach rzeczywistych nie może jej przekształcić na prostą L' wyznaczoną przez punkty $(0, 0)$ i $(0, 1)$, która zawiera nieskończenie wiele punktów rzeczywistych.

Przeniesienie w dziedzinę zespoloną pojęcia hiperpłaszczyzny oraz pojęcia liniowej niezależności pozwala w konsekwencji rozciągnąć na tę dziedzinę twierdzenie z Nr 23. A więc $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ są identyczne ze zbiorami takich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_n$, które spełniają równania postaci

$$(5) \qquad A_0 + A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \ldots + A_n \cdot x_n = 0,$$

gdzie nie wszystkie spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (będące na ogół liczbami zespolonymi) znikają. Znaczy to, że *$(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ są identyczne z tworami stopnia pierwszego*, przy czym równanie (5) hiperpłaszczyzny jest przez nią wyznaczone z dokładnością do czynnika liczbowego (zespolonego).

W szczególności równanie hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej, przechodzącej przez liniowo niezależne punkty $a_i=(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, gdzie $i=1, 2, \ldots, n$, daje się napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}=0.$$

Bez zmiany przenoszą się na przypadek zespolony pojęcia (o charakterze afinicznym) równoległości wektora do hiperpłaszczyzny (z Nr 24) oraz hiperpłaszczyzn równoległych (z Nr 31). W szczególności widzimy, że również w dziedzinie zespolonej równoległość hiperpłaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych o równaniach:

$$A_0+A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+\ldots+A_n\cdot x_n=0, \quad B_0+B_1\cdot x_1+B_2\cdot x_2+\ldots+B_n\cdot x_n=0$$

równoważna jest równoległości wektorów

$$[A_1, A_2, \ldots, A_n], \quad [B_1, B_2, \ldots, B_n]$$

czyli proporcjonalności ich spółrzędnych.

ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni $\mathfrak{C}_1$ znaleźć punkt przecięcia płaszczyzny, przechodzącej przez punkty:

$$(1, i, 1+i), \quad (0, 1-i, 2-i), \quad (2+i, 1+i, 3),$$

z prostą przechodzącą przez punkty:

$$(1+3i, 0, 1), \quad (0, 2-i, 1+5i).$$

2. Czy w przestrzeni $\mathfrak{C}_2$ istnieją proste nie zawierające punktów rzeczywistych? Czy w przestrzeni $\mathfrak{C}_3$ istnieją płaszczyzny zawierające dokładnie jeden punkt rzeczywisty oraz takie, które punktów rzeczywistych w ogóle nie zawierają?

123. Pojęcia metryczne w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. W Nr 122 przenieśliśmy szereg pojęć o charakterze afinicznym na przestrzenie zespolone $\mathfrak{C}_n$. Okazało się przy tym, że po tym przeniesieniu zachowały one charakter niezmienniczy i to względem ogólnych przekształceń afinicznych. Obecnie zajmiemy się przeniesieniem niektórych pojęć o charakterze metrycznym. Najważniejsze z nich jest pojęcie iloczynu skalarnego dwu wektorów $\mathfrak{a}=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ i $\mathfrak{b}=[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, który określamy tak jak w Nr 15, wzorem

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_i.$$

Nie trudno byłoby podany tam dowód niezmienniczości tego iloczynu względem przekształceń izometrycznych przenieść na przypadek zespolony. Pójdziemy tutaj jednak nieco inną drogą, mianowicie udowodnimy niezmienniczość iloczynu skalarnego względem przekształceń izometrycznych zespolonych czysto arytmetycznie.

Rozpatrzmy ogólniej przekształcenie $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)=(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$, będące podobieństwem przekształcającym przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ na siebie i określonym przez wzory:

$$z'_j=a_{0,j}+\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\cdot z_i.$$

Wówczas wektor $\mathfrak{a}$ przejdzie na wektor $\mathfrak{a}'=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, a $\mathfrak{b}$ na $\mathfrak{b}'=(\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n)$, gdzie

$$\alpha'_j=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu,j}\cdot\alpha_\mu, \qquad \beta'_j=\sum_{\nu=1}^{n}b_{\nu,j}\cdot\beta_\nu.$$

Stąd:

$$\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}'=\sum_{j=1}^{n}\alpha'_j\cdot\beta'_j=\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu,j}\cdot\alpha_\mu\Big)\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu,j}\cdot\beta_\nu\Big)\Big]=$$
$$=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\alpha_\mu\cdot\beta_\nu\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{\mu,j}\cdot a_{\nu,j}\Big)\Big]$$

Z uwagi jednak na to, że f jest podobieństwem, istnieje stała $c\neq 0$ taka, że

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\mu,j}\cdot a_{\nu,j}=c\cdot\delta_\nu^\mu,$$

skąd wynika, że

$$\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}'=\sum_{\nu=1}^{n}c\cdot\alpha_\nu\cdot\beta_\nu=c\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}. \tag{6}$$

W szczególności, jeżeli f jest izometrią, to $c=1$ i mamy $\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}'=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, co było do udowodnienia.

Otrzymana w Nr 15 zależność między wektorami $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ a cosinusem kąta θ, zawartego między nimi, którą możemy napisać w postaci

$$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2=\mathfrak{a}^2\cdot\mathfrak{b}^2\cdot\cos^2\theta,$$

może być obecnie przyjęta za punkt wyjścia określenia kąta θ między wektorami $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ przy założeniu, że $\mathfrak{a}^2\neq 0\neq\mathfrak{b}^2$.

W szczególności wektory $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nazywamy *prostopadłymi* czyli *ortogonalnymi* (nawet gdy warunek $\mathfrak{a}^2\neq 0\neq\mathfrak{b}^2$ nie jest spełniony), jeżeli $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=0$.

Prostopadłość wektorów jest własnością ich kierunku (gdyż wektory równoległe do prostopadłych są prostopadłe) i jest przy tym wobec wzoru (6) niezmiennikiem podobieństw, a więc w szczególności niezmiennikiem izometrii. Pojęcie prostopadłości pozwala nam bez zmiany przenieść na przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ definicję prostopadłości wektora do hiperpłaszczyzny (z Nr 24), przy czym przenosi się również i twierdzenie, orzekające, że *jedynym kierunkiem prostopadłym do $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny określonej w $\mathfrak{C}_n$ przez równanie*

$$A_0+A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+\ldots+A_n\cdot x_n=0$$

jest kierunek wektora $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

Przenosząc wreszcie na przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ pojęcie symetrii (z Nr 29), powiemy, że *dwa punkty p i p^* są symetryczne względem hiperpłaszczyzny* $\mathfrak{H}$, jeśli środek $p'=\dfrac{p+p^*}{2}$ pary punktów p i p^* należy do $\mathfrak{H}$ oraz wektor $\overrightarrow{[pp^*]}$ jest do $\mathfrak{H}$ prostopadły.

Tak np. punkty: $(z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ i $(z_1, z_2, \ldots, z_k, -z_{k+1}, \ldots \ldots, -z_n)$ są symetryczne względem hiperpłaszczyzny $\mathfrak{C}_{n,k}$.

O punkcie p^* mówimy, że jest *symetryczny do p względem hiperpłaszczyzny* $\mathfrak{H}$.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do przypadku rzeczywistego, *nie dla każdego punktu $p \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_n$ istnieje punkt symetryczny do p względem danej hiperpłaszczyzny* $\mathfrak{H}$. Np. w płaszczyźnie $\mathfrak{C}_2$ do punktu $p=(1, 1)$ nie istnieje punkt symetryczny względem prostej L o równaniu $x_1+i\cdot x_2=0$. Istotnie, dla punktu symetrycznego p^* wektor $\overrightarrow{[p, p^*]}$ musiałby mieć kierunek $[1, i]$, a więc byłoby dla pewnego $t=\alpha+i\cdot\beta$

$$p^*=p+t\cdot[1, i]=(1+\alpha+i\cdot\beta,\ 1-\beta+i\cdot\alpha).$$

Wówczas $p'=\dfrac{p+p^*}{2}=\left(1+\dfrac{\alpha}{2}+i\cdot\dfrac{\beta}{2},\ 1-\dfrac{\beta}{2}+i\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Podstawiając spółrzędne punktu p' do lewej strony równania prostej L, otrzymujemy $1+\dfrac{\alpha}{2}+i\cdot\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\alpha}{2}+\left(1-\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot i\neq 0$, wbrew przynależności p' do L. To nieistnienie punktu symetrycznego wiąże się, jak łatwo zauważyć, z tym, że kwadrat każdego wektora prostopadłego do prostej o równaniu $x_1+ix_2=0$ jest równy zeru. Z wektorami o tej własności będziemy jeszcze mieli do czynienia w Nr 126.

Definicja hiperpłaszczyzny symetrii danego zbioru $A\subset\mathfrak{C}_n$ nie różni się od definicji z Nr 29.

Będziemy mówili, że *zbiór A jest symetryczny względem* $\mathfrak{H}$, jeżeli dla każdego punktu $p \,\varepsilon\, A$ zbiór A zawiera również punkt p^* symetryczny do p względem $\mathfrak{H}$.

W szczególności, jeżeli $\mathfrak{H}$ ma wymiar 0, czyli redukuje się do jednego punktu, mówimy, że punkt ten jest *środkiem symetrii zbioru A*.

Pojęcia te są niezmiennikami dowolnych izometrii, a nawet ogólniej — niezmiennikami podobieństw.

Jakkolwiek nie wprowadzamy pojęcia odległości w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, to jednak, podobnie jak w przestrzeni C_n, oznaczać będziemy dla każdej pary punktów:

$$p=(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad q=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ przez $\varrho^2(p, q)$ liczbę $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$, nie nadając jej jednak sensu kwadratu odległości.

Liczba ϱ^2 jest niezmiennnikiem dowolnych izometrii. Jeżeli bowiem $p'=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ jest izometrią określoną przez wzory $x_i'=a_{i,0}+a_{i,1}\cdot x_1+\ldots+a_{i,n}\cdot x_n$, gdzie macierz $(a_{i,j})$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ jest ortogonalna, to:

$$\varrho^2(p', q')=\sum_{i=1}^{n}(x_i'-y_i')^2=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\cdot(x_j-y_j)\Big]\cdot\Big[\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot(x_k-y_k)\Big]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}a_{i,j}\cdot a_{i,k}\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_k-y_k)=\sum_{j,k=1}^{n}(x_j-y_j)\cdot(x_k-y_k)\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\cdot a_{i,k}=$$
$$=\sum_{j,k=1}^{n}(x_j-y_j)\cdot(x_k-y_k)\cdot\delta_j^k=\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2=\varrho^2(p, q).$$

ĆWICZENIA. 1. W płaszczyźnie $\mathfrak{C}_2$ dana jest prosta (zespolona) $\mathfrak{L}$ przez równanie $A_0+A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2=0$. Jaki warunek muszą spełniać spółczynniki A_1 i A_2, aby istniało przekształcenie f płaszczyzny $\mathfrak{C}_2$ na siebie, przy którym punkty p i $f(p)$ są zawsze symetryczne względem $\mathfrak{L}$? Znaleźć analityczną postać przekształcenia f (jeśli ono istnieje).

2. Określając iloczyn wektorialny wektorów $\mathfrak{a}=[a_1, a_2, a_3]$ i $\mathfrak{b}=[b_1, b_2, b_3]$ przestrzeni $\mathfrak{C}_3$ wzorem (5) z Nr 25, zbadać, które z jego własności zachowują się w dziedzinie zespolonej. Czy tak określone mnożenie wektorialne jest operacją niezmienniczą względem izometrii?

3. Czy w każdej płaszczyźnie przestrzeni $\mathfrak{C}_3$ istnieje taka para wektorów $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, że $\mathfrak{a}^2\neq 0=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\neq\mathfrak{b}^2$?

124. Geometria przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Przenosząc arytmetyczną definicję przekształceń rzutowych (z Nr 84 i 97) na przestrzeń $\mathfrak{P}_n$, nazywamy przekształcenie $f(\{z_0, z_1, \dots, z_n\})=\{z'_0, z'_1, \dots, z'_n\}$ *rzutowym*, jeżeli dane jest ono przez wzory:

$$z'_j=a_{0,j}\cdot z_0+a_{1,j}\cdot z_1+\dots+a_{n,j}\cdot z_n,$$

gdzie spółczynniki $a_{i,j}$ są stałe, a ich wyznacznik $|a_{i,j}|$ $(i, j=0, 1, 2, \dots, n)$ jest różny od zera; warunek ten zapewnia wzajemną jednoznaczność przekształcenia.

Jeśli ograniczać się będziemy do przekształceń, których wszystkie spółczynniki $a_{i,j}$ są rzeczywiste, to będziemy mieli do czynienia z *grupą przekształceń rzutowych rzeczywistych* w dawnym sensie — z tym, że obecnie stosujemy je do przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

Przy tych przekształceniach przestrzeń P_n przechodzi na siebie tak, że otrzymana na ich podstawie teoria niezmienników obejmuje geometrię przestrzeni P_n.

Teorię tę nazywać będziemy *geometrią rzutową rzeczywistą* przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

Obszerniejszą *grupę przekształceń rzutowych zespolonych* otrzymamy, biorąc pod uwagę wszystkie przekształcenia rzutowe przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ o dowolnych spółczynnikach zespolonych. Będzie ona miała dla nas znaczenie przede wszystkim dlatego, że pojęcia geometryczne, którymi będziemy się posługiwali, przeważnie należą do jej zakresu.

Teorię niezmienników tej grupy będziemy nazywać *geometrią rzutową zespoloną przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$.

Podobnie jak w przestrzeniach P_n (ob. Nr 99), ogólne przekształcenie rzutowe zawsze możemy interpretować jako wprowadzenie nowego układu spółrzędnych, tzw. *spółrzędnych rzutowych zespolonych*.

Punkt $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, dla którego $z_0\neq 0$, nazywać będziemy (podobnie jak w przestrzeniach rzeczywistych) *właściwym*, identyfikując go z punktem $\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$ przestrzeni $\mathfrak{C}_n$.

W tym sensie przestrzeń $\mathfrak{C}_n$ stanowi podzbiór przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Punkty przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ nie należące do $\mathfrak{C}_n$, a więc punkty postaci $\{0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ nazywają się *niewłaściwymi*.

Przenosząc rozważania z Nr 84, stwierdzamy, że *każde przekształcenie afiniczne (w szczególności zaś każdą izometrię) przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$ *uważać można za pewne przekształcenie rzutowe przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$, przy którym punkty właściwe przechodzą na właściwe, a niewłaściwe na niewłaściwe. W szczególności więc grupę izometrii uważać można za podgrupę grupy przekształceń rzutowych. Wynika stąd, że *zarówno geometrię afiniczną przestrzeni* $\mathfrak{C}_n$ (*rzeczywistą i zespoloną*) *jak i geometrię metryczną* (*rzeczywistą i zespoloną*) *uprawiać można na gruncie przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$.

Pojęcie *granicy*, wprowadzone w Nr 100 dla przestrzeni P_n, przenosi się bez zmiany na przestrzeń $\mathfrak{P}_n$, przy czym przenosi się również twierdzenie o niezmienniczości rzutowej tego pojęcia. Wraz z pojęciem granicy przenosi się pojęcie homeomorfizmu. Grupa homeomorfizmów obejmuje w szczególności grupę ogólnych przekształceń rzutowych.

Teoria niezmienników homeomorfizmów nazywa się *topologią przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$.

Dla przekształceń rzutowych przestrzeni P_n na siebie w Nr 89 mieliśmy twierdzenie, które daje się w postaci arytmetycznej wypowiedzieć jak następuje:

Twierdzenie. *Niech* $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ *i* $b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ *będą układami punktów n-wymiarowej przestrzeni rzutowej, gdzie*

$$a_i=\{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\} \text{ i } b_i=\{b_{i,0}, b_{i,1}, \dots, b_{i,n}\} \text{ dla } i=0, 1, \dots, n, n+1.$$

Jeżeli w każdej z macierzy

$$\begin{matrix} & (a_{i,j})\ (i=0, 1, \dots, n,n+1\,;\ j=0, 1, \dots, n) \\ i & \\ & (b_{i,j})\ (i=0, 1, \dots, n,n+1\,;\ j=0, 1, \dots, n) \end{matrix}$$

każdy z minorów stopnia $n+1$ *jest różny od zera, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie rzutowe f takie, że* $f(a_i)=b_i$ *dla* $i=0, 1, \dots, n, n+1$.

Dowód tego twierdzenia (przytoczonego tu w nieistotnie tylko zmienionym sformułowaniu) oparty był w Nr 89 jedynie na formalnych prawach działań. Ponieważ prawa te nie ulegają zmianie przy przejściu do dziedziny zespolonej, więc twierdzenie pozostanie prawdziwe, gdy od przestrzeni P_n przejdziemy do przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

ĆWICZENIE. Podać przekształcenie rzutowe płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ na siebie, przy którym punkty $\{3, 4, 5i\}$, $\{i, 0, 1\}$, $\{1, 2, 3\}$ $\{i, 1, 0\}$ przejdą odpowiednio na punkty $\{0, 1, 1+i\}$, $\{0, 1+i, 1-i\}$, $\{1, 0, 0\}$, $\{1, 1, 0\}$.

125. Proste i hiperpłaszczyzny w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Podstawowe dla przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest pojęcie *prostej*, którą definiujemy, przenosząc na dziedzinę zespoloną podaną w Nr 83 arytmetyczną charakteryzację prostej rzutowej w P_n, przechodzącej przez dwa różne punkty $a=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $b=\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$, jako zbioru L punktów postaci

$$p(\lambda, \mu)=\{\lambda\cdot a_0+\mu\cdot b_0, \lambda\cdot a_1+\mu\cdot b_1, \dots, \lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n\}$$

z tym, że teraz zarówno spółrzędne a_i oraz b_i, jak i wartości parametrów λ i μ (nie znikających jednocześnie) są zespolone.

Zauważmy, że — podobnie jak w dziedzinie rzeczywistej — jeśli jest $\{\lambda_1, \mu_1\}\neq\{\lambda_2, \mu_2\}$, to punkty $p_1=p(\lambda_1, \mu_1)$ i $p_2=p(\lambda_2, \mu_2)$ są różne, a prosta L', wyznaczona przez punkty p_1 i p_2, jest identyczna z prostą L. Istotnie, punkty prostej L' są postaci:

$$\{\alpha\cdot(\lambda_1\cdot a_0+\mu_1\cdot b_0)+\beta\cdot(\lambda_2\cdot a_0+\mu_2\cdot b_0),\ \alpha\cdot(\lambda_1\cdot a_1+\mu_1\cdot b_1)+\beta\cdot(\lambda_2\cdot a_1+\mu_2\cdot b_1),\dots$$
$$\dots,\alpha\cdot(\lambda_1\cdot a_n+\mu_1\cdot b_n)+\beta\cdot(\lambda_2\cdot a_n+\mu_2\cdot b_n)\}=\{(\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2)\cdot a_0+(\alpha\cdot\mu_1+\beta\cdot\mu_2)\cdot b_0,$$
$$(\alpha\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2)\cdot a_1+(\alpha\cdot\mu_1+\beta\cdot\lambda_2)\cdot b_1,\ \dots,\ (\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2)\cdot a_n+(\alpha\cdot\mu_1+\beta\cdot\mu_2)\cdot b_n\},$$

więc należą do L, a spółczynniki $\{(\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2),\ (\alpha\cdot\mu_1+\beta\cdot\mu_2)\}$ przebiegają przy zmiennym $\{\alpha, \beta\}$ wszystkie pary $\{\lambda, \mu\}$ liczb zespolonych nie znikających jednocześnie.

A więc *przez każde dwa różne punkty przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *przechodzi dokładnie jedna prosta rzutowa (zespolona).*

Wynika stąd, że *jeśli prosta zawiera dwa punkty niewłaściwe, to składa się wyłącznie z punktów niewłaściwych.*

Natomiast każda *prosta zawierająca co najmniej jeden punkt właściwy*, czyli tzw. *prosta właściwa, zawiera dokładnie jeden punkt niewłaściwy.* Istotnie, jeśli np. $a_0\neq 0$, to punkt $p(\lambda,\mu)$ jest niewłaściwy jedynie wtedy, gdy $\{\lambda,\mu\}=\{-b_0, a_0\}$. Jeżeli oba punkty a i b są właściwe — a wtedy możemy przyjąć, że $a_0=b_0=1$ — to $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Wówczas punkty właściwe prostej L są postaci $p(\lambda, \mu)$, gdzie $\lambda+\mu\neq 0$. Biorąc $t=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$, możemy im nadać postać $t\cdot a+(1-t)\cdot b$, a więc są one identyczne z punktami prostej w $\mathfrak{C}_n$ wyznaczonej przez a i b.

Punkt niewłaściwy prostej L ma postać $\{0, b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n\}$, czyli spółrzędne jego, prócz znikającej pierwszej, są proporcjonalne do składowych wektora $\overrightarrow{[ab]}$. Wynika stąd, że proste właściwe w $\mathfrak{P}_n$ są identyczne z prostymi przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, z których każda uzupełniona została przez jeden punkt niewłaściwy, wspólny wszystkim prostym równoległym, ale różny dla prostych nierównoległych.

W ten sposób przestrzeń $\mathfrak{P}_n$ daje się otrzymać z przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ zupełnie w podobny sposób jak przestrzeń P_n z przestrzeni C_n.

W szczególności wynika stąd, że *każde dwie różne proste płaszczyzny* $\mathfrak{P}_2$ *przecinają się dokładnie w jednym punkcie.*

Wprowadzone pojęcie prostej jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych zespolonych, czyli przekształcenia te są *kolineacjami.*

Dowód tego twierdzenia przebiega identycznie jak dowód z Nr 84 dla przypadku rzeczywistego.

Mając pojęcie prostej, przenosimy bez zmiany na grunt przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ pojęcie *podzbioru liniowego* i *złącza* (z Nr 86) wraz z arytmetyczną charakteryzacją jego punktów — tylko że obecnie wartości parametrów są zespolone — a następnie pojęcie *liniowej zależności i niezależności punktów* (z Nr 87), przy czym bez zmiany przenosi się na dziedzinę zespoloną twierdzenie o charakteryzacji niezależności liniowej przez rząd macierzy.

Pojęcie *k-wymiarowej hiperpłaszczyzny rzutowej zespolonej* wprowadzamy — podobnie jak w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ — definiując ją jako zbiór liniowy, zawierający $k+1$, ale nie więcej, punktów liniowo niezależnych. Wszystkie wnioski podane w Nr 87 przenoszą się teraz bez zmiany na przypadek rzutowy. Wnioskujemy dalej z uwagi na twierdzenie z Nr 124, że dla dowolnych dwóch k-wymiarowych hiperpłaszczyzn $\mathfrak{H}$ i $\mathfrak{H}'$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ istnieje takie przekształcenie rzutowe f przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie, że $f(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}'$. W szczególności istnieje przekształcenie rzutowe, przy którym k-wymiarowa hiperpłaszczyzna $\mathfrak{H}$ przejdzie na hiperpłaszczyznę $\mathfrak{P}_{n,k}$, będącą zbiorem punktów postaci

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\}\ \varepsilon\ \mathfrak{P}_n.$$

A więc *wszystkie k-wymiarowe hiperpłaszczyzny przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *są z punktu widzenia geometrii rzutowej zespolonej równoważne.*

Inaczej rzecz się przedstawia z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej, gdyż np. prosta rzutowa, wyznaczona w $\mathfrak{P}_2$ przez punkty $\{1, 0, 0\}$ i $\{0, 1, i\}$, zawiera tylko jeden punkt rzeczywisty, a więc nie daje się przez przekształcenie rzutowe o spółczynnikach rzeczywistych przekształcić na żadną prostą, wyznaczoną przez dwa punkty rzeczywiste.

Twierdzenie z Nr 88, o zależności między hiperpłaszczyznami w C_n a hiperpłaszczyznami w P_n, jak również oba poprzedzające je lematy przenoszą się bez zmiany na dziedzinę zespoloną. To samo dotyczy Nr 90.

A więc *hiperpłaszczyzny* $(n-1)$*-wymiarowe przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *są identyczne z tworami stopnia pierwszego*, przy czym równanie takiego tworu jest wyznaczone z dokładnością do czynnika liczbowego.

W szczególności równanie $x_0=0$ określa zbiór punktów niewłaściwych, zwany $(n-1)$*-wymiarową hiperpłaszczyzną niewłaściwą przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$.

Również postać wyznacznikowa równania $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny, wyznaczonej przez liniowo niezależny układ n punktów przestrzeni n-wymiarowej, stosuje się w dziedzinie zespolonej. Bez zmiany też przenoszą się wyniki Nr 91.

Pojęcie *stosunku anharmonicznego* czyli *dwustosunku*, określone w Nr 92, przenosi się bez zmiany na dziedzinę zespoloną, przy czym pamiętać należy, że również w dziedzinie zespolonej przyjmujemy istnienie dokładnie jednej liczby ∞ (zw. «nieskończonością»), którą uważamy za wartość ułamka mającego licznik różny od zera (zespolony), a mianownik równy zeru.

Liczbę ∞ intepretować można jako punkt niewłaściwy prostej zespolonej $\mathfrak{P}_1$. Własności rachunkowe dwustosunku oraz jego niezmienniczość względem przekształceń rzutowych przenoszą się bez zmiany na dziedzinę zespoloną.

Przenosi się także wprowadzone w Nr 94 pojęcie *pęku prostych*, jak również twierdzenie Pappusa i pojęcie *dwustosunku czwórki prostych pęku*.

Podobnie rzecz się ma z określonym w Nr 95 pojęciem czwórki harmonicznej wraz z jego własnościami.

W szczególności, podobnie jak w dziedzinie rzeczywistej, *punktem harmonicznie sprzężonym* z punktem niewłaściwym p względem pary punktów a i b jest środek q pary a i b.

Bez zmiany też przenosi się na przypadek zespolony wprowadzone w Nr 99 pojęcie *spółrzędnych rzutowych*, jak również wprowadzona w Nr 106 *zasada dwoistości* geometrii rzutowej.

ĆWICZENIA. 1. Podać w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ (gdzie $n>2$) przykład dwóch punktów takich, by prosta przez nie wyznaczona nie zawierała żadnego punktu rzeczywistego.

2. W płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ dane są punkty:

$$a=\{1, 0, 0\}, \quad b=\{0, 1, i\}, \quad c=\{1, i, -1\}.$$

Znaleźć punkt d taki, by czwórka a, b, c, d była harmoniczna.

3. Czy dla każdego przekształcenia rzutowego płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ na siebie istnieje punkt, który przechodzi sam na siebie?

126. Kierunki izotropowe. Wyniki Nr 125 okazują, że znaczna część pojęć i twierdzeń należących do geometrii przestrzeni rzeczywistych daje się przenieść na dziedzinę zespoloną dzięki identyczności praw formalnych, którym podlegają działania na liczbach rzeczywistych i na liczbach zespolonych. W końcu Nr 123 zauważyliśmy jednak pewne istotne różnice, pojawiające się wskutek występowania w dziedzinie zespolonej wektorów różnych od zera, lecz mających znikający kwadrat skalarny. Istnienie takich wektorów sprawia, że niektóre wzory geometrii przestrzeni rzeczywistych tracą swój sens w dziedzinie zespolonej, jak np. wyprowadzony w Nr 27 wzór (13) na odległość punktu od $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny lub też wyprowadzony w Nr 30 wzór (18) na odległość punktu od prostej.

Zauważmy, że jeżeli różny od zera wektor $\mathfrak{a}=[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ ma kwadrat znikający, to tę samą własność ma każdy wektor do niego równoległy.

A więc *znikanie kwadratu skalarnego jest własnością kierunku wektora* $\mathfrak{a}$, czyli — przechodząc do przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ — własnością punktu niewłaściwego prostych równoległych do $\mathfrak{a}$.

Kierunki czyli punkty niewłaściwe o tej własności nazywają się *izotropowymi*, *minimalnymi* lub *absolutnymi*.

Analitycznie punkt niewłaściwy $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (tj. kierunek) izotropowy scharakteryzowany jest przez warunek

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0. \tag{7}$$

Proste o kierunku izotropowym nazywamy *izotropowymi* lub *minimalnymi*.

Rozpatrzmy niektóre ich własności:

1° *W przestrzeni* $\mathfrak{P}_1$ *nie ma kierunków izotropowych*, gdyż kwadrat liczby zespolonej różnej od zera jest różny od zera.

2° *W przestrzeni* $\mathfrak{P}_2$ *istnieją dokładnie dwa kierunki izotropowe*: $\{0, 1, -i\}$ i $\{0, 1, i\}$, jeżeli bowiem $x_1^2+x_2^2=0$, gdzie x_1 i x_2 jednocześnie nie znikają, to $\dfrac{x_1}{x_2}=\pm i$.

3° *W przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$, *gdzie* $n>2$, *jest nieskończenie wiele kierunków izotropowych*. Istotnie, równanie $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0$ spełnione jest w każdym razie przez kierunki postaci $\{0, 1, \lambda, i\sqrt{1+\lambda^2}, 0, \ldots, 0\}$, różne dla różnych λ.

4° *Każdy kierunek izotropowy jest sam do siebie prostopadły.*

5° *Jeżeli p i q są dwoma punktami prostej izotropowej, to* $(p-q)^2=0$.

Zachodzi następujące

Twierdzenie. *Podobieństwa przekształcające przestrzeń* $\mathfrak{P}_n$ *na siebie dają się scharakteryzować jako przekształcenia rzutowe, przy których każdy kierunek izotropowy przechodzi na kierunek izotropowy.*

Dowód. Zauważmy, że dla $n\geqq 2$ istnieje n liniowo niezależnych kierunków izotropowych. Istotnie dla każdej pary k, l różnych spośród wskaźników $1, 2, \ldots, n$ oznaczmy przez $i_{k,l}$ kierunek $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, gdzie $x_k=1$, $x_l=i$, a pozostałe x_ν są równe zeru, przez $i'_{k,l}$ zaś taki kierunek $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, że $x_k=1$, $x_l=-i$, a $x_\nu=0$ dla pozostałych ν. Kierunki $i_{k,l}$ oraz $i'_{k,l}$ są izotropowe, przy czym $i'_{1,2}, i_{1,2}, i_{1,3}, \ldots, i_{1,n}$ są liniowo niezależne, gdyż wyznacznik stopnia n:

$$\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 & 0\ldots 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0\ldots 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 0\ldots 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & 0\ldots 0 & i \end{vmatrix} = 2\cdot i^{n-1}$$

jest różny od zera. Wynika stąd, że $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna niewłaściwa przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest wyznaczona przez zbiór kierunków izotropowych I_n. A więc przekształcenie rzutowe $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$, przy którym I_n przechodzi na siebie, przekształca hiperpłaszczyznę niewłaściwą na siebie, czyli jest afiniczne. Niech:

$$x_0'=x_0 \quad\text{oraz}\quad x_i'=\sum_{\nu=0}^{n} a_{i,\nu}\cdot x_\nu \quad\text{dla } i=1, 2, \ldots, n.$$

Wynika stąd, że:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'^2=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\mu=0}^{n} a_{i,\mu}\cdot x_\mu\Big)\cdot\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_{i,\nu}\cdot x_\nu\Big)=\sum_{\mu,\nu=0}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,\mu}\cdot a_{i,\nu}\Big)\cdot x_\mu\cdot x_\nu. \tag{8}$$

Ponieważ $f(I_n)=I_n$, więc podstawiając do (8) $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}=i_{k,l}$ oraz $i_{k,l}'$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2+2\cdot i\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\cdot a_{i,l}-\sum_{i=1}^{n} a_{i,l}^2=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2-2\cdot i\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\cdot a_{i,l}-\sum_{i=1}^{n} a_{i,l}^2=0,$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\cdot a_{i,l}=0 \quad\text{oraz}\quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2=\sum_{i=1}^{n} a_{i,l}^2 \quad\text{dla } k\neq l. \tag{9}$$

Oznaczmy przez c wspólną wartość sum $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,k}^2$. Gdyby było $c=0$, to z (8) wynikałoby, że dla każdego kierunku $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kierunek $\{0, x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ byłby izotropowy, co przeczy jednoznaczności przekształcenia f. A więc $c\neq 0$; wobec wzorów (9) przekształcenie f jest zatem podobieństwem.

Na odwrót, jeżeli f jest podobieństwem czyli jeżeli zachodzą zależności (9), to z (8) wynika, że $f(I_n)=I_n$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

W szczególności wynika z niego, że rzeczywiste podobieństwa przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, gdzie $n\geqq 2$, dają się scharakteryzować jako te rzeczywiste przekształcenia rzutowe f, dla których $f(I_n)=I_n$.

Zbiór I_n kierunków izotropowych przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ nazywa się często *tworem absolutnym* przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

Twór absolutny jest więc niezmiennikiem wszystkich podobieństw, przy czym jego niezmienniczość charakteryzuje podobieństwa wśród wszystkich przekształceń rzutowych.

Wynika stąd, że *wszelkie własności figury geometrycznej $F\subset\mathfrak{P}_n$, będące niezmiennikami podobieństw, dają się wyrazić jako własności rzutowe układu złożonego z figury F i z tworu absolutnego I_n*.

Istotnie, znajomość ogółu własności rzutowych układu (I_n, F) jest równoznaczna ze znajomością klasy K układów postaci $(\varphi(I_n), \varphi(F))$, gdzie φ przebiega wszelkie przekształcenia rzutowe przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie. Klasa K wyznacza jednak jednoznacznie swą podklasę, złożoną z tych wszystkich układów $(\varphi(I_n), \varphi(F))$, dla których $\varphi(I_n)=I_n$, czyli klasę układów postaci $(I_n, \varphi(F))$, gdzie φ jest podobieństwem. Klasa figur F' podobnych do F jest więc przez klasę K jednoznacznie wyznaczona, czyli ogół niezmienników podobieństw figury F jest wyznaczony przez ogół własności rzutowych układu (I_n, F).

Te ogólne rozważania zilustrujemy obecnie na przykładzie kąta między dwoma różnymi kierunkami rzeczywistymi $a=\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Możemy przyjąć, że $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2=1$. Oznaczając przez ϑ kąt zawarty między tymi kierunkami, mamy

$$\cos\vartheta=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i.$$

Prosta L (niewłaściwa), łącząca punkty a i b, jest identyczna ze zbiorem punktów postaci $\{0, \lambda\cdot a_1+\mu\cdot b_1, \lambda\cdot a_2+\mu\cdot b_2, \ldots, \lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n\}$, gdzie λ i μ nie znikają jednocześnie. Przecina ona twór absolutny I_n w punktach, które znajdujemy, rozwiązując równanie

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\cdot a_i+\mu\cdot b_i)^2=0 \quad\text{czyli}\quad \lambda^2+2\cdot\lambda\cdot\mu\cdot\cos\vartheta+\mu^2=0.$$

Ponieważ $1-\cos^2\vartheta\neq 0$ (bo punkty a i b są różne), więc ostatnie równanie wyznacza dwie różne wartości stosunku $\lambda:\mu$, a mianowicie

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}=-\cos\vartheta-i\cdot\sin\vartheta,\quad \frac{\lambda_2}{\mu^2}=-\cos\vartheta+i\cdot\sin\vartheta.$$

Oznaczmy przez i_1 punkt przecięcia L z I_n odpowiadający pierwszej z wartości stosunku $\lambda:\mu$, zaś przez i_2 punkt odpowiadający drugiej z tych wartości. Dwustosunek $(a, b; i_1, i_2)$ wyraża się wówczas (w myśl Nr 92) wzorem

$$(a, b; i_1, i_2)=\frac{\lambda_2\cdot\mu_1}{\lambda_1\cdot\mu_2}=\frac{-\cos\vartheta+i\cdot\sin\vartheta}{-\cos\vartheta-i\cdot\sin\vartheta}=$$
$$=\cos 2\cdot\vartheta-i\,\sin 2\cdot\vartheta=e^{-2i\vartheta}.$$

W ten sposób okazaliśmy, że kąt zawarty między kierunkami a i b wyraża się wzorem

$$e^{-2i\vartheta}=(a, b; i_1, i_2), \tag{10}$$

którego prawa strona jest niezmienniczą względem przekształceń rzutowych własnością zespołu punktów niewłaściwych a, b oraz tworu absolutnego I_n.

Wzór (10) nosi nazwę *wzoru Laguerre'a*[1].

W szczególności wynika z niego, że kierunki a i b są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta=\pm\frac{\pi}{2}$, czyli gdy lewa strona wzoru (10) równa jest -1.

A więc *kierunki a i b są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy dzielą one harmonicznie parę kierunków izotropowych i_1, i_2 leżących na prostej niewłaściwej L, łączącej a i b.*

Podobnie jak niezmienniczość tworu absolutnego wyznacza wśród przekształceń rzutowych grupę podobieństw, tak niezmienniczość jakiegokolwiek innego zbioru E punktów przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ wyznacza pewną podgrupę G przekształceń rzutowych. Teoria niezmienników takiej grupy przekształceń G stanowi pewną geometrię przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.

W szczególności na tej drodze dojść można do tzw. *geometrii nieeuklidesowych*.

W badaniach tych wzór Laguerre'a gra rolę istotną. Bliższe rozpatrzenie tych kwestii wykracza poza zakres tej książki; zapoznać się można z nimi w dziełach poświęconych specjalnie geometrii nieeuklidesowej[2].

ĆWICZENIA 1. Okazać, że podobieństwo rzeczywiste, przekształcające płaszczyznę $\mathfrak{P}_2$ na siebie, przekształca parę kierunków izotropowych na siebie w sposób tożsamościowy lub nie, zależnie od tego czy zachowuje orientację płaszczyzny C_2, czy zmienia ją na przeciwną.

2. Czy w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ istnieją dwa różne kierunki izotropowe prostopadłe do siebie? Czy istnieją trzy takie kierunki, parami do siebie prostopadłe?

---

[1] E. Laguerre, *Note sur la théorie des foyers*, Nouvelles Annales de Mathématiques. Tom 12, 1853, str. 64.

[2] Np. F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin 1928.

ROZDZIAŁ XVI.

Równania tworów algebraicznych w przestrzeniach zespolonych

127. Twory algebraiczne w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. Definicja tworu algebraicznego k-tego stopnia, podana w Nr 63 dla przestrzeni C_n, przenosi się bez zmiany na przypadek przestrzeni $\mathfrak{C}_n$. Z nią razem przenoszą się wszystkie udowodnione tam własności tworów algebraicznych, w szczególności niezmienniczość ich stopnia przy przekształceniach afinicznych, które obecnie mogą być zespolone, oraz wniosek dotyczący symetrii tworu algebraicznego, w którego równaniu pewne zmienne występują jedynie z wykładnikami parzystymi. Dowody w przypadku zespolonym nie różnią się niczym od dowodów w przypadku rzeczywistym, tak że powtarzanie ich jest zbyteczne.

Jeżeli twór k-tego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ ma równanie stopnia k o wszystkich spółczynnikach rzeczywistych, to mówić będziemy krótko, że *twór ten jest rzeczywisty*, co bynajmniej nie przesądza o rzeczywistości jego *punktów*.

Twór rzeczywisty może nawet wcale nie mieć punktów rzeczywistych, jak np. twór określony w płaszczyźnie $\mathfrak{C}_2$ przez równanie $x_1^2+x_2^2+1=0$.

ĆWICZENIE. Niech f będzie przekształceniem afinicznym płaszczyzny $\mathfrak{C}_2$ na siebie, przy którym obie proste izotropowe, przechodzące przez punkt $(0, 0)$, przejdą na proste o równaniach $x_1=0$ i $x_2=0$, zaś punkt $(1, 1)$ przejdzie na siebie. Znaleźć równanie tworu, na który f przekształca okrąg o równaniu $x_1^2+x_2^2-1=0$.

128. Twory algebraiczne w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Definicja tworu algebraicznego k-tego stopnia, podana w Nr 101 dla przestrzeni P_n, przenosi się bez zmiany na przypadek przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Z nią razem przenoszą się bez zmiany wszystkie udowodnione w Nr 101 własności tworów algebraicznych, w szczególności niezmienniczość rzutowa ich stopnia. Dowody w przypadku zespolonym nie różnią się od dowodów przeprowadzonych w przypadku rzeczywistym; możemy więc ich nie powtarzać.

W porównaniu z przypadkiem przestrzeni kartezjańskiej $\mathfrak{C}_n$ zachodzi jednak różnica istotna, polegająca na tym, że obecnie rozpatrujemy jedynie równania algebraiczne jednorodne. Jak zaznaczyliśmy w Nr 101, ograniczenie się w przestrzeni P_n do tych równań, jakkolwiek wygodne, nie było niezbędne. Okażemy obecnie, że w przypadku przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ ograniczenie się do równań jednorodnych wynika z samej natury rzeczy. Zaczniemy od dowodu dwóch następujących lematów:

Lemat 1. *Jeżeli wielomian* $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *znika dla każdego punktu* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \varepsilon P_n$, *to wszystkie jego spółczynniki są równe zeru.*

Dowód. W przypadku, gdy wielomian φ jest stopnia 0, czyli jest stałą, lemat staje się truizmem. Załóżmy więc, że stopień k wielomianu φ jest dodatni oraz że dla wielomianów stopnia mniejszego od k teza lematu jest prawdziwa. Wówczas φ jest stopnia dodatniego co najmniej względem jednej ze zmiennych $x_0, x_1, \ldots, x_n$, np. stopnia $l>0$ względem x_n. Możemy wówczas φ napisać w postaci:

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\nu=0}^{l} x_n^\nu \cdot \varphi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{1}$$

gdzie $\varphi_l(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $k-l$ względem zmiennych $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, w którym nie wszystkie spółczynniki znikają. Wobec założenia indukcyjnego istnieje więc w przestrzeni P_{n-1} punkt $\{x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0\}$ taki, że $\varphi_l(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)\neq 0$. Funkcja $f(x_n)=\varphi(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n)$ jest wówczas wielomianem stopnia $l>0$ względem zmiennej x_n, a więc posiadającym co najwyżej l pierwiastków. Istnieje zatem taka liczba rzeczywista x_n^0, że $f(x_n^0)=\varphi(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\neq 0$, co było do okazania.

Lemat 2. *Dla każdego wielomianu* $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *stopnia* $k>0$ *istnieje taki punkt* $\{x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0\} \varepsilon \mathfrak{P}_n$, *że* $\varphi(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)=0$.

Dowód. Podobnie jak przy dowodzie lematu 1 możemy założyć, że φ jest postaci (1), gdzie $l>0$ i gdzie nie wszystkie spółczynniki wielomianu $\varphi_l(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ znikają. Wobec lematu 1, istnieje punkt $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0) \varepsilon P_{n-1}$ taki, że $\varphi_l(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)\neq 0$. A więc $\varphi(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n)$ jest wielomianem stopnia $l>0$ względem zmiennej x_n. W myśl tzw. zasadniczego twierdzenia algebry[1] istnieje liczba zespolona x_n^0, że $\varphi(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)=0$, co właśnie było do udowodnienia.

Niech teraz $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ będzie wielomianem k-tego stopnia. Będziemy mówili, że *równanie*:

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0 \tag{2}$$

[1] Które orzeka, że każdy wielomian stopnia dodatniego posiada co najmniej jeden pierwiastek (zespolony). Zob. np. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*. Monografie Matematyczne XI, 1946, rozdz. VII, str. 100.

ma w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ *sens geometryczny*, gdy spełnienie tego równania przez układ liczb $x_0, x_1, \ldots, x_n$, nie wszystkich równych zeru, zależy jedynie od punktu $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \varepsilon \mathfrak{P}_n$, czyli gdy nie może się zdarzyć, by spośród dwóch układów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i $x_0', x_1', \ldots, x_n'$ proporcjonalnych, tj. takich, że $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$, jeden spełniał równanie (2), a drugi go nie spełniał.

Twierdzenie. *Równanie* (2) *ma w* $\mathfrak{P}_n$ *sens geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian* $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *jest jednorodny.*

Dowód. Jeżeli wielomian φ jest jednorodny stopnia k, to dla każdej liczby λ jest:

$$\varphi(\lambda\cdot x_0, \lambda\cdot x_1, \ldots, \lambda\cdot x_n)=\lambda^k\cdot\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

a więc równanie (2) ma sens geometryczny.

Jeżeli natomiast wielomian φ stopnia k nie jest jednorodny, to możemy go przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)+\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)+\ldots\\ \ldots+\varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n),\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $\varphi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jest dla $\nu=0, 1, \ldots, k$ wielomianem jednorodnym stopnia ν, przy czym nie wszystkie spółczynniki wielomianu φ_k znikają oraz istnieje $l<k$ takie, że również nie wszystkie spółczynniki wielomianu φ_l znikają. Twierdzę, że wówczas istnieje w przestrzeni P_n taki punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, dla którego

$$\varphi_k(c_0, c_1, \ldots, c_n)\neq 0\neq\varphi_l(c_0, c_1, \ldots, c_n). \tag{4}$$

Na mocy lematu 1 istnieją w P_n takie punkty $a=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ i $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$, że

$$\varphi_k(a_0, a_1, \ldots, a_n)\neq 0\neq\varphi_l(b_0, b_1, \ldots, b_n).$$

Jeżeli $a=b$, to punkt $c=a=b$ spełnia (4). Jeżeli zaś $a\neq b$, to kładąc $c_i(t)=t\cdot a_i+(1-t)\cdot b_i$ dla $i=0, 1, \ldots, n$ i rzeczywistych t, mamy:

$$c(t)=\{c_0(t), c_1(t), \ldots, c_n(t)\} \varepsilon P_n.$$

Wyrażenia:

$$\alpha(t)=\varphi_k\big(c_0(t), c_1(t), \ldots, c_n(t)\big) \quad \text{i} \quad \beta(t)=\varphi_l\big(c_0(t), c_1(t), \ldots, c_n(t)\big)$$

są wielomianami względem zmiennej t, przy czym:

$$\alpha(1)=\varphi_k(a_0, a_1, \ldots, a_n)\neq 0 \quad \text{i} \quad \beta(0)=\varphi_l(b_0, b_1, \ldots, b_n)\neq 0.$$

A więc istnieje co najwyżej skończona ilość wartości t, dla których znika $\alpha(t)$ lub $\beta(t)$.

Istnieje więc liczba rzeczywista t_0 taka, że $\alpha(t_0)\neq 0\neq\beta(t_0)$, a wówczas punkt $c=c(t_0)\;\varepsilon\;P_n$ spełnia warunek (4). Dla każdej liczby zespolonej λ mamy wówczas:

$$\varphi(\lambda\cdot c_0, \lambda\cdot c_1, \ldots, \lambda\cdot c_n)=\varphi_0(c_0, c_1, \ldots, c_n)+\lambda\cdot\varphi_1(c_0, c_1, \ldots, c_n)+\ldots$$
$$\ldots+\lambda^k\cdot\varphi_k(c_0, c_1, \ldots, c_n).$$

Wyrażenie to jest wielomianem k-tego stopnia względem λ, przy czym spółczynnik przy λ^l jest różny od zera. Wynika stąd, że wielomian ten ma co najmniej jeden pierwiastek $\lambda_0\neq 0$, a poza tym istnieje liczba $\lambda_1\neq 0$, dla której ma on wartość różną od zera. Więc:

$$\varphi(\lambda_0\cdot c_0, \lambda_0\cdot c_1, \ldots, \lambda_0\cdot c_n)=0,\quad \varphi(\lambda_1\cdot c_0, \lambda_1\cdot c_1, \ldots, \lambda_1\cdot c_n)\neq 0.$$

Wobec $\{\lambda_0\cdot c_0, \lambda_0\cdot c_1, \ldots, \lambda_0\cdot c_n\}=\{\lambda_1\cdot c_0, \lambda_1\cdot c_1, \ldots, \lambda_1\cdot c_n\}$ zależności te znaczą, że równanie (2) nie ma geometrycznego sensu, o dowód czego właśnie chodziło.

Tym samym ograniczenie się do równań jednorodnych, które ze względu na wygodę wprowadziliśmy już w przestrzeni P_n, znajduje w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ swe pełne uzasadnienie. W szczególności równanie tworu stopnia $k\leq 2$ ma postać:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0 \quad\text{lub krócej}\quad \sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0.$$

Zauważmy, iż bez szkody dla ogólności możemy przy tym założyć, że $A_{i,j}=A_{j,i}$ dla $i, j=0, 1, \ldots, n$, gdyż sumę wyrazów podobnych $A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$ i $A_{j,i}\cdot x_i\cdot x_j$ możemy zawsze zastąpić przez sumę dwóch równych składników postaci $\frac{1}{2}(A_{i,j}+A_{j,i})\cdot x_i\cdot x_j$. W przyszłości będziemy więc stale zakładali, że równanie tworu stopnia $k\leq 2$ jest dane w postaci:

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0,\quad\text{gdzie}\quad A_{i,j}=A_{j,i}. \tag{5}$$

Podobnie jak w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$, mówimy, że twór stopnia k przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest *rzeczywisty*, jeżeli posiada on równanie k-tego stopnia o wszystkich spółczynnikach rzeczywistych.

ĆWICZENIA. 1. Okazać, że suma tworu algebraicznego stopnia k i stopnia l w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest tworem algebraicznym stopnia $\leq k+l$. Pokazać na przykładach, że przy wszelkich naturalnych k i l może zajść zarówno przypadek, gdy stopień sumy jest mniejszy od $k+l$, jak przypadek, gdy jest on równy $k+l$.

2. Czy w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ (dla $n>1$) twór algebraiczny może składać się ze skończonej liczby punktów? Czy część wspólna dwóch tworów algebraicznych jest zawsze tworem algebraicznym?

129. Przecięcie tworu algebraicznego w $\mathfrak{P}_n$ hiperpłaszczyzną. Jednym z wyników Nr 101, który przenosi się na przestrzeń $\mathfrak{P}_n$, jest wniosek orzekający, że przecięcie tworu algebraicznego k-tego stopnia hiperpłaszczyzną rzutową H jest tworem algebraicznym co najwyżej k-tego stopnia względem H.

W przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ możemy otrzymać następujące nieco dokładniejsze

Twierdzenie. *Przecięcie $\mathfrak{B}$ tworu algebraicznego $\mathfrak{A}$ stopnia $k>0$ nie zawartą w nim hiperpłaszczyzną $\mathfrak{H}$, mającą wymiar $l>0$, jest w $\mathfrak{H}$ tworem algebraicznym stopnia k', gdzie $1\leq k'\leq k$.*

Dowód. Jak okazaliśmy w Nr 125, istnieje przekształcenie rzutowe φ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie, przy którym $\mathfrak{H}$ przechodzi na zbiór $\mathfrak{P}_{n,l}$ punktów postaci $\{x_1, x_2, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0\}$. Przy tym przekształceniu twór $\mathfrak{A}$ przejdzie na twór algebraiczny tego samego stopnia k. Wobec tego wystarczy dowód twierdzenia przeprowadzić w przypadku, gdy $\mathfrak{H}=\mathfrak{P}_{n,l}$. Jeżeli teraz $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0$ jest równaniem tworu $\mathfrak{A}$, to w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n,l}$, którą możemy identyfikować z $\mathfrak{P}_l$, równanie przecięcia $\mathfrak{B}$ ma postać $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0)=0$. Równanie to nie jest tożsamością, gdyż zakładamy, że $\mathfrak{H}$ nie zawiera się w $\mathfrak{A}$, zaś wobec lematu 2 z Nr 128 równanie to nie jest sprzeczne.

A więc jest to równanie stopnia dodatniego, nie większego od k. Określony przez nie zbiór $\mathfrak{B}$ jest zatem tworem stopnia k', gdzie $1\leq k'\leq k$, co było do udowodnienia.

Wniosek. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem algebraicznym w $\mathfrak{P}_n$ stopnia $k>0$, to każda prosta rzutowa nie zawarta w $\mathfrak{A}$ przecina $\mathfrak{A}$ co najmniej w jednym, a co najwyżej w k punktach.*

ĆWICZENIE. Sferę o równaniu $x_1^2+x_2^2+x_3^2-r^2\cdot x_0^2=0$ przecięto płaszczyzną o równaniu $A_0\cdot x_0+A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+A_3\cdot x_3=0$. Znaleźć punkty niewłaściwe przekroju. Czy zawsze one istnieją?

130. Hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowe zawarte w tworze algebraicznym przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Jeżeli twór algebraiczny $\mathfrak{A}$ stopnia $\leq k$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ zawiera pewną $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}$, to $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}+\mathfrak{A}'$, gdzie $\mathfrak{A}'$ jest pewnym tworem algebraicznym stopnia $\leq k-1$.*

Dowód. Możemy od razu założyć, że $\mathfrak{H}$ jest identyczne z $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną $\mathfrak{P}_{n,n-1}$ określoną przez równanie $x_n=0$, gdyż każdy przypadek daje się do tego sprowadzić przez uprzednie dokonanie odpowiedniego przekształcenia rzutowego przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie. Jeśli teraz równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma postać $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0$, to porządkując lewą jego stronę względem potęg x_n, możemy je napisać w postaci:

$$\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) + \sum_{\nu=1}^{k} x^\nu \cdot \varphi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0.$$

Znikanie jego lewej strony dla wszystkich punktów hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}$ znaczy więc, że $\varphi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ jest zerem dla każdego punktu $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \varepsilon \mathfrak{P}_{n-1}$, skąd wynika na mocy lematu 1 z Nr 128, że wszystkie spółczynniki wielomianu φ_0 znikają. Równanie tworu $\mathfrak{A}$ daje się zatem napisać w postaci:

$$x_n \cdot \sum_{\nu=1}^{k} x_n^{\nu-1} \cdot \varphi_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

czyli w postaci $x_n \cdot \varphi^*(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, gdzie φ^* jest wielomianem jednorodnym stopnia $k-1$. A więc $\mathfrak{A}$ jest sumą hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}$ oraz tworu $\mathfrak{A}^*$ określonego przez równanie $\varphi^*(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, mające stopień $k-1$.

Wniosek. *Twór stopnia co najwyżej drugiego w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, zawierający pewną $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę, jest sumą dwóch (niekoniecznie różnych) hiperpłaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych.*

W przypadku, gdy twór algebraiczny k-tego stopnia (w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$) jest sumą tworów algebraicznych stopnia mniejszego od k (w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$), będziemy mówili, że twór jest *rozkładalny*.

A więc ostatni wniosek daje się też wypowiedzieć jak następuje: *Aby twór stopnia drugiego w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ był rozkładalny, potrzeba i wystarcza, by zawierał hiperpłaszczyznę $(n-1)$-wymiarową.*

ĆWICZENIA. 1. Wywnioskować z ostatnich twierdzeń, że płaszczyzna przechodząca przez jedną z tworzących hiperboloidy jednopowłokowej zawiera zawsze jeszcze drugą tworzącą tej hiperboloidy.

2. Przez punkt $\{3, 2, 2, 1\}$ sfery $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ poprowadzić płaszczyznę przecinającą tę sferę wzdłuż dwóch prostych i znaleźć punkty niewłaściwe tych prostych.

131. Punkty niewłaściwe tworów algebraicznych. Przenosząc podaną w Nr 102 definicję na przypadek zespolony, nazywamy *punktem niewłaściwym* lub *kierunkiem asymptotycznym* tworu algebraicznego $\mathfrak{A}$ przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ każdy punkt niewłaściwy przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, będący granicą ciągu punktów należących do $\mathfrak{A}$.

Okazaliśmy (w Nr 102), że jeśli twór A jest określony w przestrzeni P_n, przez równanie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ stopnia k, to dołączając do A wszystkie jego punkty niewłaściwe, otrzymamy w P_n zbiór zamknięty $\bar{A}$, którego punkty spełniają równanie

(6) $$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

gdzie $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jest licznikiem funkcji wymiernej $\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ o mianowniku x_0^k, przy czym zbiór punktów właściwych, spełniających równanie (6), pokrywa się z A. Twierdzenie to (po zastąpieniu P_n przez $\mathfrak{P}_n$) przenosi się wraz z dowodem na dziedzinę zespoloną. W dziedzinie tej jednak będziemy mogli okazać więcej (co — jak zauważyliśmy w Nr 102 — nie jest prawdziwe w dziedzinie rzeczywistej), mianowicie że twór określony przez równanie (6) jest identyczny z tworem uzupełnionym przez jego punkty niewłaściwe. Zaczniemy od dowodu lematu następującego:

Lemat. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem algebraicznym w płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ oraz $p^0 \varepsilon \mathfrak{A}$, to istnieje ciąg punktów p^ν, należących do $\mathfrak{A}$ i różnych od p^0, zbieżny do p^0.*

Dowód. Wobec rzutowego charakteru twierdzenia, wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku, gdy $p^0 = \{1, 0, 0\}$. Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem stopnia zerowego, to $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_2$ i wówczas prawdziwość tezy lematu jest oczywista. Załóżmy więc, że stopień równania $\varphi(x_0, x_1, x_2) = 0$ określającego twór $\mathfrak{A}$ jest dodatni, np. równy $k > 0$ względem zmiennej x_2. Porządkując φ według potęg x_2, możemy równaniu temu nadać postać

$$\varphi_0(x_0, x_1) + x_2 \cdot \varphi_1(x_0, x_1) + x_2^2 \cdot \varphi_2(x_0, x_1) + \ldots + x_2^k \cdot \varphi_k(x_0, x_1) = 0.$$

Ponieważ punkt $p^0 = \{1, 0, 0\}$ należy do $\mathfrak{A}$, więc równanie

(7) $$\varphi_0(1, 0) + x_2 \cdot \varphi_1(1, 0) + x_2^2 \cdot \varphi_2(1, 0) + \ldots + x_2^k \cdot \varphi_k(1, 0) = 0$$

ma pierwiastek $x_2 = 0$. Biorąc teraz dowolną liczbę λ, rozpatrzmy równanie

(8) $$\varphi_0(1, \lambda) + x_2 \cdot \varphi_1(1, \lambda) + x_2^2 \cdot \varphi_2(1, \lambda) + \ldots + x_2^k \cdot \varphi_2(1, \lambda) = 0.$$

Wobec ciągłości wielomianów φ_i, istnieje dla dowolnie danego $\eta > 0$ taka liczba $\delta > 0$, że o ile $|\lambda| < \delta$, to $|\varphi_i(1, \lambda) - \varphi_i(1, 0)| < \eta$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$.

Inaczej mówiąc: jeżeli liczba λ jest dostatecznie mała, to spółczynniki lewej strony równania (8) dowolnie mało się różnią od odpowiednich spółczynników lewej strony równania (7). Jak jednak wiadomo (z tzw. twierdzenia o ciągłości pierwiastków jako funkcji spółczynników[1]), dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\eta > 0$, że jeśli spółczynniki równania (8) różnią się od odpowiednich spółczynników równania (7) mniej niż

[1] Orzeka ono, że dla każdego wielomianu $A_0 + A_1 \cdot x_n + \ldots + A_n \cdot x^n$ o pierwiastkach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (z uwzględnieniem ich krotności) i każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta > 0$ takie, że jeżeli spółczynniki wielomianu $B_0 + B_1 \cdot x + \ldots + B_n \cdot x^n$ spełniają nierówność $|A_i - B_i| < \eta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to po odpowiednim uporządkowaniu pierwiastków $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tegoż wielomianu zachodzą nierówności $|\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zob. np. W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, str. 211.

o η, to dla każdego z pierwiastków równania (7) istnieje pierwiastek równania (8), różniący się od niego mniej niż o ε.

W szczególności istnieje taki pierwiastek x_2' równania (8), że $|x_2'|<\varepsilon$. Wynika stąd, że jeśli weźmiemy na ε ciąg wartości $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$, to istnieć będzie ciąg liczb dodatnich $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu, \ldots$ taki, że jeśli podstawimy $\lambda=\lambda_\nu$, gdzie $|\lambda_\nu|<\eta_\nu$, to równanie (8) mieć będzie pierwiastek x_2^ν, spełniający nierówność:

$$(9) \qquad |x_2^\nu|<\frac{1}{\nu} \quad \text{dla } \nu=1, 2, \ldots$$

Liczby λ_ν dobrać możemy przy tym tak, by było

$$(10) \qquad 0<|\lambda_\nu|<\frac{1}{\nu} \quad \text{dla } \nu=1, 2, \ldots$$

Wówczas $p^\nu=\{1, \lambda_\nu, x_2^\nu\}$ jest dla każdego $\nu=1, 2, \ldots$ punktem przestrzeni $\mathfrak{P}_2$, spełniającym równanie $\varphi(x_0, x_1, x_2)=0$, a zatem należącym do $\mathfrak{A}$ i różnym od $p^0=\{1, 0, 0\}$, przy czym wobec (9) i (10) punkty p^ν dążą do p^0. Dowód lematu został więc zakończony.

Twierdzenie. *Jeżeli równanie $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ stopnia k określa w $\mathfrak{C}_n$ twór $\mathfrak{A}$, to równanie*

$$(11) \qquad \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0,$$

gdzie $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jest licznikiem funkcji wymiernej $\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ o mianowniku x_0^k, określa w $\mathfrak{P}_n$ twór, który otrzymuje się z $\mathfrak{A}$ przez dołączenie do niego wszystkich jego punktów niewłaściwych.

Dowód. Jasne jest, że punkty tworu $\mathfrak{A}$ spełniają równanie (11) oraz że punkty właściwe, spełniające to równanie, należą do $\mathfrak{A}$. Ponieważ zbiór $\mathfrak{A}^*$ punktów spełniających równanie (11) jest zamknięty, więc pozostaje do okazania, że każdy punkt niewłaściwy $p^0 \varepsilon \mathfrak{A}^*$ jest granicą ciągu punktów należących do $\mathfrak{A}$.

Otóż gdyby każdy punkt niewłaściwy przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ spełniał równanie (11), to — jak okazaliśmy w Nr 130 — wielomian ψ byłby podzielny przez x_0. Ale ψ jest licznikiem funkcji wymiernej $\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ o mianowniku x_0^k, więc z podzielności ψ przez x_0 wynikałoby, że wielomian φ jest co najwyżej stopnia $k-1$, wbrew założeniu. Istnieje zatem punkt niewłaściwy q przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ nie należący do $\mathfrak{A}^*$. Prosta $\mathfrak{L}$ łącząca p^0 i q (a więc złożona z samych punktów niewłaściwych) ma, z uwagi na wniosek z Nr 129, ze zbiorem $\mathfrak{A}^*$ jedynie skończony zbiór E

punktów wspólnych. Oznaczmy przez $\mathfrak{H}$ płaszczyznę rzutową przechodzącą przez punkty $\{1, 0, 0\}$, p_0 i q. Płaszczyzna ta przetnie $\mathfrak{A}^*$ wzdłuż pewnego tworu algebraicznego $\mathfrak{A}'$, nie pustego (bo należy do niego p_0) i nie identycznego z $\mathfrak{H}$ (bo q nie należy do $\mathfrak{A}'$), przy czym zbiór skończony E jest identyczny ze zbiorem punktów niewłaściwych należących do $\mathfrak{A}'$. W myśl ostatniego lematu, istnieje zbieżny do p^0 ciąg p^ν punktów należących do $\mathfrak{A}'$ i różnych od p^0. W ciągu tym co najwyżej skończona ilość wyrazów należy do zbioru E. Skreślając te wyrazy, otrzymamy ciąg punktów należących do $\mathfrak{A}'-E\subset\mathfrak{A}$, zbieżny do punktu p^0, którego istnienie było właśnie do okazania.

Zilustrujemy ostatnie twierdzenie na przykładzie sfery $(n-1)$-wymiarowej w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ o środku $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ i promieniu r. Jak okazaliśmy w Nr 111, równanie $(n-1)$-wymiarowej sfery w przestrzeni C_n ma postać

$$(12) \qquad (x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\ldots+(x_n-c_n)^2-r^2=0.$$

Nazwiemy obecnie zbiór punktów przestrzeni $\mathfrak{C}_n$ spełniających równanie postaci (12), gdzie spółrzędne c_i środka, jak i promień r przybierać mogą dowolne wartości zespolone, — *sferą $(n-1)$-wymiarową zespoloną* w przestrzeni $\mathfrak{C}_n$.

Zmieniając nieco terminologię przyjętą w dziedzinie rzeczywistej (ob. Nr 111), będziemy wtedy jedynie, mówili, że *sfera zespolona jest zdegenerowana*, gdy $r=0$.

A więc przez sferę *nie zdegenerowaną* (*zespoloną*) rozumieć będziemy każdą sferę daną przez równanie (12), gdzie $r\neq0$.

Równanie (12) określa w $\mathfrak{C}_n$ twór drugiego stopnia.

Uzupełniając ten twór jego punktami niewłaściwymi, otrzymamy twór w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, zwany *sferą w przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$, którego równanie jest przyrównanym do zera licznikiem funkcji wymiernej

$$\left(\frac{x_1}{x_0}-c_1\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_0}-c_2\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{x_0}-c_n\right)^2-r^2.$$

A więc równanie sfery w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ ma postać

$$(13) \qquad (x_1-c_1\cdot x_0)^2+(x_2-c_2\cdot x_0)^2+\ldots+(x_n-c_n\cdot x_0)^2-r^2\cdot x_0^2=0.$$

A więc punkty niewłaściwe tej sfery są postaci $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, gdzie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nie wszystkie równe zeru, spełniają równanie, jakie otrzymamy z (13), podstawiając $x_0=0$. Ma ono postać $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=0$. Widzimy więc, że punkty te są identyczne z tzw. kierunkami izotropowymi przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, o których była mowa w Nr 126.

Tym sposobem udowodnione ostatnio twierdzenie doprowadziło nas do wniosku następującego:

Wniosek. *Zbiór punktów niewłaściwych każdej sfery $(n-1)$-wymiarowej w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest identyczny ze zbiorem kierunków izotropowych przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.*

ĆWICZENIA. 1. Równanie strofoidy prostej (równanie (27) z Nr 69) określa w płaszczyźnie $\mathfrak{C}_2$ pewną krzywą zespoloną. Znaleźć jej kierunki asymptotyczne (czyli punkty niewłaściwe).

2. Równanie powierzchni torusa (równanie (31) z Nr 79) określa w przestrzeni $\mathfrak{C}_3$ pewną powierzchnię zespoloną T. Znaleźć jej kierunki asymptotyczne. Okazać, że nie ulegną one zmianie, jeżeli T poddamy jakiemukolwiek przekształceniu przez podobieństwo.

132. Jednoznaczność równania tworu drugiego stopnia. W Nr 90 okazaliśmy, że równanie pierwszego stopnia jest wyznaczone z dokładnością do czynnika stałego przez twór, jaki ono określa w przestrzeni P_n, tj. przez hiperpłaszczyznę $(n-1)$-wymiarową. W Nr 125 zauważyliśmy, że wynik ten przenosi się bez zmiany na dziedzinę zespoloną, a więc na przestrzeń $\mathfrak{P}_n$. Zajmiemy się obecnie dowodem, że w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ rzecz ma się podobnie także dla równań drugiego stopnia. Zauważmy od razu, że tak nie jest w przestrzeni P_n, gdzie np. równanie $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ oraz różne od niego równanie $x_0^2+2x_1^2+x_2^2=0$ określają jeden i ten sam twór, mianowicie zbiór pusty.

Zaczniemy od dowodu trzech lematów następujących:

Lemat 1. *Każdy twór algebraiczny $\mathfrak{A}$ stopnia $k>1$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ zawiera układ złożony z $n+1$ punktów liniowo niezależnych.*

Dowód. W przeciwnym razie $\mathfrak{A}$ byłoby podzbiorem właściwym pewnej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny rzutowej $\mathfrak{H}$, leżącej w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Istniałby więc punkt a leżący na $\mathfrak{H}$ poza $\mathfrak{A}$ oraz punkt b leżący w $\mathfrak{P}_n$ poza $\mathfrak{H}$. Prosta rzutowa $\mathfrak{L}$ łącząca a i b byłaby wówczas rozłączna z $\mathfrak{A}$, wbrew wnioskowi z Nr 129.

Lemat 2. *Żaden twór algebraiczny stopnia $k>1$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ nie jest zbiorem liniowym.*

Dowód. W myśl lematu 1 twór algebraiczny $\mathfrak{A}$ stopnia $k>1$ zawiera układ złożony z $n+1$ punktów liniowo niezależnych. Gdyby $\mathfrak{A}$ było zbiorem liniowym, to w myśl wniosku 6 z Nr 87 (który, jak to było stwierdzone w Nr 125, stosuje się również do dziedziny zespolonej), musiałoby być $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_n$, co dla tworu stopnia $k>1$ jest niemożliwe.

W szczególności wynika stąd i z wniosku z Nr 129, że *dla tworu $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia istnieje zawsze prosta $\mathfrak{L}$ przecinająca $\mathfrak{A}$ dokładnie w dwóch punktach.*

Lemat 3. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem algebraicznym drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, a $\mathfrak{L}$ prostą przecinającą $\mathfrak{A}$ dokładnie w dwu punktach, to każdy wielomian jednorodny drugiego stopnia $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, znikający w każdym punkcie $p\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$ oraz w pewnym punkcie $p_0\,\varepsilon\,\mathfrak{L}-\mathfrak{A}$, znika tożsamościowo.*

Dowód. W przypadku $n=1$ prawdziwość lematu wynika z wniosku z Nr 129. Załóżmy więc, że $n>1$ i że lemat jest prawdziwy dla przestrzeni o wymiarze mniejszym od n. Niech $\mathfrak{H}$ będzie jakąkolwiek $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną przechodzącą przez $\mathfrak{L}$. Wówczas $\mathfrak{H}$ przecina $\mathfrak{A}$ wzdłuż pewnego tworu algebraicznego co najwyżej drugiego stopnia (ze względu na twierdzenie z Nr 129). Ponieważ prosta przecina $\mathfrak{A}'$ dokładnie w dwóch punktach, więc w myśl wniosku z Nr 129, twór $\mathfrak{A}'$ jest drugiego stopnia. Wielomian f znika w punkcie $p_0\,\varepsilon\,\mathfrak{L}-\mathfrak{A}$, zatem w myśl założenia indukcyjnego, znika on we wszystkich punktach hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}$. A więc twór $\mathfrak{A}'$, określony przez równanie $f=0$ (jeśli nie jest ono tożsamością), zawiera hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}$. W myśl wniosku z Nr 130 jest więc $\mathfrak{A}'=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'$, gdzie $\mathfrak{H}'$ jest pewną hiperpłaszczyzną $(n-1)$-wymiarową.

Okażemy, że $\mathfrak{H}'\subset\mathfrak{A}$. Istotnie, w przeciwnym razie, biorąc na $\mathfrak{H}'$ punkt q, nie należący do $\mathfrak{A}$, moglibyśmy, wbrew wnioskowi z Nr 129, przeprowadzić przez ten punkt prostą nie przecinającą $\mathfrak{A}$. Jeżeli q nie leży na $\mathfrak{H}$, prostą taką byłaby prosta łącząca p i q, jeżeli zaś $q\,\varepsilon\,\mathfrak{H}$, prostą taką byłaby dowolna prosta, łącząca q z jakimkolwiek punktem p', leżącym poza $\mathfrak{A}'$. A więc $\mathfrak{H}'\subset\mathfrak{A}$.

Stąd na mocy wniosku z Nr 130 wynika, że twór $\mathfrak{A}$ składa się z $\mathfrak{H}'$ oraz z pewnej hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej $\mathfrak{H}''\subset\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'$. Gdyby hiperpłaszczyzna $\mathfrak{H}''$ nie zawierała się ani w $\mathfrak{H}$, ani w $\mathfrak{H}'$, to istniałyby punkty $a, b\,\varepsilon\,\mathfrak{H}''$, z których pierwszy leżałby poza $\mathfrak{H}$, drugi zaś poza $\mathfrak{H}'$. Prosta $\mathfrak{L}'\subset\mathfrak{H}''$, przechodząca przez a i b, miałaby wówczas zarówno z $\mathfrak{H}$ jak i z $\mathfrak{H}'$ po punkcie wspólnym, mimo że $\mathfrak{L}'\subset\mathfrak{H}''\subset\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'$. A więc $\mathfrak{H}''$ zawiera się w $\mathfrak{H}$ lub w $\mathfrak{H}'$. W pierwszym jednak przypadku jest $\mathfrak{H}''=\mathfrak{H}$ (ze względu na wniosek 7 z Nr 87), a więc $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'=\mathfrak{A}'$, wbrew założeniu, że istnieje punkt $p\,\varepsilon\,\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}$, w drugim zaś jest $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}'$, wbrew założeniu, że $\mathfrak{A}$ jest tworem drugiego stopnia.

W ten sposób dowód lematu został zakończony.

Twierdzenie. *Równanie drugiego stopnia $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ jest wyznaczone z dokładnością do czynnika stałego przez twór algebraiczny $\mathfrak{A}$ określony przez nie w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$.*

Dowód. W myśl lematu 2 z Nr 128, zbiór $\mathfrak{A}$ nie jest pusty. Jeżeli $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_n$, to w myśl lematu 1 z Nr 128 jest $A_{i,j}=0$ dla $i, j=0, 1, \ldots, n$.

Możemy więc założyć, że twór $\mathfrak{A}$ jest dodatniego stopnia. Jeżeli jest on pierwszego stopnia, czyli jest hiperpłaszczyzną $\mathfrak{H}$, to — jak okazaliśmy w Nr 130 — wielomian $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$ rozkłada się na iloczyn dwóch czynników pierwszego stopnia, z których każdy jest lewą stroną równania hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}$. Ponieważ $\mathfrak{H}$ wyznacza to równanie z dokładnością do czynnika liczbowego, więc w tym przypadku teza twierdzenia jest prawdziwa.

Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy twór $\mathfrak{A}$ jest drugiego stopnia. Niech

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j = 0$$

i niech

$$\psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} B_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j = 0$$

będzie innym równaniem kwadratowym, określającym ten sam twór $\mathfrak{A}$. W myśl lematu 2 twór $\mathfrak{A}$ nie jest zbiorem liniowym, a więc istnieje prosta $\mathfrak{L}$ przecinająca $\mathfrak{A}$ dokładnie w dwóch punktach. Niech p_0 będzie punktem prostej $\mathfrak{L}$, nie należącym do $\mathfrak{A}$. Przyjmując dla każdego $p=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$f(p)=\varphi(p)\cdot\psi(p_0)-\varphi(p_0)\cdot\psi(p),$$

mamy wielomian f drugiego stopnia, znikający dla każdego punktu $p\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$ oraz dla punktu $p_0\,\varepsilon\,\mathfrak{L}_n-\mathfrak{A}$. W myśl lematu 3 jest więc $f(p)=0$ dla każdego $p\,\varepsilon\,\mathfrak{P}_n$, skąd wynika na mocy lematu 1 z Nr 128, że wszystkie spółczynniki wielomianu f znikają. A więc wielomian $\varphi(p)$ jest identyczny z wielomianem $\dfrac{\varphi(p_0)}{\psi(p_0)}\cdot\psi(p)$, czyli dowód twierdzenia został zakończony.

Uwaga. Dla równań stopnia wyższego od 2 analogiczne twierdzenie nie jest już prawdziwe. Tak np. dla $k>2$ równania k-tego stopnia

$$x_0\cdot x_1^{k-1}=0 \quad\text{i}\quad x_0^2\cdot x_1^{k-2}=0$$

określają w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jeden i ten sam twór, utworzony przez dwie hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowe $x_0=0$ i $x_1=0$, mimo że ich lewe strony różnią się nie tylko czynnikiem stałym.

ĆWICZENIE. Każdej leżącej w $\mathfrak{P}_2$ krzywej stopnia $k\leq 2$ o równaniu

$$A_{0,0}\cdot x_0^2+A_{1,1}\cdot x_1^2+A_{2,2}\cdot x_2^2+2\cdot A_{0,1}\cdot x_0\cdot x_1+2\cdot A_{0,2}\cdot x_0\cdot x_2+2\cdot A_{1,2}\cdot x_1\cdot x_2=0$$

przyporządkujmy punkt $\{A_{0,0}, A_{1,1}, A_{2,2}, A_{0,1}, A_{0,2}, A_{1,2}\}\,\varepsilon\,\mathfrak{P}_5$. Przyporządkowanie to pozwala krzywe płaskie stopnia $k\leq 2$ interpretować jako punkty przestrzeni $\mathfrak{P}_5$, a więc w pewnym sensie mówić o geometrii krzywych stopnia $k\leq 2$. Jak w geometrii tej interpretuje się przynależność punktu do prostej, łączącej dwa różne dane punkty?

133. Wyznaczanie tworu drugiego stopnia przez skończony układ punktów. W Nr 132 okazaliśmy, że równanie tworu kwadratowego wyznaczone jest przez zbiór *wszystkich* jego punktów. Nasuwa się jednak pytanie, czy — podobnie jak twór pierwszego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ wyznaczony jest przez dowolnie dany układ złożony z $n+1$ punktów liniowo niezależnych — tak i twór kwadratowy nie daje się wyznaczyć przez skończony układ punktów.

W przypadku ogólnym damy na to pytanie odpowiedź w postaci pewnego arytmetycznego warunku dla spółrzędnych punktów, którego spełnienie będzie zapewniać jednoznaczność tworu stopnia $k\leq 2$, przechodzącego przez te punkty.

W przypadku płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ otrzymany warunek da się sformułować geometrycznie (a więc bez użycia spółrzędnych).

Dla każdego punktu $p=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ oznaczmy przez $a(p)$ układ $\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ liczb postaci $x_i\cdot x_j$, gdzie $i\leq j$, uporządkowany w ten sposób, że jeśli $i<i'$, to $x_i\cdot x_j$ poprzedza $x_{i'}\cdot x_j$, jeśli zaś $i=i'$, to $x_i\cdot x_j$ poprzedza $x_i\cdot x_{j'}$, gdy $j<j'$. Układ $a(p)$ ma więc postać:

$$x_0\cdot x_0,\ x_0\cdot x_1,\ \dots,\ x_0\cdot x_n,\ x_1\cdot x_1,\ x_1\cdot x_2,\ \dots,\ x_1\cdot x_n,\ \dots,\ x_{n-1}\cdot x_n,\ x_n\cdot x_n.$$

Niech teraz $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą punktami przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Oznaczmy przez $a(p_1, p_2, \dots, p_k)$ macierz o k wierszach, której i-ty wiersz jest identyczny z układem $a(p_i)$. W przypadku $k=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=\dfrac{n(n+3)}{2}+1$ macierz ta jest kwadratowa. Jej wyznacznik oznaczymy wówczas przez $\bar{a}(p_1, p_2, \dots, p_k)$. Udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Przez układ* $m=\dfrac{n\cdot(n+3)}{2}$ *punktów* $p^1, p^2, \dots, p^m$ *przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *przechodzi co najmniej jeden twór stopnia dodatniego* $k\leq 2$.

Twór ten jest jedyny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $a(p^1, p^2, \dots, p^m)$ *jest rzędu* $\dfrac{n\cdot(n+3)}{2}$.

Wówczas twór ten jest identyczny ze zbiorem punktów scharakteryzowanych przez równanie kwadratowe $\bar{a}(p, p^1, p^2, \dots, p^m)=0$.

Dowód. Równanie każdego tworu stopnia $k\leq 2$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ daje się napisać (i to, z pominięciem czynnika stałego, w sposób jednoznaczny) w postaci (5), gdzie nie wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ znikają oraz gdzie $A_{i,j}=A_{j,i}$ dla $i, j=0, 1, \dots, n$. Przyjmując

$$B_{i,i}=A_{i,i} \quad\text{i}\quad B_{i,j}=2\cdot A_{i,j} \quad \text{dla } i\neq j,$$

możemy równaniu temu nadać postać

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} B_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j\right)=0. \tag{14}$$

Aby więc istniał twór stopnia $k\leq 2$, przechodzący przez punkty $p^{\nu}=\{x_0^{\nu}, x_1^{\nu}, \ldots, x_n^{\nu}\}$, gdzie $i=1, 2, \ldots, m$, oraz przez punkt $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ potrzeba i wystarcza, by istniały liczby $B_{i,j}$, nie wszystkie równe zeru, które spełniają równanie (14) oraz równanie

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} B_{i,j}\cdot x_i^{\nu}\cdot x_j^{\nu}\right)=0 \quad \text{dla } \nu=1, 2, \ldots, \frac{n\cdot(n+3)}{2}. \tag{15}$$

Równania (14) i (15) stanowią układ $\frac{n(n+3)}{2}+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ równań liniowych jednorodnych względem $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ spółczynnników $B_{i,j}$. Wiadomo z teorii równań liniowych, że warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia niezerowego rozwiązania tego układu jest znikanie wyznacznika, utworzonego przez spółczynniki tych równań; wyznacznik ten ma w danym razie postać

$$\bar{a}(p, p^1, p^2, \ldots, p^m)=0. \tag{16}$$

Zależność (16), przy stałych punktach $p^1, p^2, \ldots, p^m$, ma postać równania kwadratowego jednorodnego względem zmiennych $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Aby równanie to nie było tożsamością, potrzeba i wystarcza, by co najmniej jeden z podwyznaczników stopnia $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$-ego macierzy $a(p^1, p^2, \ldots, p^m)$ nie znikał, czyli by rząd tej macierzy był równy $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$. W tym więc przypadku równanie (16) określa jednoznacznie zbiór punktów p, które wraz z punktami $p^1, p^2, \ldots, p^m$ leżą na pewnym tworze stopnia $k\leq 2$. Zatem twór ten jest wyznaczony jednoznacznie. Natomiast w przypadku, gdy rząd macierzy $a(p^0, p^0, \ldots, p^m)$ jest mniejszy od $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$, układy $a(p^{\nu})$, traktowane jako punkty przestrzeni $\mathfrak{P}_{\frac{n(n+3)}{2}}$, są liniowo zależne, a więc przechodzi przez nie więcej niż jedna $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna przestrzeni $\mathfrak{P}_{\frac{n(n+3)}{2}}$ (w myśl wniosku 2 z Nr 91, który — jak zaznaczyliśmy w Nr 125 — przenosi się na przestrzenie zespolone).

Istnieją zatem dwa układy $B_{i,j}$ i $B'_{i,j}$, które spełniają równania (15) nie będąc proporcjonalnymi. Równanie (14) i równanie

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} B_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j\right)=0$$

określają wówczas dwa różne twory stopnia $k\leq 2$, przechodzące przez punkty $p^1, p^2, \ldots, p^m$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek 1. *Przez każde 5 punktów płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$, z których żadne 3 nie są spółliniowe, przechodzi dokładnie jedna krzywa drugiego stopnia. Krzywa ta przy tym nie jest zdegenerowana.*

Niech p^1, p^2, p^3, p^4, p^5 będą punktami płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$, z których żadne 3 nie są spółliniowe. Ponieważ dla $n=2$ jest $\frac{n\cdot(n+3)}{2}=5$, więc w myśl ostatniego twierdzenia przez punkty te przechodzi co najmniej jeden twór stopnia $k\leq 2$. Twór ten nie może być ani prostą, ani tworem zdegenerowanym stopnia 2, gdyż wówczas (w myśl wniosku z Nr 130) rozpadałby się na sumę dwóch prostych, a więc co najmniej 3 spośród danych punktów leżałyby na jednej z nich.

Pozostaje zatem do okazania, że nie istnieją dwie różne krzywe drugiego stopnia, przechodzące przez te punkty. Ponieważ chodzi tu oczywiście o własności rzutowe, więc (w myśl twierdzenia z Nr 89) możemy założyć, że:

$$p^1=\{1, 0, 0\}, \quad p^2=\{0, 1, 0\}, \quad p^3=\{0, 0, 1\}, \quad p^4=\{1, 1, 1\}.$$

Niech $p^5=\{a_0, a_1, a_2\}$. Ponieważ p^5 nie leży na prostej łączącej p^2 i p^3 ani na prostej łączącej p^1 i p^4, więc $a_0\neq 0$ i $a_1\neq a_2$ czyli

$$a_0\cdot(a_2-a_1)\neq 0.$$

Na mocy udowodnionego twierdzenia pozostaje zatem już tylko do okazania, że rząd macierzy $\bar{a}(p^1, p^2, p^3, p^4, p^5)$ jest równy 5. Mamy

$$a(p^1, p^2, p^3, p^4, p^5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0^2 & a_0\cdot a_1 & a_0\cdot a_2 & a_1^2 & a_1\cdot a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

Skreślając w tej macierzy przedostatnią kolumnę, otrzymujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0^2 & a_0\cdot a_1 & a_0\cdot a_2 & a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0\cdot a_1 & a_0\cdot a_2 & a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_0\cdot a_1 & a_0\cdot a_2 & a_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0\cdot(a_2-a_1) \neq 0.$$

A więc rząd macierzy $\alpha(p^1, p^2, p^3, p^4, p^5)$ istotnie jest równy 5 i tym samym wniosek 1 został uzasadniony.

Wniosek 2. *Przez układ* $\dfrac{n\cdot(n+3)}{2}$ *punktów przestrzeni* P_n *przechodzi co najmniej jeden twór rzeczywisty określony przez równanie stopnia* ≤ 2.

Istotnie, jeśli punkty $p^1, p^2, \ldots, p^m$ należą do P_n, to możemy założyć, że wszystkie ich spółrzędne x_i^r są rzeczywiste. Spółczynniki $B_{i,j}$, spełniające równania (15), też mogą być wówczas znalezione w dziedzinie rzeczywistej.

Wniosek 3. *Dla każdej stożkowej S, leżącej w P_2, istnieje w $\mathfrak{P}_2$ dokładnie jeden twór stopnia drugiego $\mathfrak{S}$ taki, że $P\cdot\mathfrak{S}=S$.*

Istotnie, wystarczy zauważyć, że wobec wniosku 1 każdy układ pięciu różnych punktów leżących na S wyznacza całkowicie twór $\mathfrak{S}$.

Twór $\mathfrak{S}$, o którym mowa jest w ostatnim wniosku, nazywać będziemy *stożkową zupełną zespoloną*.

Jest to więc twór drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_2$, przecinający P_2 wzdłuż stożkowej zupełnej.

Zależnie od tego, czy S jest zupełną elipsą, hiperbolą czy parabolą, $\mathfrak{S}$ nazywa się *elipsą*, *hiperbolą* lub też *parabolą zupełną zespoloną*.

Stożkowe zupełne zespolone są określone przez te same równania, które w P_2 określają stożkowe zupełne. Są to więc twory rzeczywiste.

Mamy dalej następujący

Wniosek 4. *Dla każdej kwadryki K leżącej w P_3 istnieje w $\mathfrak{P}_3$ dokładnie jeden twór drugiego stopnia $\mathfrak{K}$ taki, że $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{P}_3=K$.*

Wobec twierdzenia z Nr 104 wystarczy okazać, że tak jest w przypadku, gdy kwadryka K jest bądź hiperboloidą jednopowłokową, określoną w P_2 przez równanie

$$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0, \tag{17}$$

bądź hiperboloidą dwupowłokową, określoną w P_2 przez równanie

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0. \tag{18}$$

W pierwszym przypadku na K leżą punkty:

$$p^1=\{0, 1, 0, 1\}, \quad p^2=\{0, 1, 0, -1\}, \quad p^3=\{1, 0, 1, 0\},$$
$$p^4=\{1, 0, -1, 0\}, \quad p^5=\{1, 2, 2, 1\}, \quad p^6=\{1, 3, 3, 1\},$$
$$p^7=\{3, 4, 5, 0\}, \quad p^8=\{5, 0, 4, 3\}, \quad p^9=\{1, -2, 1, 2\},$$

przy czym rząd macierzy $\alpha(p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8, p^9)$ jest równy 9, gdyż wyznacznik, powstały przez skreślenie w niej pierwszej kolumny, ma postać:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 & 9 & 3 & 9 & 3 & 1 \\ 12 & 15 & 0 & 16 & 20 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 0 & 0 & 0 & 16 & 12 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & -2 & -4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

i jak drogą łatwego rachunku można okazać, ma wartość 5760, a więc jest różny od zera. Zatem układ tych punktów wyznacza jednoznacznie twór $\mathfrak{K}$. Tym bardziej więc twór $\mathfrak{K}$ wyznaczony jest jednoznacznie przez cały zbiór K.

W drugim zaś przypadku stwierdzamy, że na hiperboloidzie o równaniu (18) leżą punkty:

$$q^1=\{0, 0, 1, 1\}, \quad q^2=\{0, 0, 1, -1\}, \quad q^3=\{0, 1, 0, 1\},$$
$$q^4=\{1, 0, 0, 1\}, \quad q^5=\{0, 3, 4, 5\}, \quad q^6=\{4, 3, 0, 5\},$$
$$q^7=\{3, -4, 0, 5\}, \quad q^8=\{1, 2, 2, 3\}, \quad q^9=\{1, -2, 2, 3\},$$

przy czym rząd macierzy $\alpha(q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^9)$ jest równy 9, gdyż wyznacznik, powstały przez skreślenie w niej ostatniej kolumny, ma postać:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 12 & 15 & 16 & 20 \\ 16 & 12 & 0 & 20 & 9 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 9 & -12 & 0 & 15 & 16 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 4 & -4 & -6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

i po łatwym rachunku okazuje się równy 11520, a więc jest różny od zera. Zatem twór $\mathfrak{K}$ jest przez układ tych punktów, tym bardziej więc przez całą kwadrykę K, jednoznacznie wyznaczony. W ten sposób dowód wniosku 4 został zakończony.

Twór $\mathfrak{K}$, o którym mowa jest we wniosku 4, nazywać będziemy *kwadryką zupełną zespoloną*.

Jest to więc twór drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_3$, przecinający P_3 wzdłuż kwadryki zupełnej K.

Zależnie od tego, czy K jest zupełną elipsoidą, hiperboloidą jedno- lub dwupowłokową, czy wreszcie paraboloidą eliptyczną lub hiperboliczną, $\mathfrak{K}$ nazywa się *elipsoidą, hiperboloidą jedno-* lub *dwupowłokową, paraboloidą eliptyczną*, lub też *hiperboliczną zupełną zespoloną*.

Kwadryki zupełne zespolone są określone przez te same równania, które w P_3 określają kwadryki zupełne. Są to więc twory rzeczywiste.

Udowodniliśmy zarazem, że każda stożkowa daje się wyznaczyć przez układ pięciu punktów rzeczywistych, a każda kwadryka przez układ dziewięciu punktów rzeczywistych.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć krzywą drugiego stopnia przechodzącą przez punkty $\{1, 0, 0\}$, $\{1, 1, 0\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, -2, 5\}$, $\{0, -1, 4\}$.

2. W przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ dane są trzy proste L_1, L_2, L_3 takie, że L_1 i L_2 są rozłączne, L_3 zaś przecina zarówno L_1 jak L_2. Czy istnieje powierzchnia drugiego stopnia przechodząca przez te proste?

3. Okazać, że elipsoida o równaniu $4\cdot x_1^2+9\cdot x_2^2+\frac{x_3^2}{4}-x_0^2=0$ i sfera o równaniu $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=0$ przecinają się w zbiorze, w którym znaleźć można dowolną skończoną ilość takich punktów $p_1, p_2, \ldots, p_k$, że każde cztery są liniowo niezależne. Opierając się na tym, zbadać, czy prawdą jest dla $n>2$, że układ $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$ punktów przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, z których żadne $n+1$ nie są liniowo zależne, wyznacza zawsze twór kwadratowy (jak to jest w przypadku $n=2$ w myśl wniosku 1).

ROZDZIAŁ XVII.

Elementarne własności tworów drugiego stopnia

134. Styczne do tworu drugiego stopnia. Punkty osobliwe i punkty zwyczajne. Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem pierwszego lub drugiego stopnia, leżącym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Niech $\mathfrak{L}$ będzie prostą w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. W myśl wniosku z Nr 129 istnieją następujące trzy możliwości:

1° $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{A}$, czyli $\mathfrak{L}$ jest tworzącą prostoliniową tworu $\mathfrak{A}$,

2° $\mathfrak{L}$ przecina $\mathfrak{A}$ dokładnie w jednym punkcie,

3° $\mathfrak{L}$ przecina $\mathfrak{A}$ dokładnie w dwóch punktach.

Jeżeli zachodzi przypadek 1° lub 2°, to mówimy, że *prosta* $\mathfrak{L}$ *jest styczną do tworu* $\mathfrak{A}$.

Jasny jest rzutowy charakter tego pojęcia.

Okażemy, że tak wprowadzone pojęcie stycznej obejmuje jako szczególny przypadek pojęcie stycznej do stożkowej wprowadzone w Nr 110. W tym celu wystarczy okazać, że jeżeli A jest tworem określonym w przestrzeni P_n przez równanie $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=0$, gdzie φ jest wielomianem jednorodnym drugiego stopnia o spółczynnikach rzeczywistych, zaś $\mathfrak{A}$ jest tworem określonym przez to samo równanie w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, to aby prosta L, wyznaczona w przestrzeni P_n przez dwa punkty rzeczywiste a i b, przecinała A dokładnie w jednym punkcie lub całkowicie leżała na A, potrzeba i wystarcza, by prosta $\mathfrak{L}$, wyznaczona w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez te same dwa punkty a i b, była styczna do $\mathfrak{A}$. Inaczej mówiąc, wystarczy okazać, że jeśli podaną tutaj (dla dziedziny zespolonej) definicję stycznej przenieść na dziedzinę rzeczywistą, to otrzyma się te i tylko te proste rzeczywiste, które są stycznymi do $\mathfrak{A}$ (w sensie dziedziny zespolonej).

Niech L przechodzi przez punkt $p\,\varepsilon\,A$ i niech bądź $L\subset A$, bądź $L\cdot A$ zawiera tylko punkt p. Jeżeli $L\subset A$, to $\mathfrak{L}$ zawiera nieskończenie wiele punktów tworu $\mathfrak{A}$, a więc $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{A}$. Jeżeli zaś $L\cdot A$ zawiera jedynie punkt p, to gdyby istniał punkt $q\,\varepsilon\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{L}$ różny od p, punkt q nie byłby rzeczywisty, a więc punkt z nim sprzężony $\bar{q}$ należałby też do $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{L}$ i w myśl Nr 120 byłoby $q\neq\bar{q}$. A więc zbiór $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{L}$ zawierałby trzy różne punkty $p, q, \bar{q}$, skąd wynika, że $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{A}$, co pociąga za sobą $L\subset A$, wbrew założeniu, że $L\cdot A$ redukuje się do punktu p. A więc $\mathfrak{L}$ jest styczną do $\mathfrak{A}$.

Niech prosta $\mathfrak{L}$, wyznaczona przez punkty rzeczywiste a i b, będzie styczną do $\mathfrak{A}$. Jeśli $\mathfrak{L}$ przecina $\mathfrak{A}$ dokładnie w jednym punkcie p, to punkt ten musi być rzeczywisty, w przeciwnym bowiem razie różny od niego punkt z nim sprzężony $\overline{p}$ również należałby do $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{A}$. A więc w przypadku tym L przecina A też w jednym punkcie p. Jeżeli zaś $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{A}$, to $L\subset A$.

Zajmiemy się teraz podaniem analitycznych warunków charakteryzujących styczne. Załóżmy, że twór $\mathfrak{A}$ dany jest przez równanie

$$(1)\qquad \sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0, \text{ gdzie } A_{i,j}=A_{j,i}.$$

Prosta $\mathfrak{L}$, przechodząca przez dany punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ i przez dowolny punkt $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ różny od c, jest identyczna ze zbiorem punktów postaci

$$\{\lambda\cdot c_0+\mu\cdot x_0,\ \lambda\cdot c_1+\mu\cdot x_1, \ldots, \lambda\cdot c_n+\mu\cdot x_n\},$$

gdzie λ i μ nie znikają jednocześnie. Punkty jej przecięcia z $\mathfrak{A}$ charakteryzuje równanie

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot(\lambda\cdot c_i+\mu\cdot x_i)\cdot(\lambda\cdot c_j+\mu\cdot x_j)=0,$$

czyli zależność

$$(2)\qquad \lambda^2\cdot\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot c_j+2\lambda\cdot\mu\cdot\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot x_j+\mu^2\cdot\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0.$$

Jeżeli punkt c leży na $\mathfrak{A}$, to w równaniu (2) spółczynnik przy λ^2 znika. Jednoczesne znikanie spółczynnika przy $\lambda\cdot\mu$ jest równoważne temu, że równanie (2) bądź jest spełnione tylko dla $\mu=0$, bądź staje się tożsamością. Inaczej mówiąc, prosta $\mathfrak{L}$ przechodząca przez punkt $c\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$ i punkt $p\neq c$ jest styczną do $\mathfrak{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ spełnia warunek

$$(3)\qquad \sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot x_j=0.$$

Biorąc pod uwagę, że również punkt c spełnia równanie (3), widzimy, że zbiór punktów $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, położonych na prostych stycznych do A i przechodzących przez punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$, jest scharakteryzowany przez równanie (3).

Jeżeli równanie to jest tożsamością, czyli jeżeli każda prosta przechodząca przez c jest styczną do $\mathfrak{A}$, to mówimy, że c jest *punktem osobliwym tworu* $\mathfrak{A}$.

Punkty tworu $\mathfrak{A}$, nie będące punktami osobliwymi, nazywać będziemy *punktami zwyczajnymi tworu* $\mathfrak{A}$.

Jeśli twór $\mathfrak{A}$ nie zawiera punktów osobliwych, to mówimy o nim, że jest *rozmaitością*.

Punkty osobliwe tworu $\mathfrak{A}$ są arytmetycznie scharakteryzowane przez równania

$$(4)\qquad \sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i=0 \quad\text{dla}\quad j=0, 1, \ldots, n,$$

z których wynika, że $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot c_j=0$, czyli że $c\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$. Wynika stąd, że twór $\mathfrak{A}$ ma punkty osobliwe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik

$$|A_{i,j}|\ (i,j=0,1,\ldots,n),$$

zwany *wielkim wyróżnikiem* tworu, jest równy zeru.

Co więcej, na mocy twierdzenia z Nr 91 (które — jak zauważyliśmy w Nr 125 — przenosi się na przypadek zespolony), punkty osobliwe tworu $\mathfrak{A}$ tworzą hiperpłaszczyznę o wymiarze $m=n-l$, gdzie l jest to rząd macierzy kwadratowej $(A_{i,j})(i, j=0, 1, \ldots, n)$, zwanej *macierzą wielkiego wyróżnika* równania (3).

Oznaczmy przez $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ lewą stronę równania (3). Wówczas macierz wielkiego wyróżnika tego równania oznaczać będziemy przez $\mathfrak{M}(f)$. Jej wyznacznik, czyli *wielki wyróżnik równania* (3), oznaczać będziemy przez $\overline{\mathfrak{M}}(f)$.

Biorąc dalej pod uwagę, że w myśl twierdzenia z Nr 132 równanie $f=0$ jest przez twór $\mathfrak{A}$ określone z dokładnością do czynnika stałego, wnioskujemy, że rząd macierzy $\mathfrak{M}(f)$ zależy jedynie od tworu $\mathfrak{A}$ (a nie od wyboru jego równania $f=0$).

Rząd ten nazywać będziemy *pierwszym wskaźnikiem rzutowym tworu* $\mathfrak{A}$ i oznaczać przez $K(\mathfrak{A})$.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Zbiór punktów osobliwych tworu $\mathfrak{A}$ stopnia pierwszego lub drugiego w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest hiperpłaszczyzną o wymiarze $n-K(\mathfrak{A})$.*

Wniosek 1. *Pierwszy wskaźnik rzutowy $K(\mathfrak{A})$ jest niezmiennikiem rzutowym tworu $\mathfrak{A}$.*

Wniosek 2. *Aby twór $\mathfrak{A}$ był rozmaitością, potrzeba i wystarcza, by jego pierwszy wskaźnik rzutowy $K(\mathfrak{A})$ był równy $n+1$, czyli by wielki wyróżnik jego równania był różny od zera.*

W myśl Nr 103 i 133 elipsa i hiperbola zupełne zespolone mają równania postaci $A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + x_0^2 = 0$, gdzie A_1 i A_2 są różne od zera. A więc dla nich wielki wyróżnik ma postać

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{vmatrix} = A_1 . A_2 \neq 0.$$

Parabola zupełna zespolona ma równanie postaci $2 \cdot x_0 \cdot x_1 - \dfrac{x_2^2}{d} = 0$, a więc wielki wyróżnik jej równania ma postać

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{d} \neq 0.$$

Możemy zatem wypowiedzieć następujący

Wniosek 3. *Wszystkie stożkowe zupełne zespolone są rozmaitościami.*

W myśl Nr 104 i 133 elipsoida i obie hiperboloidy mają równania postaci $A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + A_3 \cdot x_3^2 + x_0^2 = 0$, gdzie spółczynniki A_1, A_2, A_3 są różne od zera. A więc wielki wyróżnik ma dla nich postać

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = A_1 . A_2 . A_3 \neq 0.$$

Obie paraboloidy mają równania postaci $A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_0 \cdot x_1 = 0$, gdzie A_1 i A_2 są różne od zera, a więc wielki wyróżnik dla nich ma postać

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{vmatrix} = -A_1 . A_2 \neq 0.$$

Możemy zatem wypowiedzieć następujący

Wniosek 4. *Wszystkie kwadryki zupełne zespolone są rozmaitościami.*

Bezpośrednio z definicji punktów osobliwych wynika, że na to, by punkt $c \in \mathfrak{A}$ był punktem osobliwym, potrzeba i wystarcza, by zbiór $\mathfrak{A}$

dawał się przedstawić jako suma zbioru jednopunktowego (c) oraz wszystkich prostych, przechodzących przez c i leżących na $\mathfrak{A}$.

Zbiór taki nazywamy *stożkiem o wierzchołku c*.

Wniosek 5. *Na to, aby twór stopnia drugiego był stożkiem o wierzchołku* $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$, *potrzeba i wystarcza, by jego równanie nie zawierało spółrzędnej* x_0.

Istotnie, to że twór jest stożkiem o wierzchołku $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$ jest równoważne spełnieniu przez ten punkt równań (4), czyli równościom $A_{0,j} = 0$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$.

Z podanej definicji stożka wynika dalej, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest sumą dwóch różnych hiperpłaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych, to jego punkty osobliwe są identyczne z punktami przecięcia tych hiperpłaszczyzn, a więc zbiór ich (na mocy twierdzenia z Nr 91) ma wymiar $n-2$. Mamy więc

Wniosek 6. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest sumą dwóch różnych hiperpłaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, to rząd macierzy $\mathfrak{M}(f)$ jest równy* 2.

Wreszcie w przypadku, gdy $\mathfrak{A}$ redukuje się do jednej hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej, każdy jej punkt jest osobliwy, skąd wynika

Wniosek 7. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem stopnia pierwszego, to rząd macierzy $\mathfrak{M}(f)$ jest równy* 1.

Uwaga. Niech

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j. \tag{5}$$

Dla każdego wskaźnika $i = 0, 1, \ldots, n$ możemy wielomian f napisać w postaci

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A_{i,i} \cdot x_i^2 + 2 . x_i \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} A_{i,j} \cdot x_j + C_i,$$

gdzie C_i nie zależy od zmiennej x_i. Wynika stąd, że — używając znakowania rachunku różniczkowego — mamy:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_j. \tag{6}$$

Wynika stąd, że równania (4), charakteryzujące punkty osobliwe tworu A, dają się napisać w łatwej do zapamiętania postaci

$$f'_{x_i}(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć punkty osobliwe powierzchni (w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$) o równaniu $2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3^2 = 0$.

2. Twór w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ o równaniu $2 \cdot x_0 \cdot x_1 + x_1^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 - x_4^2 = 0$ przecięto hiperpłaszczyzną o równaniu

$$\lambda \cdot x_0 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Dobrać λ w taki sposób, by powierzchnia otrzymana w przecięciu miała co najmniej jeden punkt osobliwy.

135. Hiperpłaszczyzny styczne. W Nr 134 okazaliśmy, że jeżeli punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ należy do tworu $\mathfrak{A}$, określonego w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie (1), to punkty $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, leżące na stycznych do $\mathfrak{A}$ przechodzących przez c, są scharakteryzowane przez równanie (3), które możemy też napisać w postaci

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot x_j=0. \tag{7}$$

Jeżeli punkt c jest punktem zwyczajnym, to nie wszystkie wyrażenia $\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i$ $(j=0, 1, \ldots, n)$ znikają, a więc równanie (7) określa pewną $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę, zwaną *hiperpłaszczyzną styczną do* $\mathfrak{A}$ *w punkcie* c.

W przypadku, gdy zarówno punkt c, jak i wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste, równanie (7) ma spółczynniki rzeczywiste i określa w przestrzeni P_n hiperpłaszczyznę $(n-1)$-wymiarową, zwaną *rzeczywistą hiperpłaszczyzną styczną* do tworu $A=\mathfrak{A}\cdot P$ w punkcie c.

Z uwagi na rozważania z Nr 134 jest ona identyczna ze zbiorem punktów należących do wszystkich stycznych rzeczywistych w punkcie c do tworu A.

Wracając do przypadku zespolonego, możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Jeżeli c jest punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$, określonego w $\mathfrak{P}_n$ przez równanie* (1), *to zbiór punktów przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, leżących na stycznych do $\mathfrak{A}$ w punkcie c, jest $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną, określoną przez równanie* (7).

Jest ona jedyną hiperpłaszczyzną $(n-1)$-wymiarową, przechodzącą przez c i przecinającą $\mathfrak{A}$ wzdłuż tworu stopnia $k\leq 2$, dla którego c jest punktem osobliwym.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia została już udowodniona na początku tego Nr. Oznaczając przez $\mathfrak{H}$ hiperpłaszczyznę styczną w punkcie c, weźmy pod uwagę jej przecięcie $\mathfrak{A}'$ z tworem $\mathfrak{A}$. Jeśli $c' \,\varepsilon\, \mathfrak{A}'$ i $c'\neq c$, to prosta łącząca c i c' leży w $\mathfrak{H}$, a więc jest styczna do $\mathfrak{A}$, ponieważ zaś zawiera dwa różne punkty c i c' tworu $\mathfrak{A}$, więc musi być całkowicie zawarta w $\mathfrak{A}$, a więc i w $\mathfrak{A}'$. Stąd wynika, że c jest punktem osobliwym dla $\mathfrak{A}'$. Niech teraz $\mathfrak{H}^*$ będzie jakąkolwiek $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną, przechodzącą przez c i różną od $\mathfrak{H}$. Niech $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}^*$. Istnieje wówczas punkt $c^* \,\varepsilon\, \mathfrak{H}^*-\mathfrak{H}$. Prosta łącząca c i c^* przecina wtedy $\mathfrak{A}^*$ do-

kładnie w dwóch punktach, co dowodzi, że c nie jest punktem osobliwym dla $\mathfrak{A}^*$. W ten sposób dowód twierdzenia jest zakończony.

Wniosek. *Przekrój rozmaitości $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ hiperpłaszczyzną $(n-1)$-wymiarową $\mathfrak{H}$, która nie jest styczną do $\mathfrak{A}$, jest w $\mathfrak{H}$ rozmaitością drugiego stopnia.*

Uwaga. Korzystając z uwagi przy końcu Nr 134, możemy równaniu hiperpłaszczyzny stycznej (7) nadać następującą, łatwą do zapamiętania postać:

$$\sum_{j=0}^{n} f'_{x_j}(c)\cdot x_j=0. \tag{8}$$

Warto zauważyć, że ze względu na rzutowy charakter rozważań, postać równania stycznej zachowa się, jeżeli od danych spółrzędnych przejdziemy do dowolnego układu spółrzędnych rzutowych.

Zakładając, że spółrzędne są kartezjańskie prostokątne oraz że punkt c jest właściwy, zauważmy, że w myśl twierdzenia 3 z Nr 24 jedynym kierunkiem prostopadłym do hiperpłaszczyzny stycznej jest kierunek $\{0, f'_{x_1}(c), f'_{x_2}(c), \ldots, f'_{x_n}(c)\}$.

Kierunek ten nazywamy *kierunkiem normalnym* do tworu $\mathfrak{A}$ w punkcie c, zaś prostą o tym kierunku, przechodzącą przez c, nazywamy *normalną* do tworu $\mathfrak{A}$ w punkcie c.

Normalna określona jest więc w każdym zwykłym punkcie właściwym tworu, a jej równanie wektorialne ma postać (w myśl wzoru (16) z Nr 14):

$$p=c+t\cdot\left([f'_{x_1}(c), f'_{x_2}(c), \ldots, f'_{x_n}(c)]\right).$$

W szczególności, jeżeli $n=2$ (czyli gdy mamy płaszczyznę), równanie normalnej ma postać $p=c+t\cdot\left([f'_{x_1}(c), f'_{x_2}(c)]\right)$, a więc równoważne jest równaniu $(p-c)\cdot[f'_{x_2}(c), -f'_{x_1}(c)]=0$ czyli równaniu

$$(x_1-c_1)\cdot f'_{x_2}(c)-(x_2-c_2)\cdot f'_{x_1}(c)=0.$$

Wypiszemy w szczególności równania stycznych i normalnych dla stożkowych, których równania (w płaszczyźnie P_2) wyprowadziliśmy w Nr 103.

Dla paraboli o równaniu $2x_0\cdot x_1-\dfrac{x_2^2}{d}=0$ mamy:

$$f'_{x_0}(c)=2c_1,\quad f'_{x_1}(c)=2c_0,\quad f'_{x_2}(c)=-\frac{2}{d}c_2.$$

A więc równanie stycznej w punkcie c ma postać

$$c_0 . x_1 + c_1 . x_0 - \frac{c_2 . x_2}{d} = 0,$$

równanie zaś normalnej—postać

$$(x_1 - c_1) \cdot c_2 + (x_2 - c_2) \cdot c_0 \cdot d = 0.$$

Dla elipsy o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0$ mamy

$$f'_{x_0}(c) = -2c_0, \quad f'_{x_1}(c) = \frac{2c_1}{a_1^2}, \quad f'_{x_2}(c) = \frac{2c_2}{a_2^2}.$$

A więc równanie stycznej do elipsy w punkcie c ma postać

$$\frac{c_1 . x_1}{a_1^2} + \frac{c_2 . x_2}{a_2^2} - c_0 . x_0 = 0,$$

zaś równanie normalnej do elipsy w punkcie c ma postać

$$(x_1 - c_1) . \frac{c_2}{a_2^2} - (x_2 - c_2) . \frac{c_1}{a_1^2} = 0.$$

Dla hiperboli o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0$ mamy

$$f'_{x_0}(c) = -2c_0, \quad f'_{x_1}(c) = \frac{2c_1}{a_1^2}, \quad f'_{x_2}(c) = -\frac{2c_2}{a_2^2}.$$

A więc równanie stycznej do hiperboli w punkcie c ma postać

$$\frac{c_1 . x_1}{a_1^2} - \frac{c_2 . x_2}{a_2^2} - c_0 . x_0 = 0,$$

zaś równanie normalnej do hiperboli w punkcie c ma postać:

$$(x_1 - c_1) . \frac{c_2}{a_2^2} + (x_2 - c_2) . \frac{c_1}{a_1^2} = 0.$$

W przypadku $n=3$ hiperpłaszczyzna o równaniu (8) jest płaszczyzną styczną do powierzchni drugiego stopnia. Skorzystajmy z tego równania w celu znalezienia równań płaszczyzn stycznych do kwadryk, danych przez równania (w przestrzeni P_3) z Nr 104.

Dla elipsoidy o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0$$

mamy:

$$f'_{x_0}(c) = -2c_0, \quad f'_{x_1}(c) = \frac{2c_1}{a_1^2}, \quad f'_{x_2}(c) = \frac{2c_2}{a_2^2}, \quad f'_{x_3}(c) = \frac{2c_3}{a_3^2}.$$

A więc równanie płaszczyzny stycznej do elipsoidy w punkcie c ma postać:

$$\frac{c_1 . x_1}{a_1^2} + \frac{c_2 . x_2}{a_2^2} + \frac{c_3 . x_3}{a_3^2} - c_0 . x_0 = 0.$$

Dla hiperboloidy dwupowłokowej o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0$$

mamy:

$$f'_{x_0}(c) = -2c_0, \quad f'_{x_1}(c) = \frac{2c_1}{a_1^2}, \quad f'_{x_2}(c) = -\frac{2c_2}{a_2^2}, \quad f'_{x_3}(c) = -\frac{2c_3}{a_3^2}.$$

A więc równanie płaszczyzny stycznej do hiperboloidy dwupowłokowej w punkcie c ma postać:

$$\frac{c_1 . x_1}{a_1^2} - \frac{c_2 . x_2}{a_2^2} - \frac{c_3 . x_3}{a_3^2} - c_0 . x_0 = 0.$$

Dla hiperboloidy jednopowłokowej o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + x_0^2 = 0$$

mamy:

$$f'_{x_0}(c) = 2c_0, \quad f'_{x_1}(c) = \frac{2c_1}{a_1^2}, \quad f'_{x_2}(c) = -\frac{2c_2}{a_2^2}, \quad f'_{x_3}(c) = -\frac{2c_3}{a_3^2}.$$

A więc równanie płaszczyzny stycznej do hiperboloidy jednopowłokowej w punkcie c ma postać:

$$\frac{c_1 . x_1}{a_1^2} - \frac{c_2 . x_2}{a_2^2} - \frac{c_3 . x_3}{a_3^2} + c_0 . x_0 = 0.$$

Dla paraboloidy eliptycznej o równaniu

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2x_0 . x_1 = 0$$

mamy:

$$f'_{x_0}(c)=-2c_1,\quad f'_{x_1}(c)=-2c_0,\quad f'_{x_2}(c)=\frac{2c_2}{a_2^2},\quad f'_{x_3}(c)=\frac{2c_3}{a_3^2}.$$

A więc równanie płaszczyzny stycznej do paraboloidy eliptycznej w punkcie c ma postać

$$\frac{c_2\,.\,x_2}{a_2^2}+\frac{c_3\,.\,x_3}{a_3^2}-c_0\,.\,x_1-c_1\,.\,x_0=0.$$

Dla paraboloidy hiperbolicznej o równaniu

$$\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}-2x_0\,.\,x_1=0$$

mamy:

$$f'_{x_0}(c)=-2c_1,\quad f'_{x_1}(c)=-2c_0,\quad f'_{x_2}(c)=\frac{2c_2}{a_2^2},\quad f'_{x_3}(c)=-\frac{2c_3}{a_3^2}.$$

A więc równanie płaszczyzny stycznej do paraboloidy hiperbolicznej w punkcie c ma postać:

$$\frac{c_2\,.\,x_2}{a_2^2}-\frac{c_3\,.\,x_3}{a_3^2}-c_0\,.\,x_1-c_1\,.\,x_0=0.$$

ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ dany jest twór stopnia drugiego $\mathfrak{A}$ bez punktów osobliwych. Okazać, że $(n-1)$-wymiarowe hiperpłaszczyzny styczne, poprowadzone w punktach $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tworu $\mathfrak{A}$, przechodzą przez jeden punkt wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $p_0, p_1, \ldots, p_n$ są liniowo zależne.

2. Okazać, że punkty przestrzeni C_3, przez które przechodzą trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny styczne do danej elipsoidy, leżą na pewnej sferze.

136. Hiperpłaszczyzny asymptotyczne, kierunki osobliwe i kierunki wyjątkowe. Hiperpłaszczyzna styczna w punkcie niewłaściwym nazywa się *asymptotyczną*.

PRZYKŁADY. Dla stożkowych hiperpłaszczyzna asymptotyczna jest prostą, zwaną również *asymptotą*.

Dla paraboli o równaniu $2x_0\cdot x_1-\frac{x_2^2}{d}=0$ jedynym punktem niewłaściwym jest punkt $\{0,1,0\}$, a więc asymptotą jest prosta o równaniu $x_0=0$, czyli prosta niewłaściwa.

Dla elipsy o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-x_0^2=0$ punkty niewłaściwe spełniają warunek $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$, skąd wynika, że są one postaci:

$$\{0, a_1, i\cdot a_2\}\quad \text{i}\quad \{0, a_1, -i\cdot a_2\}.$$

A więc asymptotami są proste o równaniach:

$$\frac{x_1}{a_1}+i\frac{x_2}{a_2}=0\quad \text{i}\quad \frac{x_1}{a_1}-i\frac{x_2}{a_2}=0.$$

Przecinają się one w punkcie rzeczywistym $\{1, 0, 0\}$, poza tym innych punktów rzeczywistych nie zawierają.

Dla hiperboli o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-x_0^2=0$ punkty niewłaściwe spełniają warunek $\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$, skąd wynika, że są one postaci:

$$\{0, a_1, a_2\}\quad \text{i}\quad \{0, a_1, -a_2\}.$$

A więc asymptotami są proste o równaniach:

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}=0\quad \text{i}\quad \frac{x_1}{a_1}-\frac{x_2}{a_2}=0,$$

co zgodne jest z terminologią wprowadzoną w Nr 67.

Hiperpłaszczyzna asymptotyczna przestaje być określona, jeżeli punkt niewłaściwy tworu jest jednocześnie jego punktem osobliwym.

Punkt niewłaściwy nazywa się również *kierunkiem asymptotycznym*; jeśli jest on osobliwy, to mówimy, że jest to dla tworu *kierunek osobliwy*.

Jak zauważyliśmy w Nr 134, na to, by punkt c tworu $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia był osobliwy, potrzeba i wystarcza, by twór $\mathfrak{A}$ był stożkiem o wierzchołku c, czyli zbiorem złożonym z punktu c oraz wszystkich prostych leżących na $\mathfrak{A}$ i przechodzących przez c.

Wynika stąd w szczególności, że *na to, by kierunek c był osobliwy, potrzeba i wystarcza, by twór $\mathfrak{A}$ był zbiorem złożonym z prostych o kierunku c, czyli walcem, którego tworzące mają kierunek c.*

Z równań (4) wynika, że kierunki osobliwe $\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ są analitycznie scharakteryzowane przez równania

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i=0\quad \text{dla}\quad j=0,1,\ldots,n.$$

Jasne jest, że każdy kierunek osobliwy tworu $\mathfrak{A}$ jest punktem osobliwym również dla przecięcia tworu $\mathfrak{A}$ hiperpłaszczyzną niewłaściwą, ale nie na odwrót, gdyż np. dla paraboloidy hiperbolicznej $\mathfrak{A}$ o równaniu $\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}-2x_0\cdot x_1=0$ przecięcie $\mathfrak{B}$ płaszczyzną niewłaściwą składa się z dwóch prostych, których równania w płaszczyźnie $x_0=0$ mają postać $\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}$ i $\frac{x_2}{a_2}=-\frac{x_3}{a_3}$. Proste te przecinają się w punkcie $\{0, 1, 0, 0\}$. Punkt ten jest więc osobliwy dla przecięcia $\mathfrak{B}$, nie będąc osobliwym dla paraboloidy $\mathfrak{A}$, gdyż — jak stwierdziliśmy w Nr 135 — nie posiada ona wcale punktów osobliwych.

Podobnie jest i w przypadku paraboloidy eliptycznej.

Jeszcze prostszym przykładem jest parabola, której jedyny punkt niewłaściwy ma podobne własności.

Punkt niewłaściwy tworu $\mathfrak{A}$ stopnia co najwyżej drugiego, będący punktem osobliwym dla przecięcia tworu $\mathfrak{A}$ hiperpłaszczyzną niewłaściwą, nazywać będziemy *kierunkiem wyjątkowym*.

Zatem *każdy kierunek osobliwy jest wyjątkowy, ale nie na odwrót.*

Jasne jest, że zarówno pojęcie kierunku osobliwego jak i kierunku wyjątkowego są niezmiennikami tych przekształceń rzutowych, przy których wszystkie punkty niewłaściwe przechodzą na niewłaściwe, czyli przekształceń afinicznych. Z równań (4) wynika, że kierunki wyjątkowe $\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ są analitycznie scharakteryzowane przez równania

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i=0 \quad \text{dla} \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Jeżeli lewa strona równania tworu $\mathfrak{A}$ ma postać

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j,$$

to przekrój tworu $\mathfrak{A}$ hiperpłaszczyzną niewłaściwą jest określony w niej przez równanie $\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$. Wobec twierdzenia z Nr 134 wynika stąd, że zbiór kierunków wyjątkowych tworu $\mathfrak{A}$ jest hiperpłaszczyzną o wymiarze $n-1-l$, gdzie l jest rzędem macierzy

$$(A_{i,j})\,(i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Macierz tę nazywamy *macierzą małego wyróżnika* równania $f=0$; oznaczać ją będziemy przez $\mathfrak{m}(f)$. Jej wyznacznik $|A_{i,j}|\,(i, j=1, 2, \ldots, n)$ nazywa się *małym wyróżnikiem* równania $f=0$; oznaczać go będziemy przez $\overline{\mathfrak{m}}(f)$.

Z powyższego wynika, że rząd macierzy $\mathfrak{m}(f)$ nie ulegnie zmianie, jeżeli równanie $f=0$ zastąpimy przez inne równanie kwadratowe tegoż tworu.

Stanowi on więc własność tworu $\mathfrak{A}$.

Rząd $\mathfrak{m}(f)$ nazywa się *pierwszym wskaźnikiem afinicznym tworu* $\mathfrak{A}$.

Z niezmienniczości afinicznej kierunków wyjątkowych wynika, że *pierwszy wskaźnik afiniczny tworu $\mathfrak{A}$ stanowi własność afiniczną tego tworu.*

Uwaga. Jeżeli twór jest rzeczywisty, czyli wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste, to — jak okazaliśmy na początku Nr 134 — styczne rzeczywiste do tworu $\mathfrak{A}$ są identyczne z prostymi rzeczywistymi, przecinającymi zbiór A punktów rzeczywistych tworu $\mathfrak{A}$ dokładnie w jednym punkcie. Wynika stąd, że ograniczając się w definicjach kierunków osobliwych i kierunków wyjątkowych do dziedziny rzeczywistej, otrzymamy w wyniku odpowiednio wszystkie kierunki osobliwe i kierunki wyjątkowe, będące punktami rzeczywistymi. Rozważania, które prowadzimy tutaj w dziedzinie zespolonej, stosują się więc bez zmiany do dziedziny rzeczywistej.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć kierunki osobliwe i kierunki wyjątkowe tworu określonego w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ przez równanie:

$$2x_0^2+x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+x_4^2+2x_0\cdot x_1+2x_0\cdot x_2+2x_0\cdot x_4+2x_1\cdot x_2+4x_2\cdot x_3=0.$$

2. Podać w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ równanie tworu, dla którego zbiór kierunków wyjątkowych jest prostą.

137. Bieguny i biegunowe. Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem określonym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, zaś $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ punktem nie należącym do $\mathfrak{A}$. W myśl wniosku z Nr 129, każda prosta $\mathfrak{L}$, przechodząca przez b, przecina $\mathfrak{A}$ w pewnych punktach p', p'', które mogą się pokrywać. Jeżeli $p'\neq p''$, to oznaczmy przez p taki punkt prostej $\mathfrak{L}$, że czwórka punktów b, p, p', p'' jest harmoniczna. Jeżeli zaś $p'=p''$, to niech $p=p'=p''$. Zawsze jest więc $p\neq b$.

Zbiór wszystkich, w taki sposób otrzymanych punktów p nazywamy *biegunową punktu b względem tworu $\mathfrak{A}$*.

Uzupełnijmy jeszcze tę definicję, rozciągając ją również na przypadek, gdy punkt b jest punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$.

W tym przypadku *przez biegunową punktu b rozumieć będziemy hiperpłaszczyznę styczną w punkcie b.*

Wynika stąd, że *punkt b leży na swej biegunowej wtedy i tylko wtedy, gdy $b \in \mathfrak{A}$.* Pojęcie biegunowej ma oczywiście charakter rzutowy.

Twierdzenie. *Jeżeli punkt* $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \, \varepsilon \, \mathfrak{P}_n$ *nie jest punktem osobliwym tworu* $\mathfrak{A}$ *o równaniu* $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, *to biegunowa punktu* b *względem tworu* $\mathfrak{A}$ *jest hiperpłaszczyzną* $(n-1)$*-wymiarową o równaniu*

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot x_j=0. \tag{11}$$

Dowód. Równanie (11) możemy też napisać w postaci

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot\right)\cdot x_j=0, \tag{12}$$

lub też przyjmując $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$, w postaci

$$\sum_{j=0}^{n} f'_{x_j}(b)\cdot x_j=0. \tag{13}$$

Jeżeli więc b jest punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$, to teza twierdzenia wynika z twierdzenia z Nr 135. Pozostaje zatem udowodnienie twierdzenia w przypadku, gdy punkt b nie leży na $\mathfrak{A}$.

Jeśli $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jest jakimkolwiek punktem przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, różnym od b, to prosta $\mathfrak{L}$, łącząca p i b, jest identyczna ze zbiorem punktów postaci

$$\{\lambda\cdot b_0+\mu\cdot x_0,\ \lambda\cdot b_1+\mu\cdot x_1,\ \ldots,\ \lambda\cdot b_n+\mu\cdot x_n\}.$$

Punkty jej przecięcia z tworem $\mathfrak{A}$ znajdujemy z równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot(\lambda\cdot b_i+\mu\cdot x_i)\cdot(\lambda\cdot b_j+\mu\cdot x_j)=0.$$

Ponieważ b nie należy do $\mathfrak{A}$, więc dla punktów przecięcia $\mathfrak{L}$ z $\mathfrak{A}$ jest $\mu\neq 0$, co pozwala ostatniemu równaniu nadać postać

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\cdot\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b_j+2\,\frac{\lambda}{\mu}\cdot\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0. \tag{14}$$

Jeśli punkt p nie leży na $\mathfrak{A}$, mamy $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j\neq 0$, skąd wynika, że równanie (14) określa dwie (różne lub nie) wartości ilorazu $\frac{\lambda}{\mu}$ różne od zera; oznaczmy je przez $\frac{\lambda'}{\mu'}$ i $\frac{\lambda''}{\mu''}$. A więc punkty przecięcia $\mathfrak{L}$ z $\mathfrak{A}$ są postaci:

$$p'=\{\lambda'\cdot b_0+\mu'\cdot x_0,\ \lambda'\cdot b_1+\mu'\cdot x_1,\ \ldots,\ \lambda'\cdot b_n+\mu'\cdot x_n\},$$
$$p''=\{\lambda''\cdot b_0+\mu''\cdot x_0,\ \lambda''\cdot b_1+\mu''\cdot x_1,\ \ldots,\ \lambda''\cdot b_n+\mu''\cdot x_n\},$$

przy czym oba są różne od b i p. Wówczas na to, aby punkt p leżał na biegunowej punktu b, potrzeba i wystarcza, by $(b, p; p', p'')=-1$, czyli by $\frac{\lambda''\cdot\mu'}{\lambda'\cdot\mu''}=-1$, co równoważne jest równości $\frac{\lambda'}{\mu'}+\frac{\lambda''}{\mu''}=0$, która — wobec (14) — jest równoważna warunkowi (11).

Jeśli natomiast $p\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$, czyli $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, to aby punkt p leżał na biegunowej punktu b, potrzeba i wystarcza, by prosta $\mathfrak{L}$ była styczna do $\mathfrak{A}$, co wobec (14) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (11). W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

Punkt b, którego biegunową względem tworu $\mathfrak{A}$ jest dana $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna, nazywa się *biegunem* tej hiperpłaszczyzny względem $\mathfrak{A}$.

Wniosek 1. *Jeżeli punkt* b', *nie będący punktem osobliwym tworu* $\mathfrak{A}$, *leży na biegunowej punktu* b *(względem* $\mathfrak{A}$*), to punkt* b *leży na biegunowej punktu* b' *(względem* $\mathfrak{A}$*).*

Istotnie, jeśli $b'=\{b'_0, b'_1, \ldots, b'_n\}$, to obie te przynależności punktów do biegunowych wyrażają się analitycznie przez jedną i tę samą równość

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b'_j=0.$$

Wniosek 2. *Jeżeli twór* $\mathfrak{A}$ *przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *jest rozmaitością, to każda* $(n-1)$*-wymiarowa hiperpłaszczyzna przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *ma dokładnie jeden biegun względem* $\mathfrak{A}$.

Istotnie, ponieważ $\mathfrak{A}$ jest rozmaitością, więc jego wielki wyróżnik $\mathfrak{M}(f)=|A_{i,j}|\,(i, j=0, 1, \ldots, n)$ jest różny od zera. Wynika stąd, że dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny o równaniu

$$A_0\cdot x_0+A_1\cdot x_1+\ldots+A_n\cdot x_n=0$$

istnieje dokładnie jeden taki punkt $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}\,\varepsilon\,\mathfrak{P}_n$, że

$$\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i=A_j \quad \text{dla} \quad j=0, 1, \ldots, n.$$

Z wniosku 2 widzimy, że twór drugiego stopnia $\mathfrak{A}$, będący rozmaitością, wyznacza w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między punktami przestrzeni a $(n-1)$-wymiarowymi hiperpłaszczyznami. Przy tym punktowi $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ odpowiada hiperpłaszczyzna o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot x_j=0$, a więc hiperpłaszczyzna, której spółrzędnymi Plückera (określonymi w Nr 106) są liczby

$$B_j=\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i. \tag{15}$$

Wobec nieznikania wyznacznika $|A_{i,j}|$ $(i,j=0,1,\ldots,n)$ przyporządkowanie między układami liczb $b_0, b_1, \ldots, b_n$ a układami liczb $B_0, B_1, \ldots, B_n$, dane przez wzory (15), jest rzutowe. W szczególności, jeżeli twór $\mathfrak{A}$ jest dany przez równanie

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=0,$$

czyli jeżeli jest sferą o środku $\{1, 0, \ldots, 0\}$ i promieniu urojonym i, to równania (15) przybierają postać $B_j=b_j$ dla $j=0, 1, \ldots, n$, czyli rozpatrywane przyporządkowanie jest tym samym, które służyło nam (w Nr 106) za punkt wyjścia przy wprowadzeniu pojęcia figur dwoistych i zasady dwoistości.

Można więc powiedzieć, że w tym przypadku *przyporządkowanie między biegunami a biegunowymi realizuje zasadę dwoistości.*

W przypadku dowolnej innej rozmaitości $\mathfrak{A}$, przy tym przyporządkowaniu każdej figurze przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ odpowiada pewien obraz rzutowy figury dwoistej. Ponieważ, jak okazaliśmy w Nr 106, odpowiednikiem dwoistym zbioru punktów k-wymiarowej hiperpłaszczyzny jest zbiór $(n-1)$-wymiarowych hiperpłaszczyzn, przechodzących przez pewną $(n-k-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę, więc możemy wypowiedzieć następujący

Wniosek 3. *W przypadku rozmaitości drugiego stopnia, jeżeli biegun b przebiega zbiór punktów pewnej k-wymiarowej hiperpłaszczyzny, to odpowiednie biegunowe tworzą zbiór $(n-1)$-wymiarowych hiperpłaszczyzn, przechodzących przez pewną $(n-k-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę.*

W szczególności, *jeżeli b przebiega $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}$, to odpowiednie biegunowe tworzą zbiór wszystkich $(n-1)$-wymiarowych hiperpłaszczyzn, przechodzących przez punkt p, będący biegunem hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}$.*

Zauważmy dalej, że—przy przyporządkowaniu biegunom ich biegunowych—punktom rozmaitości $\mathfrak{A}$ odpowiadają hiperpłaszczyzny styczne w tych punktach.

Wynika stąd, że *tworem dwoistym do rozmaitości $\mathfrak{A}$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jest zbiór hiperpłaszczyzn stycznych do pewnej rozmaitości, będącej obrazem rzutowym rozmaitości $\mathfrak{A}$.*

Stanowi to uogólnienie wyniku otrzymanego w Nr 110 dla stożkowych.

ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ dane są dwa twory drugiego stopnia $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, będące rozmaitościami. Czy zawsze istnieje punkt b, dla którego biegunowe względem obu tych rozmaitości są jednakowe? Znaleźć taki punkt w przypadku $n=2$, gdy $\mathfrak{A}$ jest parabolą o równaniu $2x_0\cdot x_1-x_2^2=0$, zaś $\mathfrak{B}$ jest elipsą o równaniu $x_1^2+4x_2^2-1=0$.

2. Trójkąt nazywa się *samosprzężonym* ze względu na daną stożkową, jeżeli każdy jego bok jest biegunową przeciwległego wierzchołka.

Znaleźć trójkąt, który byłby samosprzężony względem każdej z dwóch krzywych o równaniach:

$$x_1^2+x_2^2+(a^2-1)\cdot x_0^2+2a\cdot x_0\cdot x_1=0, \quad x_1^2+x_2^2+(a^2-1)\cdot x_0^2+2a\cdot x_0\cdot x_1=0.$$

Przedyskutować zadanie w zależności od zmiennego parametru dodatniego a.

138. Hiperpłaszczyzny średnicowe. Jeżeli biegun b jest punktem niewłaściwym, czyli kierunkiem, biegunowa jego względem tworu $\mathfrak{A}$ nazywa się *hiperpłaszczyzną średnicową tworu $\mathfrak{A}$, sprzężoną z kierunkiem b.*

Jasne jest, że pojęcie to jest niezmiennikiem afinicznym. Hiperpłaszczyzna średnicowa nie jest określona, gdy kierunek b jest osobliwy.

Jeżeli punkt niewłaściwy b należy do $\mathfrak{A}$, czyli jeżeli b jest kierunkiem asymptotycznym, to biegunowa jego względem $\mathfrak{A}$ jest hiperpłaszczyzną styczną.

A więc *hiperpłaszczyzna średnicowa, sprzężona z kierunkiem asymptotycznym, jest hiperpłaszczyzną asymptotyczną.*

W szczególności może nią być hiperpłaszczyzna niewłaściwa, jak to stwierdziliśmy w Nr 136 dla paraboli.

Jeśli natomiast kierunek b nie jest asymptotyczny, to hiperpłaszczyzna średnicowa z nim sprzężona nie przechodzi przez b, a więc jest pewną hiperpłaszczyzną właściwą $\mathfrak{H}$. W tym przypadku każda prosta $\mathfrak{L}$ o kierunku b przecina twór $\mathfrak{A}$ w dwóch punktach (niekoniecznie różnych), które oznaczamy przez p' i p''. Jeżeli punkty te się pokrywają, to hiperpłaszczyzna $\mathfrak{H}$ przechodzi przez nie, jeśli zaś $p'\neq p''$, to $\mathfrak{L}$ przecina $\mathfrak{H}$ w punkcie p takim, że $(b, p; p', p'')=-1$, a ponieważ punkt b jest niewłaściwy, więc warunek ten (jak to okazane było w Nr 95 i 125) znaczy, że p jest środkiem pary punktów p', p''. Otrzymany wynik możemy ująć w postaci twierdzenia następującego:

Twierdzenie. *Zbiór punktów właściwych hiperpłaszczyzny średnicowej tworu $\mathfrak{A}$, sprzężonej z kierunkiem nieasymptotycznym b, jest identyczny ze zbiorem środków par p', p'' punktów właściwych tworu $\mathfrak{A}$, spółliniowych z b.*

W przypadku $n=2$ hiperpłaszczyzny średnicowe są prostymi średnicowymi. Jeżeli twór $\mathfrak{A}$ nie ma kierunków osobliwych (a więc np. jest stożkową), to każdemu kierunkowi $b=\{0, b_1, b_2\}$ płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ odpowiada sprzężona z nim prosta średnicowa. Oznaczmy ją przez $\mathfrak{L}(b)$.

Jej punkty niewłaściwe b' (których jest wiele jedynie w przypadku, gdy $\mathfrak{L}(b)$ jest prostą niewłaściwą) nazywamy *kierunkami sprzężonymi z* b.

Wobec wniosku 1 z Nr 137, prosta średnicowa, sprzężona z kierunkiem b', przechodzi zawsze przez b, czyli b jest kierunkiem sprzężonym z b'. Jeżeli prosta $\mathfrak{L}(b)$ jest niewłaściwą, to przechodzi przez swój biegun b, a więc jest styczną do tworu. Z wyjątkiem przeto przypadku, gdy prosta niewłaściwa jest styczną do tworu (co zachodzi dla paraboli, ale nie zachodzi ani dla elipsy, ani dla hiperboli), prosta $\mathfrak{L}(b)$ zawiera tylko jeden punkt niewłaściwy b'.

Wówczas ogół kierunków płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ rozpada się na pary kierunków sprzężonych, przy czym *kierunek jest sprzężony z samym sobą wtedy i tylko wtedy, gdy jest asymptotyczny.*

Przyporządkowanie każdemu kierunkowi kierunku z nim sprzężonego można uważać za przekształcenie φ prostej niewłaściwej $\mathfrak{L}_\infty$ płaszczyzny $\mathfrak{P}_2$ na siebie, przy czym dla każdego $p \varepsilon \mathfrak{L}_\infty$ spełniony jest warunek $\varphi\varphi(p)=p$.

Przekształcenie to jest więc *inwolucją* (por. Nr 118).

Łatwo sprawdzić, że przekształcenie to jest rzutowe.

PRZYKŁADY. Dla paraboli o równaniu $2x_0\cdot x_1-\dfrac{x_2^2}{d}=0$ prostą średnicową, sprzężoną z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2\}$, jest prosta o równaniu

$$b_1\cdot x_0-\frac{b_2\cdot x_2}{d}=0.$$

Jeżeli $b_2\neq 0$, to równanie jej można napisać w postaci $x_2=\dfrac{b_1\cdot d}{b_2}x_0$; jest to więc dowolna prosta, mająca kierunek wyjątkowy $\{0, 1, 0\}$.

Jeśli natomiast kierunek b jest wyjątkowy, czyli $b_2=0$, to prostą średnicową jest prosta niewłaściwa $x_0=0$.

Dla elipsy o równaniu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-x_0^2=0$ równanie prostej średnicowej, sprzężonej z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2\}$, ma postać $\dfrac{b_1\cdot x_1}{a_1^2}+\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}=0$. A więc prostymi średnicowymi są wszystkie proste przechodzące przez punkt $\{1, 0, 0\}$ i na odwrót, każda prosta średnicowa przechodzi przez ten punkt. Kierunkiem sprzężonym z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2\}$ jest kierunek $b'=\left\{0, \dfrac{b_2}{a_2^2}, -\dfrac{b_1}{a_1^2}\right\}$. Sprzężone same z sobą są jedynie kierunki asymptotyczne $\{0, a_1, i\cdot a_2\}$ i $\{0, a_1, -i\cdot a_2\}$.

Dla hiperboli o równaniu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-x_0^2=0$ równanie prostej średnicowej, sprzężonej z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2\}$, ma postać $\dfrac{b_1\cdot x_1}{a_1^2}-\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}=0$. A więc prostymi średnicowymi są wszystkie proste przechodzące przez punkt $\{1, 0, 0\}$ i na odwrót, każda prosta średnicowa przez punkt ten przechodzi. Kierunkiem sprzężonym z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2\}$ jest kierunek $b'=\left\{0, \dfrac{b_2}{a_2^2}, \dfrac{b_1}{a_1^2}\right\}$. Sprzężone same ze sobą są jedynie kierunki asymptotyczne $\{0, a_1, a_2\}$ i $\{0, a_1, -a_2\}$.

Podobnie znajdujemy równanie płaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2, b_3\}$, dla kwadryk w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$, a mianowicie:

Dla elipsoidy o równaniu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\dfrac{x_3^2}{a_3^2}-x_0^2=0$ równanie płaszczyzny średnicowej ma postać $\dfrac{b_1\cdot x_1}{a_1^2}+\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}+\dfrac{b_3\cdot x_3}{a_3^2}=0$.

Dla hiperboloidy dwupowłokowej o równaniu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}-1=0$ oraz jednopowłokowej o równaniu $\dfrac{x_1^2}{a_1^2}-\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$ równanie płaszczyzny średnicowej ma postać $\dfrac{b_1\cdot x_1}{a_1^2}-\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}-\dfrac{b_3\cdot x_3}{a_3^2}=0$.

We wszystkich tych trzech przypadkach ogół płaszczyzn średnicowych pokrywa się z ogółem płaszczyzn przechodzących przez punkt $\{1, 0, 0, 0\}$.

Dla paraboloidy eliptycznej o równaniu $\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\dfrac{x_3^2}{a_3^2}-2x_0\cdot x_1=0$ równanie płaszczyzny średnicowej ma postać $\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}+\dfrac{b_3\cdot x_3}{a_3^2}-x_0=0$, zaś dla paraboloidy hiperbolicznej o równaniu $\dfrac{x_2^2}{a_2^2}-\dfrac{x_3^2}{a_3^2}-2x_0\cdot x_1=0$ równanie płaszczyzny średnicowej ma postać $\dfrac{b_2\cdot x_2}{a_2^2}-\dfrac{b_3\cdot x_3}{a_3^2}-x_0=0$.

W obu tych przypadkach, jeżeli b jest kierunkiem wyjątkowym $\{0, 1, 0, 0\}$, płaszczyzna średnicowa jest niewłaściwa. W pozostałych zaś przypadkach jest płaszczyzną właściwą, równoległą do kierunku wyjątkowego $\{0, 1, 0, 0\}$ i przy tym dowolną taką płaszczyzną.

ĆWICZENIA. 1. Okazać, że wszystkie hiperpłaszczyzny średnicowe tworu o równaniu

$$3x_0^2+2x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_4^2-4x_0\cdot x_1+2x_1\cdot x_2+4x_3\cdot x_4=0$$

przechodzą przez pewną prostą. Znaleźć kierunek tej prostej.

2. Dla elipsy o równaniu $x_1^2+4x_2^2-x_0^2=0$ znaleźć takie proste średnicowe (rzeczywiste) sprzężone, by kąt między nimi zawarty był najmniejszy.

139. Środki. Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem określonym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$.

Środkiem tworu $\mathfrak{A}$ nazywamy punkt, który bądź jest punktem osobliwym dla $\mathfrak{A}$, bądź jest biegunem hiperpłaszczyzny niewłaściwej.

Z definicji tej wynika afiniczny charakter tego pojęcia.

Twierdzenie. *Aby punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ był środkiem tworu $\mathfrak{A}$, potrzeba i wystarcza, by spółrzędne jego spełniały układ równań*

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i=0 \quad \text{dla} \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Dowód. Dołączając do równań (16) równanie $\sum_{i=0}^{n} A_{i,0}\cdot c_i=0$, otrzymamy układ równań identyczny z układem (4), charakteryzującym punkty osobliwe tworu. Natomiast punkty c, spełniające równania (16) i takie, że $\sum_{i=0}^{n} A_{i,0}\cdot c_i\neq 0$, są z uwagi na równanie (12) biegunami hiperpłaszczyzny niewłaściwej. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Zauważmy, że równania (16), charakteryzujące środek, dają się również napisać w postaci

$$(17) \qquad f'_{x_j}(c)=0 \quad \text{dla} \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$.

Ze względu na twierdzenie z Nr 91 (wraz z następującą po nim uwagą), które — jak stwierdziliśmy w Nr 125 — przenosi się bez zmiany na przestrzenie zespolone, wynika stąd następujący

Wniosek 1. *Zbiór środków tworu $\mathfrak{A}$ jest $(n-l)$-wymiarową hiperpłaszczyzną, gdzie l jest rzędem macierzy $(A_{i,j})$ $(i=0, 1, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, n)$.*

Wniosek 2. *Aby twór $\mathfrak{A}$ miał dokładnie jeden środek, potrzeba i wystarcza, by rząd macierzy $(A_{i,j})$ $(i=0, 1, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, n)$ był równy n.*

Wniosek 3. *Aby twór $\mathfrak{A}$ miał dokładnie jeden środek, będący punktem właściwym, potrzeba i wystarcza, by mały wyróżnik $\overline{\mathrm{m}}(f)=|A_{i,j}|$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ był różny od zera.*

Wniosek 4. *Aby środek $c \in \mathfrak{C}_n$ tworu $\mathfrak{A}$ leżał na $\mathfrak{A}$, potrzeba i wystarcza, by c było punktem osobliwym tworu $\mathfrak{A}$.*

Istotnie, przy spełnieniu równań (16) równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot c_j=0$ jest w $\mathfrak{C}_n$ równoważne układowi równań (4).

Wniosek 5. *Każda hiperpłaszczyzna średnicowa tworu $\mathfrak{A}$ zawiera wszystkie środki tego tworu.*

Istotnie, podstawiając spółrzędne środka c do równania (12) hiperpłaszczyzny średnicowej sprzężonej z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, otrzymujemy $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\right)\cdot c_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_j\right)\cdot b_i=0$.

Wniosek 6. *Każda $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna, przechodząca przez wszystkie środki tworu $\mathfrak{A}$, jest hiperpłaszczyzną średnicową.*

Istotnie, jeśli $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna o równaniu

$$A_0\cdot x_0+A_1\cdot x_1+\ldots+A_n\cdot x_n=0$$

zawiera wszystkie punkty c spełniające równania (16), to w myśl wniosku 3 z Nr 91 istnieją liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$, nie wszystkie równe zeru i takie, że $A_i=\sum_{j=1}^{n} b_j\cdot A_{i,j}$ dla $i=0, 1, \ldots, n$. A więc równanie tej hiperpłaszczyzny ma postać $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_j\right)\cdot x_i=0$, czyli jest ona średnicowa, sprzężona z kierunkiem $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Wniosek 7. *Aby punkt $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}$ był środkiem tworu stopnia drugiego, potrzeba i wystarcza, by równanie jego nie zawierało wyrazów stopnia pierwszego względem $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Wynika to bezpośrednio z równań (16).

ĆWICZENIA. 1. Podać przykład tworu kwadratowego w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$, dla którego zbiór środków jest pewną płaszczyzną, leżącą w hiperpłaszczyźnie niewłaściwej przestrzeni $\mathfrak{P}_4$.

2. Okazać, że jeżeli prosta $\mathfrak{L}$ zawiera dokładnie jeden środek tworu $\mathfrak{A}$, to hiperpłaszczyzny biegunowe punktów należących do $\mathfrak{L}$ są równoległe.

3. Jeśli spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są stałe, to twory $\mathfrak{A}_\lambda$ określone przez równania $A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_n\cdot x_n^2-\lambda\cdot x_0^2=0$ mają wspólny środek i wspólne kierunki asymptotyczne. Okazać, że prosta $\mathfrak{L}$, nie przechodząca przez środek i nie mająca kierunku asymptotycznego, przecina $\mathfrak{A}_\lambda$ w dwóch punktach właściwych $p_\lambda(\mathfrak{L})$ i $p'_\lambda(\mathfrak{L})$, których środek nie zależy od λ.

140. Symetria względem środka. Między pojęciem środka tworu $\mathfrak{A}$ a wprowadzonym poprzednio pojęciem środka symetrii (w Nr 29 dla przestrzeni C_n, zaś w Nr 123 dla przestrzeni $\mathfrak{C}_n$) istnieje zależność, którą możemy wypowiedzieć w postaci twierdzenia następującego:

Twierdzenie. *Każdy właściwy środek tworu $\mathfrak{A}$ jest środkiem symetrii zbioru $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}_n$. Jeżeli zaś twór $\mathfrak{A}$ nie zawiera hiperpłaszczyzny niewłaściwej, to i na odwrót, każdy środek symetrii zbioru $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}_n$ jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0=1$, jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$. Jeżeli punkty $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $p'=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$, gdzie $x_0=x_0'=1$, są symetryczne względem c, to $x_i'=2c_i-x_i$ dla $i=0,1,\ldots,n$. Należy okazać, że jeśli $p\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$, to $p'\,\varepsilon\,\mathfrak{A}$.

Mamy

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i'\cdot x_j'=\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot(2c_i-x_i)\cdot(2c_j-x_j)=$$
$$=4\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot c_j-4\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot x_j+\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j.$$

Stąd i z uwagi na przynależność punktu p do $\mathfrak{A}$, oraz na równania (16), otrzymujemy:

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i'\cdot x_j'=4c_0\cdot\sum_{i=0}^{n} A_{i,0}\cdot c_i-4x_0\cdot\sum_{i=0}^{n} A_{i,0}\cdot c_i=0,$$

co świadczy o przynależności p' do $\mathfrak{A}$.

Załóżmy teraz, że twór $\mathfrak{A}$ nie zawiera hiperpłaszczyzny niewłaściwej $\mathfrak{H}_\infty$ i że punkt $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0=1$, nie jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$. Należy okazać, że c nie jest wówczas środkiem symetrii zbioru $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}_n$. Z założenia, że $\mathfrak{H}_\infty$ nie zawiera się w $\mathfrak{A}$, wynika, że równanie $\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot y_i\cdot y_j=0$ nie jest tożsamością, a więc określa w $\mathfrak{H}_\infty$ pewien twór $\mathfrak{A}^*$ stopnia pierwszego lub drugiego. Z założenia, że c nie jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$, wynika, że również tożsamością nie jest równanie $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot y_j=0$. Określa więc ono w $\mathfrak{H}_\infty$ pewną $(n-2)$-wymiarową hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}^*$. Weźmy punkt $q\,\varepsilon\,\mathfrak{H}_\infty-\mathfrak{A}^*$ i poprowadźmy przez q prostą $\mathfrak{L}^*\subset\mathfrak{H}_\infty$, nie leżącą w $\mathfrak{H}^*$. Prosta $\mathfrak{L}^*$ przetnie (na mocy wniosku z Nr 129) twór $\mathfrak{A}^*$ co najwyżej w dwóch punktach, zaś hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}^*$ w jednym punkcie. Istnieje więc punkt $b\,\varepsilon\,\mathfrak{L}^*-\mathfrak{A}^*-\mathfrak{H}^*$. Niech $b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$, gdzie $b_0=0$. Mamy zatem:

$$\text{(18)}\qquad \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b_j\neq 0\neq\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot b_j.$$

Przeprowadźmy przez c prostą $\mathfrak{L}$ o kierunku b. Jej punkty właściwe są postaci

$$p(t)=\{c_0+t\cdot b_0, c_1+t\cdot b_1, \ldots, c_n+t\cdot b_n\}.$$

Punkt przecięcia $\mathfrak{L}$ z tworem $\mathfrak{A}$ znajdujemy z równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot(c_i+t.b_i)\cdot(c_j+t.b_j)=0,$$

które ma postać:

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\cdot c_j+2t.\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i\right)\cdot b_j+t^2\cdot\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b_j=0.$$

Wobec (18) równanie to ma dwa (niekoniecznie różne) pierwiastki t' i t'' takie, że $t'+t''\neq 0$. A więc prosta $\mathfrak{L}$ przecina $\mathfrak{A}$ w punktach właściwych $p(t')$ i $p(t'')$, które nie są symetryczne względem c, gdyż środkiem pary $p(t')$, $p(t'')$ jest punkt

$$\left\{c_0,\ c_1+\frac{t'+t''}{2}\cdot b_1,\ \ldots,\ c_n+\frac{t'+t''}{2}\cdot b_n\right\}\neq c.$$

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

PRZYKŁADY. Dla tworu o równaniu $A_0\cdot x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_n\cdot x_n^2=0$ mały wyróżnik $\overline{\mathrm{m}}(f)$ równa się $A_1\cdot A_2, \ldots, A_n$. Jeżeli więc wszystkie spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są różne od zera, to w myśl wniosku 3 z Nr 139 twór posiada dokładnie jeden środek, będący punktem właściwym. Jest on przy tym na mocy ostatniego twierdzenia jedynym środkiem symetrii tworu.

Przypadek ten obejmuje w szczególności elipsę i hiperbolę na płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$, oraz elipsoidę i obie hiperboloidy w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$.

Dla paraboli o równaniu $2x_0\cdot x_1-\dfrac{x_2^2}{d}=0$ równania (16) mają postać

$$c_0=0,\quad -\frac{c_2}{d}=0,$$

skąd wynika, że jedynym środkiem paraboli jest punkt niewłaściwy $\{0, 1, 0\}$.

Dla paraboloid, których równania kanoniczne można napisać w postaci

$$\frac{x_2^2}{a_2^2}+\varepsilon\frac{x_3^2}{a_3^2}-2x_0\cdot x_1=0,\ \text{gdzie}\ \ \varepsilon=\pm 1,$$

równania (16) mają postać:

$$-c_0=0,\quad \frac{c_2}{a_2^2}=0,\quad \varepsilon\,\frac{c_3}{a_3^2}=0,$$

skąd wynika, że jedynym środkiem jest punkt niewłaściwy $\{0, 1, 0, 0\}$.

Przykładem tworu kwadratowego, mającego wiele środków, jest np. walec eliptyczny o równaniu $\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-x_0^2=0$ lub też układ dwóch płaszczyzn.

ĆWICZENIE. Okazać, że każdy twór będący obrazem afinicznym sfery (gdzie przekształcenie afiniczne wyraża się przez wzory o spółczynnikach na ogół zespolonych) ma dokładnie jeden środek symetrii.

141. Średnice. Niech $\underline{\mathfrak{A}}$ będzie rozmaitością określoną w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie

$$f=\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$$

i mającą dokładnie jeden środek c, będący punktem właściwym. W myśl wniosku 2 z Nr 134 oraz wniosku 3 z Nr 139, założenia te są równoważne arytmetycznemu warunkowi

$$\mathfrak{M}(f)\neq 0\neq \mathfrak{m}(f).$$

Na mocy wniosku 4 z Nr 139 środek c nie należy do $\mathfrak{A}$. Z uwagi na wniosek z Nr 129 każda prosta $\mathfrak{L}$, przechodząca przez c i nie posiadająca kierunku asymptotycznego, przecina $\mathfrak{A}$ co najmniej w jednym punkcie właściwym $s\;\varepsilon\;\mathfrak{A}$. Wówczas i punkt s', symetryczny do s względem c, jest właściwy i należy do $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}$. Ponieważ $s\neq s'$, więc z wniosku z Nr 129 wynika, że s i s' są jedynymi punktami przecięcia prostej $\mathfrak{L}$ z tworem $\mathfrak{A}$.

Parę nieuporządkowaną punktów s, s' nazywać będziemy *średnicą* tworu $\mathfrak{A}$ i oznaczać przez $(s\,;s')$.

Punkty s i s' są jej *końcami*, a kierunek prostej $\mathfrak{L}$ — *kierunkiem* tej *średnicy*.

Twierdzenie. *Hiperpłaszczyzny styczne w końcach średnicy są równoległe do hiperpłaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem tej średnicy.*

Dowód. Niech $s=\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ i $s'=\{\sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n\}$, przy czym $\sigma_0=\sigma'_0=1$ oraz $\frac{\sigma_i+\sigma'_i}{2}=c_i$, gdzie $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$. Kierunkiem średnicy $(s;s')$ jest

$$b=\{0, \sigma_1-\sigma'_1, \sigma_2-\sigma'_2, \ldots, \sigma_n-\sigma'_n\}.$$

Równania hiperpłaszczyzn stycznych do $\mathfrak{A}$ w punktach s i s' oraz równanie hiperpłaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem b, mają postać:

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot\sigma_i\right)\cdot x_j=0,\quad \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot\sigma'_i\right)\cdot x_j=0,\quad \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot(\sigma_i-\sigma'_i)\right)\cdot x_j=0.$$

By stwierdzić równoległość tych hiperpłaszczyzn, wystarczy okazać, że spółczynniki przy x_j dla $j=1, 2, \ldots, n$ są proporcjonalne. Proporcjonalność ta wynika stąd, że zależność

$$\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot(\sigma_i+\sigma'_i)=2\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot c_i=0\quad\text{dla}\quad j=1, 2, \ldots, n$$

pociąga za sobą zależność

$$\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot(\sigma_i-\sigma'_i)=2\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot\sigma_i=-2\sum_{i=0}^{n}A_{i,j}\cdot\sigma'_i.$$

ĆWICZENIE. W płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ dane są punkty właściwe s_1, s'_1, s_2, s'_2 takie, że środek pary s_1, s'_1 jest identyczny ze środkiem pary s_2, s'_2. Kiedy w $\mathfrak{P}_2$ istnieje twór stopnia drugiego, dla którego pary te są średnicami?

142. Średnice sprzężone i układy Apoloniusza.[1] Średnicę $(\bar{s};\bar{s}')$ nazywamy *sprzężoną* ze średnicą $(s;s')$, jeżeli $\bar{s}$ i $\bar{s}'$ leżą w hiperpłaszczyźnie średnicowej, sprzężonej z kierunkiem średnicy $(s;s')$.

Niech:

$$s=\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\},\quad s'=\{\sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n\},$$
$$\bar{s}=\{\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n\},\quad \bar{s}'=\{\bar{\sigma}'_0, \bar{\sigma}'_1, \ldots, \bar{\sigma}'_n\},$$

gdzie $\sigma_0=\sigma'_0=\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}'_0=1$. Ponieważ hiperpłaszczyzna średnicowa przechodzi przez środek tworu c (będący z założenia punktem właściwym), więc średnica $(\bar{s};\bar{s}')$ jest sprzężona ze średnicą $(s;s')$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt niewłaściwy $\{0, \bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}'_1, \bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}'_2, \ldots, \bar{\sigma}_n-\bar{\sigma}'_n\}$ spełnia równanie hiperpłaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem średnicy $(s;s')$, tj. z kierunkiem $\{0, \sigma_1-\sigma'_1, \sigma_2-\sigma'_2, \ldots, \sigma_n-\sigma'_n\}$.

Inaczej mówiąc, aby średnica $(\bar{s};\bar{s}')$ była sprzężona ze średnicą $(s;s')$, potrzeba i wystarcza, by zachodziła zależność:

$$\sum_{i,j=0}^{n}A_{i,j}(\sigma_i-\sigma'_i)\cdot(\bar{\sigma}_j-\bar{\sigma}'_j)=0.$$

Wynika stąd, że wówczas i na odwrót, średnica $(s;s')$ jest sprzężona z $(\bar{s};\bar{s}')$. Możemy więc mówić po prostu, że średnice $(s;s')$ i $(\bar{s};\bar{s}')$ są *sprzężone*.

Układ n średnic $(s_i;s'_i)$, gdzie $i=1, 2, \ldots, n$, tworu $\mathfrak{A}$ z których każde dwie są sprzężone, nazywać będziemy *układem Apoloniusza*, nie przesądzając na razie, czy układy takie istnieją.

[1] Apoloniusz z Pergi, matematyk grecki z III wieku przed Nar. Chr., pierwszy poddał systematycznemu badaniu własności stożkowych (metodą syntetyczną).

Zauważmy, że kierunki średnic tworzących układ Apoloniusza są liniowo niezależne.

Istotnie, w przeciwnym razie jeden z tych kierunków byłby liniowo zależny od pozostałych, a więc leżałby w hiperpłaszczyźnie z nim sprzężonej. Inaczej mówiąc, kierunek ten leżałby w swej własnej hiperpłaszczyźnie biegunowej. Jak wynika z definicji biegunowej (ob. Nr 137), znaczy to, że ten kierunek należałby do $\mathfrak{A}$, a więc byłby asymptotyczny, wbrew definicji średnic.

Jasne jest, że pojęcie układu Apoloniusza ma charakter afiniczny. Wynika stąd w szczególności, że spółrzędne $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$ punktów właściwych, które dotychczas uważaliśmy za spółrzędne kartezjańskie prostokątne, mogą być zastąpione przez dowolne spółrzędne ukośnokątne.

W szczególności, zakładając, że twór $\mathfrak{A}$ ma układ średnic Apoloniusza $(s_k; s_k')$, gdzie $k=1, 2, \ldots, n$, dobierzmy układ spółrzędnych ukośnokątnych w taki sposób, by początkiem jego był środek c, zaś kolejne osi spółrzędnych miały kierunki tych średnic.

Taki układ ukośnokątny nazywać będziemy *układem średnicowym*. Spółrzędne ukośnokątne $\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \ldots, \sigma_{k,n}$ punktu s_k, w tak wybranym układzie, mają postać $\sigma_{k,i}=\sigma_k\cdot\delta_k^i$, gdzie σ_k jest liczbą różną od 0 i niezależną od wskaźnika i, zaś δ_k^i jest (jak zwykle) liczbą 0 dla $k\neq i$, zaś liczbą 1 dla $k=i$. Wówczas:

$$s_k=\{1, \sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \ldots, \sigma_{k,n}\}, \quad s_k'=\{1, -\sigma_{k,1}, -\sigma_{k,2}, \ldots, -\sigma_{k,n}\}.$$

Średnica $(s_k; s_k')$ ma wtedy kierunek $\{0, \delta_k^1, \delta_k^2, \ldots, \delta_k^n\}$, a więc równanie hiperpłaszczyzny średnicowej, sprzężonej z tym kierunkiem, ma postać $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot\delta_k^i\right)\cdot x_j=0$, czyli postać $\sum_{j=0}^{n} A_{k,j}\cdot x_j=0$. Ponieważ hiperpłaszczyzna ta ma być identyczna z hiperpłaszczyzną o równaniu $x_k=0$, więc wynika stąd, że $A_{k,k}\neq 0$, i że $A_{k,j}=0$ dla $k\neq j$, gdzie $k=1, 2, \ldots, n$. Ponieważ środek $c=\{1, 0, \ldots, 0\}$ nie leży na tworze, więc $A_{0,0}\neq 0$. Równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma zatem postać:

(19) $A_{0,0}\cdot x_0^2+A_{1,1}\cdot x_1^2+\ldots+A_{n,n}\cdot x_n^2=0$, gdzie $A_{i,i}\neq 0$ dla $i=0, 1, \ldots, n$.

Jasne jest poza tym, że dla tworu $\mathfrak{A}$, mającego w pewnym układzie ukośnokątnym równanie postaci (19), średnice o kierunkach osi tworzą układ Apoloniusza. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Równanie tworu $\mathfrak{A}$ względem układu średnicowego ma postać* (19).

Na odwrót, jeśli twór $\mathfrak{A}$ ma w pewnym układzie ukośnokątnym równanie postaci (19), *to układ ten jest dla niego układem średnicowym.*

Wniosek. *Aby twór $\mathfrak{A}$ miał układ średnic Apoloniusza, potrzeba i wystarcza, by był on obrazem afinicznym sfery nie zdegenerowanej* (*gdzie przekształcenie afiniczne wyraża się przez wzory o spółczynnikach na ogół zespolonych*).

Istotnie, ponieważ istnienie układu Apoloniusza jest własnością afiniczną, więc warunek jest dostateczny. Jeśli zaś twór $\mathfrak{A}$ ma układ średnic Apoloniusza, to w myśl ostatniego twierdzenia, ma w pewnym układzie ukośnokątnym równanie postaci (19). Dobierzmy liczby (zespolone) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tak, by $a_0^2=-A_{0,0}$ oraz $a_i^2=A_{i,i}$ dla $i=1, 2, \ldots, n$. Przekształcenie afiniczne

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\left\{x_0, \frac{a_1}{a_0}\cdot x_1, \frac{a_2}{a_0}\cdot x_2, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\cdot x_n\right\}$$

przekształca wówczas twór $\mathfrak{A}$ na twór o równaniu $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-x_0^2=0$. Jasne jest, że twór, określony przez to równanie w układzie ukośnokątnym, jest obrazem afinicznym sfery, określonej przez to samo równanie w układzie prostokątnym.

ĆWICZENIA. 1. W układzie ukośnokątnym na płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ o początku $\{1, 0, 0\}$ i o wektorach podstawowych $[1, i]$ oraz $[1, -i]$ równanie $x_1^2+x_2^2-x_0^2=0$ określa pewną krzywą. Znaleźć równanie tej krzywej w zwykłym układzie prostokątnym.

2. Dla elipsoidy o równaniu $x_1^2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_3^2}{9}-x_0^2=0$ wyznaczyć taki układ średnic Apoloniusza, by jedna ze średnic miała kierunek $\{0, 5, 4i, 3i\}$. Znaleźć równanie tej elipsoidy w ukośnokątnym układzie spółrzędnych o początku 0 i o osiach, mających kierunki średnic wyznaczonego układu Apoloniusza.

143. Twierdzenie Apoloniusza. Wyznaczmy wszystkie układy Apoloniusza dla sfery S o równaniu

(20) $$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-x_0^2=0.$$

Jak stwierdziliśmy we wniosku z Nr 131, kierunki asymptotyczne dla S pokrywają się z kierunkami izotropowymi. Hiperpłaszczyzna średnicowa, sprzężona z kierunkiem nieizotropowym $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, ma równanie

$$b_1\cdot x_1+b_2\cdot x_2+\ldots+b_n\cdot x_n=0,$$

a więc $b'=\{0, b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ jest kierunkiem średnicy sprzężonej ze średnicą o kierunku b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b_1\cdot b'_1+b_2\cdot b'_2+\dots+b_n\cdot b'_n=0,$$

czyli gdy kierunki b i b' są prostopadłe.

Wynika stąd, że *na to, by średnice $(s_i; s'_i)$, gdzie $i=1, 2, \dots, n$, tworzyły układ Apoloniusza dla sfery S, potrzeba i wystarcza, by żadna z nich nie miała kierunku izotropowego i by kierunki ich były do siebie parami prostopadłe.*

Zajmiemy się obecnie dowodem twierdzenia, które dla przypadku elipsy i hiperboli odkryte zostało już w starożytności przez Apoloniusza. W przypadku ogólnym można je sformułować w postaci następującej:

Twierdzenie Apoloniusza. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie obrazem afinicznym (zespolonym) sfery nie zdegenerowanej i niech c oznacza środek tworu $\mathfrak{A}$. Istnieją wówczas takie liczby $\Omega_1(\mathfrak{A})$ i $\Omega_2(\mathfrak{A})$ zależne jedynie od tworu $\mathfrak{A}$, że dla każdego układu Apoloniusza średnic $(s_k; s'_k)$ tworu $\mathfrak{A}$ zachodzą równości:*

$$\sum_{k=1}^{n}\varrho^2(c,s_k)=\Omega_1(\mathfrak{A}), \qquad \omega(c, s_1, s_2, \dots, s_n)=\Omega_2(\mathfrak{A}),$$

gdzie $\omega(c, s_1, s_2, \dots, s_n)$ oznacza wyróżnik układu punktów $c, s_1, s_2, \dots, s_n$ (określony w Nr 22).

Dowód. Niech $\mathfrak{A}$ będzie obrazem sfery S o równaniu (20) przy przekształceniu afinicznym f, określonym przez wzór:

$$f(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \text{ gdzie}$$

$$(21)\quad \begin{cases} x_0=\overset{*}{x}_0 \\ x_i=a_{i,0}\cdot\overset{*}{x}_0+a_{i,1}\cdot\overset{*}{x}_1+\dots+a_{i,n}\cdot\overset{*}{x}_n, \text{ przy czym } |a_{i,j}|\ (i,j=1,2,\dots,n)\neq 0. \end{cases}$$

Jeżeli więc $(s_k; s'_k)$, gdzie $k=1, 2, \dots, n$, jest układem Apoloniusza średnic tworu $\mathfrak{A}$ oraz

$$s^*_k=f_{-1}(s_k) \quad\text{i}\quad s'^*_k=f_{-1}(s'_k),$$

to $(s^*_k; s'^*_k)$, gdzie $k=1, 2, \dots, n$, jest układem Apoloniusza średnic sfery S. Środek c tworu $\mathfrak{A}$ jest zaś równy $f(c^*)$, gdzie c^* jest środkiem sfery S, czyli $c^*=\{1, 0, \dots, 0\}$.

Niech $s^*_k=\{1, \sigma^*_{k,1}, \sigma^*_{k,2}, \dots, \sigma^*_{k,n}\}$. Wektory $\overrightarrow{(c^* s^*_k)}=(\sigma^*_{k,1}, \sigma^*_{k,2}, \dots, \sigma^*_{k,n})$ są parami prostopadłe i $\varrho^2(c^*, s^*_k)=1$, więc macierz $(\sigma^*_{k,j})$ $(k, j=1, 2, \dots, n)$ jest ortogonalna, skąd

$$\sum_{k=1}^{n}\overset{*}{\sigma}_{k,\mu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\nu}=\delta^{\nu}_{\mu} \quad\text{dla}\quad \mu,\nu=1,2,\dots,n.$$

Ze wzorów (21) wynika, że jeśli $[\overrightarrow{c\, s_k}]=[\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \dots, \sigma_{k,n}]$, to

$$(22)\qquad \sigma_{k,i}=\sum_{\mu=1}^{n}a_{i,\mu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\mu} \quad\text{dla}\quad k, i=1, 2, \dots, n.$$

A więc:

$$\sum_{k=1}^{n}\varrho^2(c,s_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2_{k,i}=\sum_{k,i=1}^{n}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}a_{i,\mu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\mu}\Big)\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}a_{i,\nu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\nu}\Big)=$$
$$=\sum_{i,k,\mu,\nu=1}^{n}a_{i,\mu}\cdot a_{i,\nu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\mu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\nu}=\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}a_{i,\mu}\cdot a_{i,\nu}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}\overset{*}{\sigma}_{k,\mu}\cdot\overset{*}{\sigma}_{k,\nu}\Big)=$$
$$=\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}a_{i,\mu}\cdot a_{i,\nu}\cdot\delta^{\nu}_{\mu}=\sum_{i,\nu=1}^{n}a^2_{i,\nu}.$$

Ponieważ prawa strona nie zależy od wyboru układu Apoloniusza, więc pierwsza część twierdzenia jest udowodniona.

Widzimy zarazem, że liczba $\sum_{i,\nu=1}^{n}a^2_{i,\nu}=\Omega_1(\mathfrak{A})$ zależy jedynie od tworu $\mathfrak{A}$ (a nie od wyboru przekształcenia afinicznego f), gdyż lewa strona $\sum_{k=l}^{n}\varrho^2(c, s_k)$ nie zależy od f.

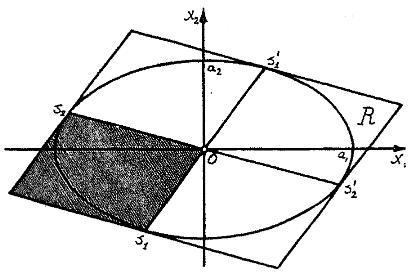
Przechodząc do dowodu drugiej części twierdzenia Apoloniusza, zauważmy, że wobec wzorów (22) mamy:

$$\omega(c, s_1, s_2, \dots, s_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ 1 & \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}^2=$$
$$=\big(|a_{i,\mu}|\ (i,\mu=1,2,\dots,n)\cdot|\overset{*}{\sigma}_{k,\mu}|\ (k,\mu=1,2,\dots,n)\big)^2=\big(|a_{i,\mu}|\ (i,\mu=1,2,\dots,n)\big)^2.$$

Ponieważ prawa strona wzoru nie zależy od wyboru układu Apoloniusza, więc i druga część twierdzenia jest udowodniona.

Widzimy zarazem, że kwadrat wyznacznika $|a_{i,\mu}|(i, \mu=1, 2, \dots, n)$ przekształcenia afinicznego, przy którym sfera S przechodzi na twór $\mathfrak{A}$, zależy jedynie od tworu $\mathfrak{A}$.

Specjalnie prosty sens geometryczny posiada twierdzenie Apoloniusza w przypadku klasycznym, gdy tworem $\mathfrak{A}$ jest elipsa o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-x_0^2=0$. W myśl twierdzenia z Nr 141 styczne w końcach średnic



Rys. 76

sprzężonych $(s_1; s_1')$ i $(s_2; s_2')$ mają kierunki sprzężone (rys. 76), a więc tworzą równoległobok R opisany na elipsie i posiadający sprzężone kierunki boków. Jest on rozpięty na wektorach $\overrightarrow{[s_1' s_1]} = 2\,\overrightarrow{[s\, s_1]}$ oraz $\overrightarrow{[s_2' s_2]} = 2\,\overrightarrow{[c\, s_2]}$. A więc twierdzenie Apoloniusza orzeka, że dla wszystkich takich równoległoboków *suma kwadratów dwóch boków przyległych jest stała* (równa $4\,\Omega_1(\mathfrak{A})$), i podobnie, że *stałe jest* jego *pole*, gdyż wyróżnik $\omega(c, s_1, s_2)$ równy jest (na mocy twierdzenia z Nr 46) kwadratowi pola równoległoboku, rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{c\, s_1}$ i $\overrightarrow{c\, s_2}$, będącego czwartą częścią równoległoboku R.

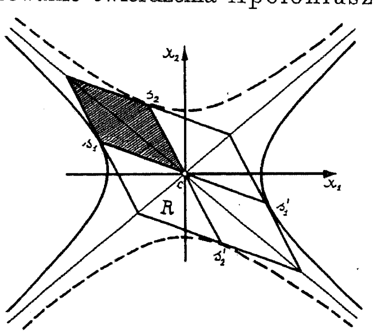
Podobnie przedstawia się sprawa w przypadku, gdy twór $\mathfrak{A}$ jest elipsoidą o równaniu $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - x_0^2 = 0$; ogólniej — w przypadku tworu w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} - x_0^2 = 0$$

rolę równoległoboku przejmuje równoległościan, ograniczony przez hiperpłaszczyzny styczne, poprowadzone w końcach średnic układu Apoloniusza.

Nieco bardziej kłopotliwe jest elementarno-geometryczne zinterpretowanie twierdzenia Apoloniusza w przypadku hiperboli o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_0^2 = 0.$$



Rys. 77

W tym przypadku (rys. 77), jeśli średnica $(s_1; s_1')$ jest rzeczywista, a więc jeśli $s_1 = \{1, \sigma_1, \sigma_2\}$, gdzie liczby rzeczywiste σ_1, σ_2 spełniają równanie $\frac{\sigma_1^2}{a_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$, to sprzężona z nią średnica ma równanie

$$\frac{\sigma_1 \cdot x_1}{a_1^2} - \frac{\sigma_2 \cdot x_2}{a_2^2} = 0 \tag{23}$$

i przecina hiperbolę w punktach urojonych:

$$s_2 = \left\{1,\ \sigma_2 \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot i,\ \sigma_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot i\right\} = i \cdot \left(\sigma_2 \cdot \frac{a_1}{a_2},\ \sigma_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}\right)$$

$$s_2' = \left\{1,\ -\sigma_2 \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot i,\ -\sigma_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot i\right\} = -\,i \cdot \left(\sigma_2 \cdot \frac{a_1}{a_2},\ \sigma_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}\right).$$

Zauważmy, że opuszczając czynnik i, otrzymamy punkty $\bar{s}_2$ i $\bar{s}_2'$, leżące na przecięciu średnicy o równaniu (23) z hiperbolą sprzężoną (w sensie ustalonym w Nr 67) z hiperbolą daną, a więc z hiperbolą o równaniu

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + x_0^2 = 0,$$

przy czym $\varrho^2(s_2, s_2') = -\varrho^2(\bar{s}_2, \bar{s}_2')$. Zatem:

$$\varrho^2(s_1, s_1') + \varrho^2(s_2, s_2') = \varrho^2(s_1, s_1') + \varrho^2(\bar{s}_2, \bar{s}_2').$$

Jeżeli więc weźmiemy równoległobok R, utworzony przez styczne do danej hiperboli w końcach jej średnicy rzeczywistej oraz przez styczne do sprzężonej z nią hiperboli w końcach średnicy o kierunku sprzężonym ze średnicą daną, to pierwsza część twierdzenia Apoloniusza orzekać będzie, że *różnica kwadratu boku stycznego do hiperboli danej i kwadratu boku stycznego do hiperboli sprzężonej jest stała.*

Natomiast druga część twierdzenia Apoloniusza orzeka, że *pole równoległoboku R jest stałe.*

Istotnie, wyróżnik $\omega(c, s_1, s_2)$ jest oczywiście równy $-\omega(c, s_1, \bar{s}_2)$, przy czym $\omega(c, s_1, \bar{s}_2)$ jest równe kwadratowi czwartej części pola równoległoboku R.

Warto zauważyć, że w przypadku hiperboli wierzchołki równoległoboku R leżą na jej asymptotach. Istotnie, jasne jest, że są one postaci $p = \varepsilon \cdot s_1 + \eta \cdot \bar{s}_2$, gdzie ε i η są liczbami przybierającymi wartości 1 lub -1.

Stąd: $p = \varepsilon \cdot (\sigma_1, \sigma_2) + \eta \cdot \left(\sigma_2 \cdot \frac{a_1}{a_2},\ \sigma_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}\right) = (\varepsilon \cdot \sigma_1 \cdot a_2 + \eta \cdot \sigma_2 \cdot a_1) \cdot \left(\frac{1}{a_2},\ \frac{\varepsilon \cdot \eta}{a_1}\right).$

Jeśli $\varepsilon \cdot \eta = 1$, punkt p leży na asymptocie o równaniu $\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0$, jeśli zaś $\varepsilon \cdot \eta = -1$, to leży na asymptocie o równaniu $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0$.

ĆWICZENIA. 1. Czy dla każdej elipsoidy istnieje układ Apoloniusza złożony z trzech średnic rzeczywistych, które wszystkie mają jednakowe długości? Znaleźć układ taki dla elipsoidy o równaniu $x_1^2+x_2^2+4\cdot x_3^2-4=0$.

2. Hiperboloidy o równaniach $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+x_0^2=0$ i $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}-x_0^2=0$ nazywamy *sprzężonymi*.

Okazać, że kierunki średnic tworzących układ Apoloniusza dla jednej z tych hiperboloid są zarazem kierunkami średnic, tworzących układ Apoloniusza dla drugiej z nich. Jeżeli kierunki te są rzeczywiste, to każdemu z nich odpowiada w jednej z tych hiperboloid średnica rzeczywista. Jak można zinterpretować twierdzenie Apoloniusza za pomocą równoległościanu, utworzonego przez płaszczyzny styczne w końcach tych trzech średnic rzeczywistych?

144. Kierunki główne. Niech P będzie tworem określonym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$.

Kierunek $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ nazywa się *głównym*, jeżeli jest on albo kierunkiem wyjątkowym, albo sprzężona z nim hiperpłaszczyzna średnicowa jest do niego prostopadła.

Równanie hiperpłaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem b, ma postać

(24)
$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\right)\cdot x_j=0.$$

Jeśli kierunek b nie jest wyjątkowy, to nie wszystkie spółczynniki $B_j=\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i$ dla $j=1, 2, \ldots, n$ znikają, a więc hiperpłaszczyzna o równaniu (24) jest właściwa. Na to, aby była ona prostopadła do kierunku b (pojęcie prostopadłości dla przestrzeni $\mathfrak{E}_n$ wprowadzone zostało w Nr 123), potrzeba i wystarcza, by spółczynniki $B_1, B_2, \ldots, B_n$ były proporcjonalne do $b_1, b_2, \ldots, b_n$, czyli by istniała taka liczba zespolona $\lambda\neq 0$, że

(25)
$$\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i=\lambda\cdot b_j \quad \text{dla} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Ponieważ dla $\lambda=0$ ten sam warunek (25) charakteryzuje kierunki wyjątkowe, a więc możemy ogólnie wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Aby kierunek $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}\ \varepsilon\ \mathfrak{P}_n$ był główny dla tworu $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, potrzeba i wystarcza, by dla pewnego zespolonego λ spełnione były równania* (25).

Równania (25) stanowią układ n równań liniowych jednorodnych względem $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Aby więc istniało rozwiązanie tego układu złożone nie z samych zer, potrzeba i wystarcza, by wyznacznik tego układu znikał, czyli by

(26)
$$\begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\lambda & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Zależność (26) jest równaniem n-tego stopnia względem liczby λ. *Każdemu pierwiastkowi tego równania odpowiada co najmniej jeden kierunek główny*, który znajdziemy, rozwiązując układ równań (25).

Warto zauważyć, że wobec twierdzenia z Nr 91 (które — jak zauważyliśmy w Nr 123 — przenosi się bez zmiany na przestrzenie zespolone) każdemu pierwiastkowi λ równania (26) odpowiada zbiór kierunków głównych, będący $(n-1-l)$-wymiarową hiperpłaszczyzną, gdzie l jest rzędem macierzy wyznacznika, stojącego po lewej stronie równania (26). Ponieważ w myśl zasadniczego twierdzenia algebry równanie (26) ma co najmniej jeden pierwiastek, więc otrzymujemy następujący

Wniosek. *Dla każdego tworu drugiego stopnia istnieje co najmniej jeden kierunek główny.*

Zauważmy przy tym, że jeśli λ' i λ'' są dwoma różnymi pierwiastkami równania (26), to odpowiadające im kierunki główne $b'=\{0, b_1', b_2', \ldots, b_n'\}$ oraz $b''=\{0, b_1'', b_2'', \ldots, b_n''\}$ są prostopadłe, czyli

(27)
$$b_1'\cdot b_1''+b_2'\cdot b_2''+\ldots+b_n'\cdot b_n''=0.$$

Istotnie, w myśl równań (25) jest

$$\lambda'\cdot b_j'=\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i' \quad \text{i} \quad \lambda''\cdot b_j''=\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i'',$$

skąd

$$(\lambda'-\lambda'')\cdot\sum_{j=1}^{n} b_j'\cdot b_j''=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i'\cdot b_j''-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i''\cdot b_j'=0,$$

co wobec $\lambda'\neq\lambda''$ daje równość (27).

Jeżeli kierunek główny b nie jest wyjątkowy (a więc odpowiada pierwiastkowi $\lambda\neq 0$ równania (26)), to sprzężona z nim hiperpłaszczyzna średnicowa właściwa (24) nazywa się *główną*.

Okażemy, że *każda hiperpłaszczyzna główna jest hiperpłaszczyzną symetrii tworu $\mathfrak{A}$*.

Niech więc $a=\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i $a'=\{a'_0, a'_1, \dots, a'_n\}$ będą dwoma punktami przestrzeni $\mathfrak{E}_n$, symetrycznymi względem hiperpłaszczyzny głównej $\mathfrak{H}$ o równaniu (24). Mamy dowieść, że przynależność jednego z tych punktów, np. a, do tworu $\mathfrak{A}$ pociąga za sobą przynależność drugiego a' do $\mathfrak{A}$. Zakładamy więc, że $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot a_i\cdot a_j=0$. Możemy przyjąć, że $a_0=a'_0=1$. Ponieważ kierunek $\{0, a_1-a'_1, a_2-a'_2, \dots, a_n-a'_n\}$ jest prostopadły do $\mathfrak{H}$, więc jest on identyczny z kierunkiem b. Kładąc $b_0=0$, możemy zatem przyjąć, że $a_i-a'_i=b_i$, czyli $a'_i=a_i-b_i$ dla $i=0, 1, \dots, n$. Wynika stąd, że

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot a'_i\cdot a'_j=\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot a_i\cdot a_j-2\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot a_i\cdot b_j+\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b_j=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_j\right)\cdot\left(b_i-2a_i\right)=-\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_j\right)\cdot\left(a_i+a'_i\right)=0,$$

gdyż punkt $\{a_0+a'_0, a_1+a'_1, \dots, a_n+a'_n\}=\left\{1, \frac{a_1+a'_n}{2}, \frac{a_2+a'_2}{2}, \dots, \frac{a_n+a'_n}{2}\right\}$ jest środkiem pary punktów a i a', a więc z założenia należy do $\mathfrak{H}$.

Układ Apoloniusza, złożony ze średnic $(s_i; s'_i)$, gdzie $i=1, 2, \dots, n$, tworu $\mathfrak{A}$ nazywa się *głównym*, jeżeli średnice te są parami do siebie prostopadłe.

Jasne jest, że *na to, by układ Apoloniusza był główny, potrzeba i wystarcza, by każda z jego średnic miała kierunek główny.* Do kwestii istnienia układów głównych powrócimy jeszcze w Nr 153 (wniosek 15).

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć kierunki główne oraz główny układ Apoloniusza dla krzywej, określonej w $\mathfrak{P}_2$ przez równanie

$$41x_1^2+34x_2^2-25x_0^2+10x_0\cdot x_1+3x_0\cdot x_1-24x_1\cdot x_2=0.$$

2. Znaleźć kierunki główne i trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii dla powierzchni, określonej w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ przez równanie

$$-4x_0^2+2x_1^2+x_2^2+13x_3^2-2x_0\cdot x_1+2x_0\cdot x_2-2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_3+4x_2\cdot x_3=0.$$

ROZDZIAŁ XVIII

Podstawy klasyfikacji tworów drugiego stopnia

145. Wielki wyróżnik. Wśród interesujących nas własności figur najobszerniejszą klasę stanowią tzw. *własności metryczne*, czyli te, które są niezmiennikami przekształceń izometrycznych (określonych analitycznie w Nr 84, 121 i 124 również dla przestrzeni niemetrycznych P_n, $\mathfrak{E}_n$ i $\mathfrak{P}_n$).

Te spośród własności metrycznych, które są niezmiennikami obszerniejszej od izometrii klasy przekształceń afinicznych, nazywamy *własnościami afinicznymi.*

Jeszcze obszerniejszej klasie przekształceń rzutowych odpowiada jeszcze węższa klasa niezmienników, stanowiących tzw. *własności rzutowe.*

Wynika stąd, że klasyfikacja metryczna — przy której do jednej klasy zaliczamy dwie figury wtedy i tylko wtedy, gdy ich własności metryczne są identyczne — jest najdalej posunięta. Mniej szczegółową jest klasyfikacja afiniczna, oparta na niezmiennikach afinicznych, jeszcze mniej — klasyfikacja rzutowa, oparta na niezmiennikach rzutowych.

W odniesieniu do tworów pierwszego stopnia w przestrzeni P_n klasyfikacja metryczna i afiniczna pokrywają się ze sobą, dając jedynie dwie klasy: jedną, zawierającą ogół $(n-1)$-wymiarowych hiperpłaszczyzn właściwych, drugą, złożoną z $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny niewłaściwej, przy czym z punktu widzenia własności rzutowych, oba te rodzaje hiperpłaszczyzn nie różnią się między sobą — jak to wynika z wniosku 12 z Nr 87.

Z rozważań, przeprowadzonych w rozdziałach VII, VIII i XVII, okazało się, że znacznie większa różnorodność występuje wśród tworów drugiego stopnia.

W tym rozdziale zajmiemy się ustaleniem podstaw, na których oprzeć będziemy mogli klasyfikację tych ostatnich tworów. W tym celu zajmiemy się ustaleniem pewnych niezmienników liczbowych, wyrażających się za pomocą spółczynników równania danego tworu. Z niezmiennikami tego rodzaju spotkaliśmy się już w Nr 134, gdzie dowiedliśmy (wniosek 1), że tzw. pierwszy wskaźnik rzutowy tworu $\mathfrak{A}$, czyli rząd macierzy wielkiego wyróżnika równania tego tworu, jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych, oraz w Nr 136, gdzie stwierdziliśmy niezmienniczość afiniczną tzw. pierwszego wskaźnika afinicznego tworu $\mathfrak{A}$, czyli rzędu macierzy małego wyróżnika. Dowody tych niezmienniczości miały charakter geometryczny. Udowodnimy obecnie twierdzenie, z którego w szczególności wynikać będzie na drodze czysto algebraicznej nie tylko niezmienniczość rzędu macierzy obu wyróżników, ale i inne jeszcze własności.

Twierdzenie. *Jeżeli twór $\mathfrak{A}$, określony w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie*

$$\sum_{k,l=0}^{n} A_{k,l}\cdot x_k\cdot x_l=0, \tag{1}$$

poddamy przekształceniu rzutowemu $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$, *gdzie*

$$x_k=\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\cdot x'_i, \tag{2}$$

to twór przekształcony $\mathfrak{A}'=f(\mathfrak{A})$ *mieć będzie równanie* $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x'_i\cdot x'_j=0$, *przy czym*

$$(A'_{i,j})(i, j=0, 1, \ldots, n)= \tag{3}$$
$$=(a_{k,i})(i, k=0, 1, \ldots, n)\cdot(A_{k,l})(k, l=0, 1, \ldots, n)\cdot(a_{l,j})(l, j=0, 1, \ldots, n).$$

Dowód. Równanie tworu $\mathfrak{A}'$ otrzymamy, podstawiając do równania (1) wzory (2). Lewa strona równania (1) przybierze postać:

$$\sum_{k,l=0}^{n} A_{k,l}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\cdot x'_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} a_{l,j}\cdot x'_j\right)=\sum_{i,j=0}^{n}\left(\sum_{k,l=0}^{n} A_{k,l}\cdot a_{k,i}\cdot a_{l,j}\right)\cdot x'_i\cdot x'_j,$$

a więc równanie tworu $\mathfrak{A}'$ ma postać

$$\sum_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x'_i\cdot x'_j=0, \tag{4}$$

gdzie

$$A'_{i,j}=\sum_{k,l=0}^{n} a_{k,i}\cdot a_{l,j}\cdot A_{k,l}, \tag{5}$$

co znaczy, w myśl wzoru (1) z Nr 20, że zachodzi wzór (3), co było do okazania.

Mówimy, że *równanie* (4) *otrzymane zostało z równania* (1) *przez dokonanie przekształcenia rzutowego* f.

Ponieważ w myśl twierdzenia z Nr 59 pomnożenie macierzy przez macierz kwadratową o wyznaczniku różnym od zera nie zmienia jej rzędu, więc ze wzoru (3) wynika w szczególności niezmienniczość rzędu macierzy wielkiego wyróżnika przy przekształceniach rzutowych, którą na innej drodze stwierdziliśmy już w Nr 134. Biorąc dalej pod uwagę, że wyznacznik iloczynu macierzy równy jest iloczynowi wyznaczników tych macierzy oraz że macierze $(a_{k,i})(i, k=0, 1, \ldots, n)$ i $(a_{l,j})(l, j=0, 1, \ldots, n)$ mają ten sam wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6}$$

zwany *wyznacznikiem przekształcenia rzutowego* f_{-1}, *odwrotnego względem* f, otrzymujemy z ostatniego twierdzenia następujący

Wniosek 1. *Wielki wyróżnik równania otrzymanego z równania* (1) *przez przekształcenie rzutowe f jest równy iloczynowi wielkiego wyróżnika równania* (1) *przez kwadrat wyznacznika przekształcenia odwrotnego* f_{-1}.

Wynika stąd, że jeżeli zarówno spółczynniki $A_{i,j}$, jak $a_{i,j}$ są wszystkie rzeczywiste, to przy tym przekształceniu znak wielkiego wyróżnika się zachowuje. Jak wiemy jednak z Nr 132, twór $\mathfrak{A}$ wyznacza swe równanie z dokładnością do czynnnika stałego. Jeżeli zaś równanie tworu pomnożymy przez czynnnik $\lambda\neq 0$, to wielki wyróżnik równania ulegnie pomnożeniu przez λ^{n+1}. A więc dla n nieparzystego znak wielkiego wyróżnika (o ile ograniczamy się do równań o spółczynnikach rzeczywistych) jest przez twór jednoznacznie wyznaczony. Możemy więc wypowiedzieć następujący

Wniosek 2. *Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to znak wielkiego wyróżnika równania* $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ *o spółczynnikach rzeczywistych stanowi niezmiennik przekształceń rzutowych rzeczywistych tworu określonego przez to równanie.*

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć znak wielkiego wyróżnika równania każdej z pięciu kwadryk.

2. W przestrzeni $\mathfrak{P}_5$ dane są dwa twory drugiego stopnia przez równania:

$$4x_0^2-4x_0x_1-4x_0x_4+21x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_5+3x_2^2+2x_2x_3+4x_2x_5+x_3^2+4x_4^2+4x_5^2=0,$$
$$4x_0^2-4x_0x_1-4x_0x_4-11x_1^2-12x_1x_2-8x_1x_5+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_5+x_3^2+4x_4^2-4x_5^2=0.$$

Okazać, że twory te są rozmaitościami (w sensie Nr 134, str. 335) i zbadać, czy istnieje przekształcenie rzutowe rzeczywiste, przekształcające pierwszy z nich na drugi.

146. Mały wyróżnik. Niech teraz $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$ będzie przekształceniem afinicznym. Afiniczne jest wówczas również przekształcenie odwrotne $f_{-1}(x_0', x_1', \ldots, x_n')=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Wyraża się ono przez wzory postaci:

$$x_k=\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\cdot x_i', \quad \text{gdzie} \quad a_{0,0}=1 \quad \text{oraz} \quad a_{0,i}=0 \quad \text{dla} \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Twór $\mathfrak{A}$, określony przez równanie (1), zostanie przez f przekształcony na twór $\mathfrak{A}'$, określony przez równanie (4), którego spółczynniki $A'_{i,j}$ wyrażają się przez wzory (5). A więc dla $i, j=1, 2, \ldots, n$ mamy:

$$A_{i,j}'=\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,i}\cdot a_{l,j}\cdot A_{k,l},$$

skąd wynika, że

$$(A'_{i,j})(i, j=1, 2, \ldots, n)= \tag{7}$$
$$=(a_{k,i})(i, k=1, 2, \ldots, n)\cdot(A_{k,l})(k, l=1, 2, \ldots, n)\cdot(a_{l,j})(l, j=1, 2, \ldots, n).$$

Możemy zatem wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Jeżeli twór $\mathfrak{A}$, określony w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie* (1), *poddamy przekształceniu afinicznemu* $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$,

gdzie $x_0=x_0'$ *oraz* $x_k=\sum_{i=0}^{n} a_{k,i}\cdot x_i'$ *dla* $k=1, 2, \ldots, n$, *to twór przekształcony* $\mathfrak{A}'=f(\mathfrak{A})$ *ma równanie* (4), *przy czym spełniony jest warunek* (7).

Wynika stąd na mocy twierdzenia z Nr 59 niezmienniczość rzędu macierzy małego wyróżnika przy przekształceniach afinicznych, czyli niezmienniczość afiniczna pierwszego wskaźnika afinicznego, którą już na innej drodze stwierdziliśmy w Nr 136.

Stwierdzamy dalej, że przy przekształceniu afinicznym f mały wyróżnik $(A_{i,j})(i, j=1, 2, \ldots, n)$ równania (1) ulega pomnożeniu przez kwadrat wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{8}$$

zwanego *wyznacznikiem przekształcenia afinicznego f_{-1}, odwrotnego względem f*. Stąd wynika

Wniosek 1. *Mały wyróżnik równania, otrzymanego z równania* (1) *przez przekształcenie afiniczne f, jest równy iloczynowi małego wyróżnika równania* (1) *przez kwadrat wyznacznika przekształcenia odwrotnego f_{-1}.*

Zauważmy, że wyznacznik (8) jest szczególnym przypadkiem wyznacznika (6), w którym w pierwszym wierszu mamy na pierwszym miejscu jedynkę, poza tym zaś same zera.

W razie gdy spółczynniki $A_{i,j}$ i $a_{i,j}$ są rzeczywiste, z wniosku 1 wynika, że przy przekształceniu afinicznym mały wyróżnik zachowuje swój znak. Ponieważ w myśl twierdzenia z Nr 132 twór $\mathfrak{A}$ wyznacza swe równanie z dokładnością do czynnika stałego, więc wnioskujemy stąd natychmiast, że dla n parzystego znak małego wyróżnika jest przez twór wyznaczony jednoznacznie. Możemy więc wypowiedzieć następujący

Wniosek 2. *Jeżeli n jest liczbą parzystą, to znak małego wyróżnika równania* $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ *o spółczynnikach rzeczywistych stanowi niezmiennik przekształceń afinicznych rzeczywistych tworu określonego przez to równanie.*

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć znak małego wyróżnika równania każdej z trzech stożkowych.

2. W przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ dany jest twór $\mathfrak{A}_\alpha$ przez równanie:

$$2x_0^2-4x_0\cdot x_1+\alpha\cdot x_1^2-2x_1\cdot x_2-x_2^2+2x_2\cdot x_3-3x_3^2+4x_3\cdot x_4+2x_4^2=0.$$

Dobrać trzy wartości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ parametru α w taki sposób, by twory $\mathfrak{A}_{\alpha 1}$, $\mathfrak{A}_{\alpha 2}$, $\mathfrak{A}_{\alpha 3}$ były wszystkie różne pod względem afinicznym.

147. Wielomian charakterystyczny. Zagadnienie wyznaczenia tzw. kierunków głównych dla tworu $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ doprowadziło nas w Nr 144 do równania, którego lewą stronę stanowi wielomian stopnia n względem zmiennej niezależnej λ, dany w postaci następującego wyznacznika:

$$V(\lambda)=\begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\lambda & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Ze względu na zasadniczą rolę tego wielomianu w metrycznej klasyfikacji tworów drugiego stopnia, nazywa się on *wielomianem charakterystycznym.*

Zajmiemy się zbadaniem niektórych jego własności. Zauważmy przede wszystkim, że daje się on również napisać w postaci

$$V(\lambda)=|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Ponieważ twór $\mathfrak{A}$ wyznacza swe równanie jedynie z dokładnością do czynnika liczbowego, więc wielomian charakterystyczny $V(\lambda)$ nie jest przez twór $\mathfrak{A}$ jednoznacznie wyznaczony, lecz wraz z nim charakterystyczne dla tworu $\mathfrak{A}$ są wszystkie wielomiany, jakie otrzymamy, zastępując liczby $A_{i,j}$ przez liczby do nich proporcjonalne. Jak wiadomo jednak z algebry, każdy wielomian n-tego stopnia daje się przedstawić jednoznacznie w postaci $c\cdot(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$, gdzie liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ stanowią układ jego pierwiastków (z uwzględnieniem ich krotności), zaś c jest stałą. Otóż zastąpienie liczb $A_{i,j}$ przez liczby do nich proporcjonalne $\varrho\cdot A_{i,j}$ (gdzie $\varrho\neq 0$) prowadzi do wielomianu, którego pierwiastkami są liczby $\varrho\cdot\lambda_i$.

A więc wprawdzie sam wielomian charakterystyczny nie jest przez twór $\mathfrak{A}$ jednoznacznie wyznaczony, lecz *układ jego pierwiastków jest wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności*.

Z tego względu będziemy ten układ nazywać krócej *układem pierwiastków charakterystycznych tworu* $\mathfrak{A}$.

Oczekiwać by można *a priori*, że dla $n>1$ wystąpią wśród tych pierwiastków liczby zespolone, nawet gdy wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste. Okazuje się jednak, że tak nie jest, gdyż zachodzi następujące

Twierdzenie. *Jeżeli wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste oraz gdy $A_{i,j}=A_{j,i}$ dla $i, j=1, 2, \ldots, n$, to wszystkie pierwiastki równania*[1]

$$|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=1, 2, \ldots, n)=0$$

są rzeczywiste.

Dowód. Jeżeli λ jest pierwiastkiem równania $V(\lambda)=0$, to układ n równań liniowych jednorodnych

$$(10)\qquad \begin{array}{l} (A_{1,1}-\lambda)\cdot x_1+A_{1,2}\cdot x_2+\ldots+A_{1,n}\cdot x_n=0\\ A_{2,1}\cdot x_1+(A_{2,2}-\lambda)\cdot x_2+\ldots+A_{2,n}\cdot x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{n,1}\cdot x_1+A_{n,2}\cdot x_2+\ldots+(A_{n,n}-\lambda)\cdot x_n=0 \end{array}$$

ma rozwiązanie niezerowe, tj. istnieje układ n liczb (na ogół zespolonych) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nie wszystkich równych zeru, które spełniają te równania. Oznaczając dla każdej liczby zespolonej $x=\xi+i\cdot\eta$ przez $\bar{x}$ liczbę z nią sprzężoną $\xi-i\cdot\eta$, mamy $x\cdot\bar{x}=|x|^2$, a więc

$$x_1\cdot\bar{x}_1+x_2\cdot\bar{x}_2+\ldots+x_n\cdot\bar{x}_n>0.$$

[1] Równanie to nazywa się czasem *sekularnym* czyli *wiekowym*, ze względu na rolę, jaką odgrywa ono w teorii tzw. zmian wiekowych w ruchach planet.

Ponieważ wraz z układem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wszystkie układy proporcjonalne są też rozwiązaniami równań (10), więc możemy od razu założyć, że

$$x_1\cdot\bar{x}_1+x_2\cdot\bar{x}_2+\ldots+x_n\cdot\bar{x}_n=1.$$

Równania (10) możemy też napisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_j=\lambda\cdot x_i \quad \text{dla} \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Mnożąc te równania stronami odpowiednio przez liczby $\bar{x}_i$ i dodając, otrzymamy $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_j\cdot\bar{x}_i=\lambda$. Ponieważ dodawanie i mnożenie liczb sprzężonych daje liczby sprzężone, więc $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\bar{A}_{i,j}\cdot\bar{x}_j\cdot x_i=\bar{\lambda}$, skąd wynika wobec $\bar{A}_{i,j}=A_{j,i}$, że $\lambda=\bar{\lambda}$. A więc liczba λ jest rzeczywista.

Uwaga. Dowód powyższy nie ulegnie zmianie, jeżeli założenie rzeczywistości spółczynników $A_{i,j}$ oraz równości $A_{i,j}=A_{j,i}$ dla $i, j=1, 2, \ldots, n$ zastąpimy przez słabsze założenie, że spółczynniki $A_{i,j}$ są liczbami zespolonymi, spełniającymi warunek $\bar{A}_{i,j}=A_{j,i}$ dla $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Macierz $(A_{i,j})\,(i, j=1, 2, \ldots, n)$, spełniająca to słabsze założenie, nazywa się *macierzą Hermite'a*.[1]

Biorąc pod uwagę twierdzenie z Nr 144, otrzymujemy z ostatniego twierdzenia następujący

Wniosek. *Dla każdego rzeczywistego tworu drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ istnieje co najmniej jeden rzeczywisty kierunek główny.*

ĆWICZENIE. W $\mathfrak{P}_n$ dany jest twór o równaniu

$$\sum_{i,j=0}^{n}(1-\delta_i^j)\cdot x_i\cdot x_j=0.$$

Znaleźć układ jego pierwiastków charakterystycznych.

148. Niezmienniczość wielomianu charakterystycznego. Poddajmy twór $\mathfrak{A}$ przekształceniu izometrycznemu f, które każdemu punktowi $p=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}\;\varepsilon\;\mathfrak{P}_n$ przyporządkowuje punkt $p'=f(p)=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$, przy czym założyć możemy, że $x_0'=x_0$. Przekształcenie odwrotne $p=f_{-1}(p')$ jest wówczas też izometrią, a więc określone jest przez wzory:

$$x_0=x_0' \quad \text{oraz} \quad x_k=a_{k,0}\cdot x_0'+a_{k,1}\cdot x_1'+\ldots+a_{k,n}\cdot x_n' \quad \text{dla } k=1, 2, \ldots, n,$$

[1] Charles Hermite, matematyk francuski (1822—1901).

o spółczynnikach na ogół zespolonych, przy czym macierz

$$(a_{k,i})\,(k,\, i=1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

jest ortogonalna, czyli spełniony jest warunek:

$$(11)\qquad \sum_{r=1}^{n} a_{r,i}\cdot a_{r,j}=\delta_j^i \quad \text{dla}\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Izometria f przekształci twór $\mathfrak{A}$ na twór $\mathfrak{A}'$, określony (z uwagi na twierdzenie z Nr 145) przez równanie $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x'_i\cdot x'_j=0$, gdzie

$$(12)\qquad A'_{i,j}=\sum_{k,\,l=1}^{n} A_{k,l}\cdot a_{k,i}\cdot a_{l,j} \quad \text{dla}\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Zachodzi wówczas następujące

Twierdzenie. *Z zależności* (11) *i* (12) *wynika identyczność wielomianów charakterystycznych*:

$$V(\lambda)=|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

oraz

$$V'(\lambda)=|A'_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Możemy to również wypowiedzieć w postaci następującej:

Wielomian charakterystyczny jest niezmiennikiem przekształceń izometrycznych.

Dowód. Z warunku (11) wynika, że $\delta_i^j=\sum\limits_{k,\,l=1}^{n}\delta_k^l\cdot a_{k,i}\cdot a_{l,j}$. Stąd i wobec (12) mamy:

$$V'(\lambda)=\Big|\sum_{k,\,l=1}^{n}(A_{k,l}-\delta_k^l)\cdot a_{k,i}\cdot a_{l,j}\Big|\,(i,j=1,2,\ldots,n)=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\cdot\Big[\sum_{l=1}^{n}(A_{k,l}-\delta_k^l)\cdot a_{l,j}\Big]\Big|\,(i,j=1,2,\ldots,n)=$$

$$=|a_{k,i}|\,(k,i=1,2,\ldots,n)\cdot\Big|\sum_{l=1}^{n}A_{k,l}-\delta_k^l)\cdot a_{l,j}\Big|\,(k,j=1,2,\ldots,n)=$$

$$=|a_{k,i}|\,(k,i=1,2,\ldots,n)\cdot|A_{k,l}-\delta_k^l|\,(k,l=1,2,\ldots,n)\cdot|a_{l,j}|\,(l,j=1,2,\ldots,n)=$$

$$=[\,|a_{k,i}|\,(k,i=1,2,\ldots,n)]^2\cdot V(\lambda)=V(\lambda),$$

ponieważ $[\,|a_{k,i}|\,(k,i=1,2,\ldots,n)]^2=\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k,i}\cdot a_{k,j}\Big|\,(i,j=1,2,\ldots,n)=$

$=|\delta_i^j|\,(i,j=1,2,\ldots,n)=1.$

Wniosek. *Układ pierwiastków charakterystycznych tworu $\mathfrak{A}$ jest niezmiennikiem przekształceń izometrycznych.*

Należy przy tym pamiętać, że układ tych pierwiastków jest przez twór określony jedynie z dokładnością do proporcjonalności. Okazaliśmy, że w przypadku, gdy wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste, układ pierwiastków charakterystycznych składa się z liczb rzeczywistych. Wynika stąd, że liczba $k(\mathfrak{A})$ pierwiastków charakterystycznych różnych od zera, jak również liczba $l(\mathfrak{A})$, równa bezwzględnej wartości różnicy między liczbą pierwiastków dodatnich a ujemnych, stanowią własności geometryczne tworu $\mathfrak{A}$ (w dziedzinie rzeczywistej). Okażemy później (w Nr 153 i 158), że te dwie liczby całkowite nieujemne $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ są niezmiennikami przekształceń rzeczywistych afinicznych tworu $\mathfrak{A}$; na nich oprzemy klasyfikację afiniczną rzeczywistych tworów drugiego stopnia.

Na razie zauważmy jedynie, że mając dane równanie $\sum\limits_{i,j=0}^{n}A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ (o spółczynnikach liczbowych rzeczywistych), możemy zawsze obliczyć wartości liczb $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$.

Istotnie, wiadomo z algebry (na podstawie tzw. twierdzenia Sturma[1]), jak można dla danego wielomianu obliczyć liczbę jego pierwiastków dodatnich i ujemnych.

Wielomian charakterystyczny $V(\lambda)$ możemy przedstawić w postaci

$$(13)\qquad V(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}B_1\cdot\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}B_2\cdot\lambda^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots-B_{n-1}\cdot\lambda+B_n.$$

Wiadomo z algebry, że spółczynnik B_i jest funkcją symetryczną i-tego stopnia względem pierwiastków równania. Wynika stąd, że dla i parzystego znak spółczynnika B_i jest niezmiennikiem geometrycznym tworu $\mathfrak{A}$ (w dziedzinie rzeczywistej).

Podobnie rzecz się ma z iloczynami parzystej liczby spółczynników B_i o nieparzystych wskaźnikach i.

Jasny jest wreszcie niezmienniczy charakter znikania któregokolwiek z tych spółczynników. Niezmienniki te mają znaczenie z tego względu, że obliczenie ich nie nastręcza żadnych trudności algebraicznych — w przeciwieństwie do obliczenia samych pierwiastków charakterystycznych.

[1] Charles Sturm, matematyk francuski (1803—1855). Wspomniane twierdzenie ustala elementarną metodę, pozwalającą dla danego wielomianu o spółczynnikach liczbowych (rzeczywistych) wyznaczyć liczbę pierwiastków leżących w danym przedziale rzeczywistym.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć liczby $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ dla wszystkich stożkowych i kwadryk.

2. Obliczyć liczby $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ dla tworu $\mathfrak{A}$, danego w przestrzeni $\mathfrak{P}_6$ przez równanie:

$$x_0^2+2x_0\cdot x_1-x_1^2-2x_1\cdot x_2+4x_3\cdot x_4-6x_5\cdot x_6+x_6^2=0.$$

149. Znaki pierwiastków charakterystycznych w przypadkach $n=2$ i $n=3$.

Stwierdziliśmy w Nr 148, że liczby $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ dają się zawsze obliczyć. Metoda ogólna (oparta na twierdzeniu Sturma) jest jednak dość kłopotliwa, toteż celowe jest podanie prostszych metod dla przypadków $n=2$ i $n=3$, praktycznie najważniejszych.

Dla $n=2$ wielomian charakterystyczny ma postać

$$\lambda^2-B_1\cdot\lambda+B_2,$$

przy czym

$$B_1=\lambda_1+\lambda_2 \quad\text{i}\quad B_2=\lambda_1\cdot\lambda_2,$$

gdzie λ_1, λ_2 są jego pierwiastkami. Niezmiennikiem jest znak spółczynnika B_2. Dla $B_2>0$ oba pierwiastki mają znaki zgodne, więc $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=2$, zaś dla $B_2<0$ jest $k(\mathfrak{A})=2$ i $l(\mathfrak{A})=0$. Wreszcie dla $B_2=0$ mamy $k(\mathfrak{A})=1$ i $l(\mathfrak{A})=1$, jeśli $B_1\neq0$; natomiast $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=0$, jeśli $B_1=0$.

Dla $n=3$ wielomian charakterystyczny ma postać

$$-\lambda^3+B_1\cdot\lambda^2-B_2\cdot\lambda+B_3=(\lambda_1-\lambda)\cdot(\lambda_2-\lambda)\cdot(\lambda_3-\lambda),$$

przy czym

$$B_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad B_2=\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot\lambda_3+\lambda_2\cdot\lambda_3,\quad B_3=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3.$$

Niezmiennikiem jest znak spółczynnika B_2 oraz iloczynu $B_1\cdot B_3$. Niezmienniczy charakter ma również znikanie któregokolwiek ze spółczynników B_1, B_2, B_3.

Możemy założyć, że

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\lambda_3.$$

Okażemy, że na to, by wszystkie liczby λ_1, λ_2, λ_3 miały jednakowy znak, potrzeba i wystarcza, by obie liczby B_2 i $B_1\cdot B_3$ były dodatnie.

Warunek jest oczywiście konieczny, a więc pozostaje stwierdzić jego dostateczność, czyli okazać, że przypuszczenie nierówności

$$B_2>0,\quad B_1\cdot B_3>0,\quad \lambda_1<0<\lambda_3$$

doprowadza do sprzeczności.

Otóż z nierówności tych wynika, że $-\lambda_1^3>0$ i $B_2\cdot\lambda_1<0$, co wobec

$$(14)\qquad -\lambda_1^3+B_1\cdot\lambda_1^2-B_2\cdot\lambda_1+B_3=0$$

daje $B_1\cdot\lambda_1^2+B_3<0$, skąd wobec $B_1\cdot B_3>0$ wynika, że obie liczby B_1 i B_3 są ujemne. Równanie (14) nie mogłoby być wówczas spełnione przez liczbę dodatnią λ_3.

Otrzymany wynik możemy wypowiedzieć w postaci twierdzenia następującego:

Twierdzenie. *Wielomian $\lambda^3-B_1\cdot\lambda^2+B_2\cdot\lambda-B_3$ o pierwiastkach rzeczywistych ma wszystkie pierwiastki jednego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno B_2 jak $B_1\cdot B_3$ jest dodatnie.*

Jeżeli więc $B_2>0$ i $B_1\cdot B_3>0$, to wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego mają jednakowy znak, skąd $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=3$. Jeżeli $B_3\neq0$, lecz co najmniej jedna z liczb B_2 i $B_1\cdot B_3$ nie jest dodatnia, to dwa pierwiastki mają jeden znak, zaś trzeci ma znak przeciwny, skąd $k(\mathfrak{A})=3$ i $l(\mathfrak{A})=1$.

Jeżeli $B_3=0$ i $B_2<0$, to $\lambda_1<0=\lambda_2<\lambda_3$, skąd $k(\mathfrak{A})=2$ i $l(\mathfrak{A})=0$.

Jeśli $B_3=0$ i $B_2>0$, to jeden z pierwiastków jest zerem, a pozostałe mają jednakowy znak, skąd $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=2$.

Jeżeli $B_3=B_2=0$, lecz $B_1\neq0$, to jeden tylko z pierwiastków jest różny od zera, czyli $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=1$.

Jeśli wreszcie $B_3=B_2=B_1=0$, to wszystkie pierwiastki znikają, czyli $k(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})=0$.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć liczby $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ dla tworu $\mathfrak{A}$, danego w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ przez równanie:

$$2x_0^2-x_0\cdot x_1+x_0\cdot x_2-3x_0\cdot x_3-6x_1^2+5x_1\cdot x_2-8x_1\cdot x_3-x_2^2+3x_2\cdot x_3-2x_3^2=0.$$

2. Obliczyć liczby $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ dla tworu $\mathfrak{A}$, danego w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ przez równanie:

$$x_0^2-2x_0\cdot x_1+4x_0\cdot x_2-x_1^2+6x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_3+3x_2^2-8x_2\cdot x_3+4x_3^2=0.$$

150. Wielomian pseudocharakterystyczny.

Wśród grupy wszystkich przekształceń izometrycznych przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie wyróżniamy podgrupę, złożoną z tzw. *obrotów dokoła początku układu* czyli izometrii, przy których punkt $\{1, 0, \ldots, 0\}$ przechodzi na siebie.

Jasne jest, że izometrie te są identyczne z przekształceniami postaci $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{x_0', x_1', \ldots, x_n'\}$, gdzie między spółrzędnymi x_i i x_j' zachodzą zależności:

$$x_i=a_{i,0}\cdot x_0'+a_{i,1}\cdot x_1'+\ldots+a_{i,n}\cdot x_n' \quad\text{dla } i=0, 1, \ldots, n,$$

gdzie $a_{0,0}=1$, $a_{0,i}=a_{i,0}=0$ dla $i=1, 2, \ldots, n$, a $(a_{i,j})$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ jest macierzą ortogonalną. Zauważmy jednak, że wówczas również macierz $(a_{i,j})(i, j=0, 1, \ldots, n)$ jest ortogonalna, a więc

(15) $$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,i}\cdot a_{\nu,j}=\delta_i^j \quad \text{dla} \quad i,j=0,1,\ldots,n.$$

Po tym przekształceniu twór $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{k,l=0}^{n} A_{k,l}\cdot x_k\cdot x_l=0$ przejdzie na twór $\mathfrak{A}'$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x'_i\cdot x'_j=0$, gdzie

(16) $$A'_{i,j}=\sum_{k,l=0}^{n} A_{k,l}\cdot a_{k,i}\cdot a_{l,j} \quad \text{dla} \quad i,j=0,1,\ldots,n.$$

Zależności (15) i (16) różnią się od zależności (11) i (12) jedynie rozciągnięciem zakresu zmienności wskaźników na liczby $0, 1, \ldots, n$ (zamiast na liczby $1, 2, \ldots, n$) lub — co na jedno wychodzi — przejściem do wymiaru o jeden wyższego. Stosując do tak podwyższonego wymiaru twierdzenie z Nr 148 otrzymujemy następujące

Twierdzenie. *Z zależności* (15) *i* (16) *wynika identyczność wielomianów:*

$$W(\lambda)=|A_{i,j}-\lambda\delta_i^j|\,(i,j=0,1,\ldots,n) \ \textit{i}\ W'(\lambda)=|A'_{i,j}-\lambda\delta_i^j|\,(i,j=0,1,\ldots,n).$$

A więc *wielomian* $W(\lambda)=|A'_{i,j}-\lambda\,\delta_i^j|\,(i, j=0, 1, \ldots, n)$ *jest niezmiennikiem obrotów dokoła początku układu.*

Wielomian ten nazywać będziemy *pseudocharakterystycznym* dla równania $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$.

W razie gdy wszystkie spółczynnniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste, wszystkie jego pierwiastki (na mocy twierdzenia z Nr 147) są rzeczywiste.

Podobnie jak wielomian charakterystyczny, wielomian pseudocharakterystyczny nie jest przez twór $\mathfrak{A}$ wyznaczony, lecz *układ jego pierwiastków jest przez* $\mathfrak{A}$ *wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności.* Pierwiastki te będziemy nazywali krótko *pseudocharakterystycznymi.*

Z ostatniego twierdzenia wynika

Wniosek 1. *Układ pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego jest niezmiennikiem obrotów dokoła początku układu.*

Załóżmy w szczególności, że początek układu $\{1, 0, \ldots, 0\}$ jest środkiem tworu $\mathfrak{A}$. A więc spółrzędne jego spełniają układ równań:

(17) $$\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i=0 \quad \text{dla} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Wynika stąd, że

(18) $$A_{0,j}=A_{j,0}=0 \quad \text{dla} \ j=1,2,\ldots,n,$$

a więc równanie tworu ma postać

(19) $$A_{0,0}\cdot x_0^2+\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0.$$

Niech teraz $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0=1$, będzie jakimkolwiek innym środkiem właściwym tworu $\mathfrak{A}$. Przesunięcie $\varphi(p)=p^*$, gdzie

$$x_0=x_0^*, \quad x_i=x_i^*-c_i\cdot x_0^* \ \text{dla} \ i=1, 2, \ldots, n$$

jest izometrią, przy której punkt $\{1, 0, \ldots, 0\}$ przejdzie na punkt c. Twór $\mathfrak{A}$ o równaniu (19) przejdzie na twór $\mathfrak{A}^*$ o równaniu

$$A_{0,0}\cdot x_0^{*2}+\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot(x_i^*-c_i\cdot x_0^*)\cdot(x_j^*-c_j\cdot x_0^*)=0,$$

które ze względu na (17) nie różni się od równania (19). Stąd i z uwagi na ostatnie twierdzenie wynika następujący

Wniosek 2. *Układ pierwiastków pseudocharakterystycznych równania tworu w układzie prostokątnym, którego początkiem jest środek właściwy tworu, nie zależy od tego, który ze środków właściwych tworu został obrany za początek układu spółrzędnych.*

Układ pierwiastków pseudocharakterystycznych równania w układzie prostokątnym, którego początkiem jest środek właściwy tworu, jest przez twór wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności; nazywać go będziemy *układem pierwiastków pseudocharakterystycznych* tworu (mającego środek właściwy).

ĆWICZENIA. 1. Pokazać na przykładzie, że układ pierwiastków pseudocharakterystycznych nie jest niezmiennikiem przesunięć.

2. Obliczyć pierwiastki pseudocharakterystyczne dla paraboloidy hiperbolicznej, której wierzchołek (w sensie z Nr 78) leży w początku układu spółrzędnych.

151. Postać kanoniczna równania drugiego stopnia (twierdzenie o redukcji). Jeżeli w równaniu kwadratowym $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ (odniesionym do pewnego prosto- lub ukośnokątnego układu spółrzędnych) wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ dla $i \neq j$ znikają, to mówimy, że równanie ma *postać kanoniczną pierwszego rodzaju*.

Ponieważ role zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są jednakowe, więc nie zmniejszając ogólności, przyjąć możemy, że spółczynniki $A_i = A_{i,i}$ przy zmiennych $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ są nie rosnące co do bezwzględnej wartości. Istnieje zatem liczba całkowita k taka, że $0 \leqq k \leqq n$ i że $A_i \neq 0$ dla $1 \leqq i \leqq k$, natomiast $A_i = 0$ dla $i > k$. Postać kanoniczna pierwszego rodzaju daje się więc napisać jak następuje:

$$\sum_{i=0}^{k} A_i \cdot x_i^2 = 0, \quad \text{gdzie } A_i \neq 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k. \tag{20}$$

Taką postać miały równania elipsy z Nr 66, hiperboli z Nr 67, elipsoidy z Nr 74, obu hiperboloid z Nr 75 i 76, jak również walca eliptycznego i hiperbolicznego oraz stożka z Nr 73.

Natomiast o równaniu $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$ mówimy, że *ma postać kanoniczną drugiego rodzaju*, jeżeli dla pewnego $i_0 \neq 0$ spółczynnik $A_{0,i_0} = A_{i_0,0}$ jest różny od zera, natomiast znikają spółczynniki $A_{0,0}$, A_{i_0,i_0} oraz wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$, gdzie $i \neq j$, w których para (i,j) różni się od par $(0, i_0)$ i $(i_0, 0)$. Zmieniając ewentualnie numerację spółrzędnych, przyjąć możemy, że $i_0 = n$, dzieląc zaś równanie przez liczbę A_{0,i_0}, możemy założyć, że jest ona równa 1. Wynika stąd, że istnieje liczba całkowita $0 \leqq k < n$ taka, że postać kanoniczna drugiego rodzaju wyraża się wzorem:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i \cdot x_i^2 + 2x_0 \cdot x_n = 0, \quad \text{gdzie} \quad A_i \neq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{21}$$

Taką postać miały równania paraboli z Nr 65, walca parabolicznego z Nr 73 oraz obu paraboloid z Nr 77 i 78.

Zajmiemy się teraz tzw. *twierdzeniem o redukcji równania kwadratowego*, które stanowi podstawę klasyfikacji tworów drugiego stopnia.

Twierdzenie o redukcji. *Dla każdego tworu w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, określonego przez równanie postaci $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$, istnieje przekształcenie afiniczne f, przekształcające go na twór określony przez równanie, mające postać kanoniczną, przy czym postać ta jest pierwszego rodzaju, jeżeli twór ma co najmniej jeden środek właściwy, drugiego zaś rodzaju, jeśli twór środków właściwych nie posiada.*

Jeżeli twór jest rzeczywisty (tj. jeżeli wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są liczbami rzeczywistymi), *to za przekształcenie f można zawsze wziąć pewną izometrię rzeczywistą.*

Interpretując przekształcenie afiniczne jako zmianę układu spółrzędnych na inny układ spółrzędnych (na ogół ukośnokątnych), a izometrię jako zmianę układu spółrzędnych prostokątnych na inny układ spółrzędnych prostokątnych, możemy twierdzenie to sformułować w następujący sposób:

Dla każdego tworu określonego w $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$ istnieje (na ogół ukośnokątny) układ spółrzędnych U, w którym równanie tworu ma postać kanoniczną: pierwszego rodzaju, jeżeli twór ma przynajmniej jeden środek właściwy, drugiego zaś — w przypadku przeciwnym.

Jeżeli twór jest rzeczywisty, to układ U znaleziony być może zawsze wśród układów prostokątnych rzeczywistych.

Dowód tego twierdzenia podany będzie w Nr 152.

Uwaga 1. Jasne jest, że twór określony (w dowolnym ukośnokątnym układzie spółrzędnych) przez równanie (20) ma środek w $\{1, 0, \ldots, 0\}$, określony zaś przez równanie (21) — środka właściwego nie ma, gdyż pierwsze z równań $\sum\limits_{i=0}^{n} A_{i,j} \cdot c_i = 0$ określających środek (podanych w Nr 139) przybiera postać $x_0 = 0$. A więc oba przypadki wyróżnione w tezie twierdzenia nawzajem się wyłączają.

Uwaga 2. Jeżeli w drugiej części twierdzenia o redukcji (dotyczącej istnienia izometrii f) pominiemy założenie rzeczywistości spółczynników $A_{i,j}$, to przestanie ona być prawdziwa nawet gdy nie będzie się żądać *rzeczywistości* izometrii f. Istotnie, weźmy pod uwagę w płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ twór określony przez równanie

$$x_0^2 + (1 - i) \cdot x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + (1 + i) \cdot x_2^2 = 0.$$

Twór ten jest rozmaitością mającą jedyny środek w punkcie $\{1, 0, 0\}$. Gdyby izometria $f(x_0, x_1, x_2) = \{x_0', x_1', x_2'\}$ przekształcała ten twór na twór o równaniu postaci (20), to przy niej punkt $\{1, 0, 0\}$ przejść by musiał na siebie, a więc izometria f wyrażałaby się przez wzory postaci

$$x_0 = x_0', \quad x_1 = a_{1,1} \cdot x_1' + a_{1,2} \cdot x_2', \quad x_2 = a_{2,1} \cdot x_1' + a_{2,2} \cdot x_2',$$

gdzie macierz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

jest ortogonalna. Wynika stąd, że $a_{2,1}=\varepsilon\cdot a_{1,2}$ i $a_{2,2}=-\varepsilon\cdot a_{1,1}$, gdzie ε oznacza 1 lub —1. Twór przekształcony ma więc równanie

$$x_0'^2+(1-i)\cdot(a_{1,1}\cdot x_1'+a_{1,2}\cdot x_2')^2+2\varepsilon\cdot(a_{1,1}\cdot x_1'+a_{1,2}\cdot x_2')\cdot(a_{1,2}\cdot x_1'-a_{1,1}\cdot x_2')+$$
$$+(1+i)\cdot(a_{1,2}\cdot x_1'-a_{1,1}\cdot x_2')^2=0.$$

Aby równanie to miało postać kanoniczną, spółczynnik przy $x_1'\cdot x_2'$ powinien znikać, czyli

$$(1-i)\cdot a_{1,1}\cdot a_{1,2}+\varepsilon\cdot(a_{1,2}^2-a_{1,1}^2)-(1+i)\cdot a_{1,1}\cdot a_{1,2}=0,$$

skąd
$$-2i\cdot\varepsilon\cdot a_{1,1}\cdot a_{1,2}+a_{1,2}^2-a_{1,1}^2=0,$$

czyli $(a_{1,2}-i\cdot\varepsilon\cdot a_{1,1})^2=0$. Więc $a_{1,2}-i\cdot\varepsilon\cdot a_{1,1}=0$, skąd $a_{1,2}^2+a_{1,1}^2=0$, wbrew ortogonalności macierzy $(a_{i,j})(i,j=1,2)$.

Przypuszczenie, że twór jest izometryczny z tworem określonym przez równanie o postaci kanonicznej, prowadzi więc do sprzeczności.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć kierunki główne dla tworu określonego przez równanie, mające postać kanoniczną pierwszego, jako też drugiego rodzaju.

2. Jakie warunki muszą spełniać spółczynniki równania o postaci kanonicznej (pierwszego, jako też drugiego rodzaju), aby twór określony przez to równanie był rozmaitością?

152. Sprowadzenie równania kwadratowego do postaci kanonicznej (dowód twierdzenia o redukcji). Załóżmy najpierw, że twór $\mathfrak{A}$ określony w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, ma przynajmniej jeden środek właściwy $c=\{c_0,c_1,\dots,c_n\}$. W myśl twierdzenia z Nr 139 jest wówczas

$$\sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i=0 \quad \text{dla} \quad j=1,2,\dots,n. \tag{22}$$

W przypadku, gdy spółczynniki są rzeczywiste, środek c może być znaleziony wśród punktów rzeczywistych, ponieważ układ równań liniowych charakteryzujących środek jest z założenia niesprzeczny, a spółczynniki jego są rzeczywiste. Przenosząc do c początek układu spółrzędnych (przez przesunięcie), sprowadzamy przypadek ogólny do przypadku, gdy $c=\{1,0,\dots,0\}$. Z równań (22) wynika wówczas równość $A_{0,j}=A_{j,0}=0$ dla $j=1,2,\dots,n$. A więc równanie tworu ma postać $A_{0,0}\cdot x_0^2+\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, co w przypadku $n=1$ jest żądaną postacią

kanoniczną. W dalszym ciągu będziemy więc zakładać, że $n>1$ oraz że twierdzenie o redukcji jest prawdziwe w przestrzeniach o wymiarze $<n$.

Jeżeli wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste, to w myśl wniosku z Nr 147 istnieje dla $\mathfrak{A}$ kierunek główny rzeczywisty $b=\{0,b_1,\dots,b_n\}$. W tym przypadku obierzmy układ spółrzędnych U' rzeczywisty i prostokątny $x_0',x_1',\dots,x_n'$ o niezmienionym początku c, taki, by oś x_n' miała kierunek b. Niech równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma w tym układzie postać $\sum_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x_i'\cdot x_j'=0$. Wówczas

$$A'_{0,j}=A'_{j,0}=0 \quad \text{dla } j=1,2,\dots,n,$$

gdyż środek tworu pozostał w początku układu spółrzędnych. Biorąc dalej pod uwagę, że kierunek $\{0,0,\dots,0,1\}$ jest główny, mamy

$$A'_{n,j}=A'_{j,n}=0 \quad \text{dla } j=0,1,\dots,n-1,$$

a więc równanie tworu ma postać:

$$A'_{0,0}\cdot x_0'^2+\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{i,j}\cdot x_i'\cdot x_j'+A'_{n,n}\cdot x_n'^2=0. \tag{23}$$

Jeżeli nie wszystkie spółczynniki są rzeczywiste, to obieramy dowolny kierunek rzeczywisty b nie asymptotyczny, tj. taki, by $\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\cdot b_i\cdot b_j\neq 0$; w myśl lematu 1 z Nr 128, kierunek taki zawsze istnieje. Hiperpłaszczyzna średnicowa $\mathfrak{H}$ sprzężona z kierunkiem b przechodzi przez środek c, lecz nie przechodzi przez b, a więc możemy znaleźć taki układ U' spółrzędnych $x_0',x_1',\dots,x_n'$ o niezmienionym początku c, by oś x_n' miała kierunek b, a pozostałe osie leżały w hiperpłaszczyźnie $\mathfrak{H}$. Niech równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma w tym układzie postać $\sum_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x_i'\cdot x_j'=0$. Wobec założenia co do środka, jest wtedy $A'_{0,j}=A'_{j,0}=0$ dla $j=1,2,\dots,n$. Poza tym, hiperpłaszczyzna średnicowa sprzężona z kierunkiem osi x_n ma równanie

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} A'_{i,j}\cdot\delta_i^n\right)\cdot x_j'=0,$$

czyli $\sum_{j=0}^{n} A'_{n,j}\cdot x_j'=0$, a ponieważ jest ona identyczna z hiperpłaszczyzną o równaniu $x_n'=0$, zatem $A'_{n,j}=A'_{j,n}=0$ dla $j=1,2,\dots,(n-1)$. I w tym więc przypadku równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma w układzie U' równanie postaci (23).

Jeżeli równanie

$$A'_{0,0}\cdot x_0'^2+\sum_{i,j=1}^{n-1}A'_{i,j}\cdot x'_i\cdot x'_j=0 \tag{24}$$

jest tożsamością, to równanie (23) ma postać kanoniczną. Jeżeli zaś (24) nie jest tożsamością, to określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-1}$ pewien twór $\mathfrak{A}'$ mający środek w punkcie $c=\{1, 0, \ldots, 0\}$, przy czym jeśli spółczynniki $A_{i,j}$ były rzeczywiste, to rzeczywiste są również i spółczynniki $A'_{i,j}$. Wobec założenia indukcyjnego możemy w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-1}$ znaleźć taki układ spółrzędnych ukośnokątny (który w przypadku rzeczywistych tworów przyjąć możemy za rzeczywisty prostokątny) o początku c, że po przejściu do tego układu twór $\mathfrak{A}'$ będzie miał równanie postaci kanonicznej pierwszego rodzaju. Niech przejście do tych nowych spółrzędnych w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-1}$ wyznaczają wzory:

$$x'_0=x^*_0,\quad x'_i=a_{i,0}\cdot x^*_0+a_{i,1}\cdot x^*_1+\ldots+a_{i,n-1}\cdot x^*_{n-1}\quad \text{dla } i=1, 2, \ldots, n-1. \tag{25}$$

A więc podstawienie tych wzorów do równania (24) nadaje mu postać kanoniczną pierwszego rodzaju. Biorąc $x'_n=x^*_n$, otrzymamy łącznie ze wzorami (25) wzory na zmianę spółrzędnych w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ (na ogół na ukośnokątne, zaś gdy twór był rzeczywisty—na prostokątne rzeczywiste), po której równanie (23) przyjmie postać kanoniczną pierwszego rodzaju. W ten sposób dowód twierdzenia, w przypadku gdy twór ma co najmniej jeden środek właściwy, został zakończony.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy twór $\mathfrak{A}$ środka właściwego nie ma. Równanie tworu możemy wówczas napisać w postaci

$$x_0\cdot(A_{0,0}\cdot x_0+2A_{1,0}\cdot x_1+\ldots+2A_{n,0}\cdot x_n)+\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0. \tag{26}$$

Jeżeli nie wszystkie $A_{i,j}$, gdzie $i, j=1, 2, \ldots n$, znikają, to równanie $\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ określa w $\mathfrak{P}_n$ pewien twór $\mathfrak{A}_0$ o środku $\{1, 0, \ldots, 0\}$. A więc, w myśl załatwionego już przypadku twierdzenia o redukcji, przez odpowiednią zmianę układu spółrzędnych (na ukośnokątny w przypadku ogólnym, zaś na prostokątny rzeczywisty w przypadku, gdy twór jest rzeczywisty) możemy osiągnąć, że wyrażenie $\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$ przyjmie postać $\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot x_i'^2$, przy czym możemy założyć (zmieniając ewentualnie numerację spółrzędnych), że dla pewnego wskaźnika k', gdzie $0\leq k'\leq n$,

jest $A_i=0$ dla $i\leq k'$, zaś $A_i\neq 0$ dla $i>k'$. Przy omawianej zmianie spółrzędnych wyrażenie

$$x_0\cdot(A_{0,0}\cdot x_0+2A_{1,0}\cdot x_1+\ldots+2A_{n,0}\cdot x_n)$$

przejdzie na wyrażenie postaci

$$x'_0\cdot(B_0\cdot x'_0+B_1\cdot x'_1+\ldots+B_n\cdot x'_n),$$

tak że w rezultacie równanie (26) przybierze kształt:

$$x'_0\cdot(B_0\cdot x'_0+B_1\cdot x'_1+\ldots+B_n\cdot x'_n)+\sum_{i=k'+1}^{n}A_i\cdot x_i'^2=0, \quad \text{gdzie } A_i\neq 0 \text{ dla } i=k'+1, \ldots, n. \tag{27}$$

W przypadku, gdy wszystkie $A_{i,j}$ dla $i, j=1, 2, \ldots, n$ znikają, równanie (26) ma od razu postać (27) (przy $k'=n$), tak że w każdym razie możemy równaniu tworu $\mathfrak{A}$ nadać postać (27).

Przez podstawienie

$$x'_i=x''_i \text{ dla } i=0, 1, \ldots, k',\quad x'_i=x''_i-\frac{B_i}{2A_i}\cdot x''_0 \text{ dla } i=k'+1, \ldots, n,$$

będące przesunięciem układu spółrzędnych, a więc izometrią (rzeczywistą, jeżeli spółczynniki $A_{i,j}$, a więc i A_i i B_i są rzeczywiste), nadamy równaniu (27) postać

$$x''_0\cdot\left[x''_0\cdot\left(B_0-\frac{B_{k'+1}}{2A_{k'+1}}-\ldots-\frac{B_n}{2A_n}\right)+B_1\cdot x''_1+\ldots+B_n\cdot x''_n\right]+$$
$$+\sum_{i=k'+1}^{n}A_i\cdot x_i''^2-x''_0\cdot(B_{k'+1}\cdot x''_1+\ldots+B_n\cdot x''_n)+x_0''^2\cdot\left(\frac{B^2_{k'+1}}{4A_{k'+1}}+\ldots+\frac{B^2_n}{4A_n}\right)=0,$$

co daje się również napisać w postaci

$$x''_0\cdot(B'_0\cdot x''_0+B_1\cdot x''_1+\ldots+B_{k'}\cdot x''_{k'})+\sum_{i=k'+1}^{n}A_i\cdot x_i''^2=0. \tag{28}$$

Ponieważ twór $\mathfrak{A}$ nie ma środka właściwego, więc nie wszystkie spółczynniki $B_1, B_2, \ldots, B_k$ znikają; zatem jest więc $k'>0$. Równanie:

$$B'_0\cdot x''_0+B_1\cdot x''_1+\ldots+B_{k'}\cdot x''_{k'}=0$$

określa więc w $\mathfrak{P}_{k'}$ pewną $(k'-1)$-wymiarową hiperpłaszczyznę $\mathfrak{H}_0$. W przestrzeni $\mathfrak{P}_{k'}$ możemy znaleźć taki układ spółrzędnych $x^*_0, x^*_1, \ldots, x^*_{k'}$, gdzie $x^*_0=x''_0$ (na ogół ukośnokątny, lecz prostokątny i rzeczywisty w przypadku, gdy spółczynniki $B'_0, B_1, \ldots, B_n$ są rzeczywiste), że po przejściu do niego równanie hiperpłaszczyzny $\mathfrak{H}_0$ przyjmie postać

$2B\cdot x_1^*=0$, gdzie $B\neq 0$. Biorąc dalej $x_i^*=x_i''$ dla $i>k'$, otrzymamy układ spółrzędnych w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ (ukośnokątny w przypadku ogólnym, prostokątny rzeczywisty w przypadku, gdy twór był rzeczywisty), w którym równanie (28), po podzieleniu przez B, przyjmie postać:

$$2x_0^*\cdot x_1^*+\sum_{i=k+1}^{n} A_i^*\cdot x_i^{*2}=0,$$

czyli postać kanoniczną drugiego rodzaju. Kładąc $k=n-k'$ i odpowiednio zmieniając numerację spółrzędnych możemy nadać mu postać równania (21).

ĆWICZENIA. 1. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie (w $\mathfrak{P}_2$):

$$x_0^2+2x_0\cdot x_1-4x_0\cdot x_2+(1+i)\cdot x_1^2+2x_1\cdot x_2+(1-i)\cdot x_2^2=0.$$

2. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie (w $\mathfrak{P}_3$):

$$4x_0^2+2x_0\cdot x_1-2x_0\cdot x_3+7x_1^2-8x_1\cdot x_2+x_2^2+x_3^2=0.$$

153. Wnioski z twierdzenia o redukcji. Dla obu postaci kanonicznych rząd macierzy małego wyróżnika, czyli pierwszy wskaźnik afiniczny, wprowadzony w Nr 136, jest równy liczbie różnych od zera spośród spółczynników przy $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$, zaś spółczynniki te są identyczne z pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$. Jeżeli twór $\mathfrak{A}$ jest rzeczywisty, to w myśl twierdzenia o redukcji, istnieje izometria (rzeczywista) przekształcająca $\mathfrak{A}$ na twór, którego równanie ma postać kanoniczną. Ponieważ przy izometrii wielomian $V(\lambda)$ nie ulega zmianie (z uwagi na Nr 148), więc w tym przypadku liczba $k(\mathfrak{A})$ jego pierwiastków różnych od zera (według oznaczenia z Nr 148) jest równa pierwszemu wskaźnikowi afinicznemu tworu $\mathfrak{A}$. Mamy więc

Wniosek 1. *Dla tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ pierwszy wskaźnik afiniczny jest równy liczbie $k(\mathfrak{A})$ pierwiastków wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$ różnych od zera.*

Wobec niezmienniczości afinicznej pierwszego wskaźnika afinicznego (Nr 136) wynika stąd

Wniosek 2. *Dla tworu rzeczywistego o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ liczba $k(\mathfrak{A})$ jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych rzeczywistych.*

Zauważmy dalej, że dla równania o postaci kanonicznej pierwszego rodzaju rząd macierzy wielkiego wyróżnika, czyli pierwszy wskaźnik rzutowy $K(\mathfrak{A})$ tworu $\mathfrak{A}$ (określony w Nr 134), jest równy liczbie różnych od zera spółczynników przy $x_0^2, x_1^2, \ldots, x_n^2$. Stąd wynika

Wniosek 3. *Dla tworu $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, mającego co najmniej jeden środek właściwy, pierwszy wskaźnik rzutowy jest równy lub o 1 większy od pierwszego wskaźnika afinicznego. Pierwsza ewentualność zachodzi, gdy środek leży na tworze, druga zaś, gdy leży on poza tworem.*

Natomiast dla równania o postaci kanonicznej drugiego rodzaju rząd macierzy wielkiego wyróżnika jest zawsze o 2 większy od rzędu macierzy małego wyróżnika. Stąd wynika

Wniosek 4. *Dla tworu o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, nie mającego środka właściwego, pierwszy wskaźnik rzutowy jest zawsze o 2 większy od pierwszego wskaźnika afinicznego.*

Zauważmy, że przekształcenie rzutowe rzeczywiste, określone przez wzory

$$x_0=x_0'+x_1',\quad x_1=x_0'-x_1',\quad x_i=x_i' \quad \text{dla } i=2,3,\ldots,n,$$

przekształca twór o równaniu kanonicznym drugiego rodzaju

$$2x_0\cdot x_1+\sum_{\nu=2}^{n} A_i\cdot x_i^2=0$$

na twór o równaniu kanonicznym pierwszego rodzaju

$$2x_0'^2-2x_1'^2+\sum_{\nu=2}^{n} A_i\cdot x_i'^2=0.$$

Wynika stąd na mocy twierdzenia o redukcji następujący

Wniosek 5. *Dla każdego tworu $\mathfrak{A}$, określonego w $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, istnieje takie przekształcenie rzutowe φ, że $\varphi(\mathfrak{A})$ ma równanie kanoniczne pierwszego rodzaju. Jeżeli przy tym twór $\mathfrak{A}$ jest rzeczywisty, to przekształcenie φ o tej własności istnieje wśród przekształceń rzeczywistych.*

Wynika stąd, że każdy twór stopnia ≤ 2 daje się rzutowo przekształcić na twór $\mathfrak{A}'$ o równaniu $\sum_{i=0}^{k} A_i\cdot x_i^2=0$, gdzie $A_i\neq 0$ dla $i=0,1,\ldots,k$. Oznaczając dla $i=0,1,\ldots,k$ przez α_i liczbę (na ogół zespoloną) taką, że $\alpha_i^2=\dfrac{1}{A_i}$ i przyjmując $\alpha_i=1$ dla $i>k$, stwierdzamy natychmiast, że przekształcenie rzutowe, określone przez wzory $x_i^*=\alpha_i\cdot x_i$ dla $i=0,1,\ldots,n$, przekształca twór $\mathfrak{A}'$ na twór o równaniu $\sum_{i=0}^{k} x_i^2=0$. Stąd następujący

Wniosek 6. *Każdy twór $\mathfrak{A}$ stopnia ≤ 2 w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ daje się przekształcić rzutowo na twór określony przez równanie*

$$\sum_{i=0}^{k} x_i^2 = 0, \text{ gdzie } k = K(\mathfrak{A}) - 1.$$

W płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ równanie kanoniczne pierwszego rodzaju ma postać:

$$A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 = 0.$$

Jeżeli twór jest rozmaitością, to spółczynniki A_0, A_1, A_2 są wszystkie różne od zera. Jeśli są one liczbami rzeczywistymi, to zależnie od tego czy liczby $\frac{A_1}{A_0}$ i $\frac{A_2}{A_0}$ są obie ujemne, czy są różnych znaków, czy też obie dodatnie, równanie określa elipsę, hiperbolę lub krzywą bez punktów rzeczywistych. Mamy więc następujący

Wniosek 7. *Każda krzywa rzeczywista drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_2$, mająca środek i będąca rozmaitością, jest bądź elipsą, bądź hiperbolą, bądź nie ma punktów rzeczywistych.*

Natomiast równanie kanoniczne drugiego rodzaju w $\mathfrak{P}_2$ ma postać

$$A_1 \cdot x_1^2 + 2x_0 \cdot x_2 = 0.$$

Jeżeli twór jest rozmaitością rzeczywistą, to spółczynnik A_1 jest liczbą rzeczywistą różną od zera, a wówczas równanie określa parabolę. Mamy więc następujący

Wniosek 8. *Każda krzywa rzeczywista drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_2$, będąca rozmaitością bez środka właściwego, jest parabolą.*

Wnioski 7 i 8 łącznie dają następujący

Wniosek 9. *Jedynymi rozmaitościami rzeczywistymi drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_2$, mającymi punkty rzeczywiste, są stożkowe.*

W przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ równanie kanoniczne pierwszego rodzaju ma postać

$$A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + A_3 \cdot x_3^2 = 0.$$

Jeżeli twór jest rozmaitością, to spółczynniki A_0, A_1, A_2, A_3 są wszystkie różne od zera i równanie możemy napisać w postaci

$$x_0^2 + \frac{A_1}{A_0} \cdot x_1^2 + \frac{A_2}{A_0} \cdot x_2^2 + \frac{A_3}{A_0} \cdot x_3^2 = 0.$$

Przedstawia ono elipsoidę, jeżeli wszystkie ułamki $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \frac{A_3}{A_0}$ są ujemne, hiperboloidę jednopowłokową, jeżeli jeden z nich jest dodatni, a dwa ujemne, hiperboloidę dwupowłokową, jeżeli dwa są dodatnie, a jeden ujemny, wreszcie zbiór bez punktów rzeczywistych, jeżeli wszystkie one są dodatnie. Wynika stąd następujący

Wniosek 10. *Każda powierzchnia rzeczywista drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_3$, mająca środek właściwy i będąca rozmaitością, jest bądź elipsoidą, bądź hiperboloidą jedno- lub dwupowłokową, bądź nie ma punktów rzeczywistych.*

Równanie kanoniczne drugiego rodzaju w $\mathfrak{P}_3$ ma postać

$$A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + 2x_0 \cdot x_3 = 0.$$

Jeżeli określa ono rozmaitość rzeczywistą, to spółczynniki A_1 i A_2 są rzeczywiste i różne od zera. Zależnie od tego czy są one jednego znaku, czy znaków przeciwnych, twór jest paraboloidą eliptyczną lub hiperboliczną. A więc mamy

Wniosek 11. *Każda rozmaitość rzeczywista drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_3$, nie mająca środka właściwego, jest paraboloidą eliptyczną lub hiperboliczną.*

Wnioski 10 i 11 łącznie dają następujący

Wniosek 12. *Jedynymi rozmaitościami rzeczywistymi drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_3$, mającymi punkty rzeczywiste, są kwadryki.*

Jeżeli pierwszy wskaźnik rzutowy (czyli rząd macierzy wielkiego wyróżnika) jest ≤ 2, to równanie kanoniczne pierwszego rodzaju ma postać $A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = 0$, gdzie $A_0 \neq 0$, lub postać $A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 = 0$. W pierwszym przypadku twór jest układem dwóch różnych hiperpłaszczyzn równoległych lub też redukuje się (gdy wskaźnik rzutowy jest jedynką) do hiperpłaszczyzny niewłaściwej, w drugim zaś przypadku twór jest układem dwóch przecinających się hiperpłaszczyzn właściwych, które się pokrywają (gdy wskaźnik rzutowy jest jedynką).

Natomiast równanie kanoniczne drugiego rodzaju ma postać $2x_0 \cdot x_1 = 0$, a więc twór składa się z hiperpłaszczyzny właściwej i niewłaściwej. Stąd i z uwagi na wnioski 6 i 7 z Nr 134 otrzymujemy

Wniosek 13. *Aby równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$ przedstawiało układ dwóch hiperpłaszczyzn, potrzeba i wystarcza, by pierwszy wskaźnik rzutowy był ≤ 2. Hiperpłaszczyzny te pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy wskaźnik rzutowy jest jedynką.*

Wniosek 14. *Aby twór $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$ był hiperpłaszczyzną, potrzeba i wystarcza, by $K(\mathfrak{A}) = 1$.*

W myśl twierdzenia o redukcji, każda rozmaitość rzeczywista drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, mająca środek właściwy, jest izometryczna z tworem rzeczywistym $\mathfrak{A}_0$ o równaniu

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^2 = 0, \quad \text{gdzie } A_i \neq 0 \quad \text{dla } i=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Oś x_i (dla $i=1, 2, \ldots, n$) czyli prosta wyznaczona przez punkty $\{\delta_0^0, \delta_1^0, \ldots, \delta_n^0\}$ i $\{\delta_0^i, \delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\}$ przecina $\mathfrak{A}_0$ w punktach właściwych $s_i=\{\alpha_i, \delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i\}$ i $s_i'=\{-\alpha_i, \delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_n^i\}$, gdzie $\alpha_i^2 = -\dfrac{A_i}{A_0}$.

Hiperpłaszczyzna średnicowa, sprzężona z kierunkiem średnicy $(s_i; s_i')$, jest hiperpłaszczyzną o równaniu $x_i=0$. Jest ona prostopadła do średnicy $(s_i; s_i')$ i zawiera wszystkie średnice $(s_j; s_j')$ dla $j \neq i$. A więc średnice $(s_i; s_i')$, gdzie $i=1, 2, \ldots n$, tworzą układ główny (w myśl definicji z Nr 144). Ponieważ istnienie układu głównego jest niezmiennikiem izometrii, więc możemy wypowiedzieć następujący

Wniosek 15. *Dla każdej rozmaitości rzeczywistej drugiego stopnia mającej środek właściwy istnieje co najmniej jeden układ główny średnic o kierunkach rzeczywistych.*

ĆWICZENIA. 1. Dobrać parametr λ tak, by równanie

$$(\lambda+7) \cdot x_0^2 + 16x_0 \cdot x_1 - 8x_0 \cdot x_2 - 8x_1 \cdot x_2 + 8x_1^2 + x_2^2 = 0$$

określało w $\mathfrak{P}_2$ dwie przecinające się proste.

2. Jaką krzywą określa równanie $x_0^2 + 2x_0 \cdot x_1 - 4x_0 \cdot x_2 + 4x_1^2 - 12x_1 \cdot x_2 - 9x_2^2 = 0$?

3. Czy istnieje taka wartość parametru λ, by równanie

$$x_0^2 + 2x_0 \cdot x_1 + 4x_0 \cdot x_3 + 6x_1^2 + 2\lambda \cdot x_1 \cdot x_2 - 8x_1 \cdot x_3 + x_2^2 - 2x_2 \cdot x_3 + 3x_3^2 = 0$$

określało w $\mathfrak{P}_3$ paraboloidę eliptyczną?

154. Wierzchołki paraboliczne. Jeżeli twór $\mathfrak{A}$ określony jest przez równanie kanoniczne pierwszego rodzaju, to początkiem układu spółrzędnych jest jeden ze środków właściwych tworu (uwaga 1 z Nr 151). Ponieważ, jak okazaliśmy w końcu Nr 150, równanie tworu nie ulegnie zmianie, jeśli początek układu spółrzędnych przesuniemy do dowolnego innego środka tworu, więc punkty, które można wziąć za początek układu spółrzędnych, gdy równanie tworu jest kanoniczne pierwszego rodzaju, są identyczne ze środkami właściwymi tworu. By omawiane punkty scharakteryzować geometrycznie, wprowadzimy pojęcie tzw. wierzchołków parabolicznych.

Mianowicie, punkt p nazywamy *wierzchołkiem parabolicznym* tworu $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$, jeżeli jest on punktem właściwym zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$, a normalna w p do $\mathfrak{A}$ (tj. w myśl określenia z Nr 135 prosta przechodząca przez p i prostopadła do hiperpłaszczyzny stycznej do $\mathfrak{A}$ w punkcie p) ma kierunek wyjątkowy.

Jasne jest, że dla tworu $\mathfrak{A}$, określonego przez równanie (21), początek układu jest wierzchołkiem parabolicznym. Istotnie, hiperpłaszczyzna styczna do $\mathfrak{A}$ w punkcie $\{1, 0, \ldots, 0\}$ ma równanie $x_n=0$, a kierunek do niej prostopadły $\{0, 0, \ldots, 0, 1\}$ jest wyjątkowy. Pojęcie wierzchołka parabolicznego ma oczywiście charakter metryczny. Zachodzi następujące

Twierdzenie. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem rzeczywistym, określonym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = 0$, i niech jego pierwszy wskaźnik afiniczny będzie równy m. Jeśli $\mathfrak{A}$ ma środek właściwy, to wierzchołki paraboliczne nie istnieją, jeśli zaś $\mathfrak{A}$ jest tworem bez środka właściwego, (a więc w szczególności $m<n$), to zbiór wierzchołków parabolicznych jest identyczny ze zbiorem punktów właściwych pewnej hiperpłaszczyzny $(n-m-1)$-wymiarowej właściwej rzeczywistej.*

Dowód. Nadając postać analityczną definicji wierzchołka parabolicznego $\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$, widzimy, że daje się on scharakteryzować przez zespół zależności:

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j} \cdot d_i \cdot d_j = 0, \tag{29}$$

$$d_0 \neq 0, \tag{30}$$

$$\sum_{j=0}^{n} A_{i,j} \cdot d_j = b_i \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n, \tag{31}$$

gdzie $b=\{0, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ jest kierunkiem wyjątkowym, czyli

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot b_j = 0 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n. \tag{32}$$

Równania (31) stanowią mianowicie warunek równoważny prostopadłości kierunku wyjątkowego b do hiperpłaszczyzny stycznej w punkcie $\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$, a mającej równanie $\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} A_{i,j} \cdot d_j \right) \cdot x_i = 0$.

Jeśli twór $\mathfrak{A}$ ma środek właściwy, to w myśl twierdzenia o redukcji możemy założyć, że równanie tworu ma postać kanoniczną pierwszego rodzaju (20), gdzie $k=m$. Równania (32) przybierają wówczas postać $A_i \cdot b_i = 0$, skąd $b_i=0$ dla $i=1, 2, \ldots, k$. Ponieważ z równań (31) wynika, że $b_i=0$ dla $i>k$, więc przypuszczenie, że warunki (29)-(32) są spełnione, doprowadza do wniosku, że wszystkie b_i znikają, co dla kierunku $b=\{0, b_1, \ldots, b_n\}$ jest niemożliwe. A więc twór mający środek właściwy nie posiada wierzchołków parabolicznych.

Jeśli twór $\mathfrak{A}$ nie ma środka właściwego, to w myśl twierdzenia o redukcji możemy założyć, że równanie jego ma postać kanoniczną drugiego rodzaju (21), gdzie $k=m<n$. Równania (32) określające kierunki wyjątkowe mają wówczas postać $A_i\cdot b_i=0$ dla $i=1, 2, \ldots, k$, skąd $b_1=b_2=\ldots=b_k=0$. Kierunki wyjątkowe są więc identyczne z kierunkami postaci

$$\{0, 0, \ldots, 0, b_{k+1}, \ldots, b_n\}.$$

Równania (31) przybierają postać:

$$A_i\cdot d_i=0 \text{ dla } i=1, 2, \ldots, k, \quad b_i=0 \text{ dla } i=k+1, \ldots, n-1, \quad d_0=b_n.$$

A więc punkty $d=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$, spełniające równania (31), są identyczne z punktami postaci

$$\{d_0, 0, \ldots, 0, d_{k+1}, \ldots, d_{n-1}, d_n\}.$$

Równanie (29) przybiera postać $2d_0\cdot d_n=0$, co wobec (30) daje $d_n=0$. Zatem zbiór wierzchołków parabolicznych jest identyczny ze zbiorem punktów postaci

$$\{d_0, 0, \ldots, 0, d_{k+1}, \ldots, d_{n-1}, 0\},$$

będącym częścią wspólną $k+1$ hiperpłaszczyzn $(n-1)$-wymiarowych przestrzeni $\mathfrak{E}_n$, określonych przez równania

$$x_i=0 \text{ dla } i=1, 2, \ldots, k, \quad x_n=0,$$

czyli — w myśl twierdzenia z Nr 91 — hiperpłaszczyzną $(n-k-1)$-wymiarową. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Początek układu spółrzędnych $\{1, 0, \ldots, 0\}$ jest jednym z wierzchołków parabolicznych tworu $\mathfrak{A}$ o równaniu (21). Jeśli

$$d=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}=\{1, 0, \ldots, 0, d_{k+1}, \ldots, d_{n-1}, 0\}$$

jest jakimkolwiek innym wierzchołkiem parabolicznym tegoż tworu, to zmiana układu spółrzędnych, określona przez wzory:

$$x_0=x_0', \quad x_i=x_i'+d_i\cdot x_0' \text{ dla } i=1, 2, \ldots, n,$$

czyli przesunięcie początku układu do punktu d, nie wpłynie na postać równania (21). Wynika stąd następujący

Wniosek 1. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem rzeczywistym drugiego stopnia nie mającym środka właściwego, to możemy otrzymać jego równanie w postaci kanonicznej, przesuwając początek układu spółrzędnych do któregokolwiek z jego wierzchołków parabolicznych, a następnie dokonując pewnego obrotu tego układu dokoła początku spółrzędnych.*

Stąd i wobec twierdzenia z Nr 150 wynika następujący

Wniosek 2. *Układ pierwiastków pseudocharakterystycznych równania tworu rzeczywistego drugiego stopnia bez środka właściwego w układzie prostokątnym, którego początkiem jest wierzchołek paraboliczny tworu, nie zależy od tego, który wierzchołek paraboliczny został wzięty za początek układu spółrzędnych.*

Układ tych pierwiastków jest przez twór wyznaczony z dokładnością do proporcjonalności; nazywać go będziemy *układem pierwiastków pseudocharakterystycznych dla tworu* bez środka właściwego.

Uwaga. Znalezienie wierzchołka parabolicznego sprowadza się do rozwiązania układu, złożonego z równań liniowych (31), (32) i równania kwadratowego (29), przy uwzględnieniu nierówności (30). Z ostatniego twierdzenia wiemy, że dla tworu rzeczywistego drugiego stopnia bez środka właściwego układ ten ma rozwiązania rzeczywiste. Znalezienie takiego rozwiązania nie sprawia żadnych trudności algebraicznych. Tym samym żadnych trudności algebraicznych nie sprawia znalezienie wielomianu pseudocharakterystycznego równania danego tworu w układzie spółrzędnych, którego początkiem jest wierzchołek paraboliczny.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć wierzchołek paraboliczny krzywej, określonej w płaszczyźnie $\mathfrak{P}_2$ przez równanie

$$x_0^2+3x_0\cdot x_1+2x_0\cdot x_2-4x_1^2-4x_1\cdot x_2-x_2^2=0.$$

2. Znaleźć wierzchołek paraboliczny tworu, określonego w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ przez równanie

$$5x_0^2-4x_0\cdot x_1+6x_0\cdot x_4+x_1^2-5x_1\cdot x_4-x_2^2+4x_2\cdot x_3-4x_3^2+4x_4^2=0.$$

ROZDZIAŁ XIX.

Klasyfikacja tworów drugiego stopnia

155. Zupełny układ niezmienników metrycznych dla tworów rzeczywistych drugiego stopnia, mających środki właściwe. Niech T będzie pewną klasą figur geometrycznych, zaś U pewnym układem niezmienników izometrii, określonych dla figur należących do klasy T.

Mówimy, że U jest *układem zupełnym niezmienników metrycznych* dla figur klasy T, jeżeli dwie figury klasy T, dla których wszystkie niezmienniki należące do U są odpowiednio identyczne, są zawsze przystające.

Można by krótko powiedzieć, że układ U jest zupełny wówczas, gdy całkowicie charakteryzuje pod względem metrycznym każdą z figur klasy T (wśród figur tej klasy). Każdy inny niezmiennik izometrii figury klasy T musi więc wyrażać się przez niezmienniki układu U (i przez przynależność figury do klasy T).

Za zasadnicze zagadnienie geometrii analitycznej tworów drugiego stopnia uważać można podanie dla klasy tych tworów takiego układu zupełnego U niezmienników metrycznych, by niezmienniki tego układu dawały się wyznaczyć na drodze elementarnej (pod względem algebraicznym) z danego równania tworu. Rozwiązanie tego zagadnienia pozwala w szczególności zawsze odpowiedzieć na pytanie, czy twory określone przez dowolnie dane równania kwadratowe są przystające czy nie.

Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem tego zagadnienia w zakresie tworów rzeczywistych stopnia ≤ 2, mających przynajmniej jeden środek właściwy.

Niech równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ twór rzeczywisty, posiadający co najmniej jeden środek właściwy. Możemy więc założyć, że wszystkie spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste i że istnieje punkt (rzeczywisty) $c=\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_0=1$, spełniający równania

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{n} A_{i,j}\cdot c_i=0 \qquad \text{dla } j=1,2,\ldots,n.$$

Znalezienie spółrzędnych takiego punktu c nie nastręcza żadnych trudności. Po przesunięciu

$$x_0=\bar{x}_0;\quad x_i=\bar{x}_i+c_i\cdot\bar{x}_0 \quad \text{dla } i=1,2,\ldots,n$$

równanie tworu przybierze postać

$$A_{0,0}\cdot\bar{x}_0^2+2\sum_{i=1}^{n}A_{i,0}\cdot(\bar{x}_i+c_i\cdot\bar{x}_0)\cdot\bar{x}_0+\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot(\bar{x}_i+c_i\cdot\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}_j+c_j\cdot\bar{x}_0)=0,$$

co po uwzględnieniu zależności (1) daje

$$(2)\qquad \bar{x}_0^2\cdot\sum_{i=0}^{n}A_{i,0}\cdot c_i+\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j=0.$$

Z Nr 152 wynika, że istnieje obrót dokoła początku układu c, po którym równanie tworu przybierze postać kanoniczną pierwszego rodzaju

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{k}A_i\cdot x_i^2=0, \qquad \text{gdzie } A_i\neq 0 \text{ dla } i=1,2,\ldots,k.$$

Wiemy jednak, że przy takim obrocie nie tylko wielomian charakterystyczny $V(\lambda)$ równania (2), ale również wielomian pseudocharakterystyczny $W(\lambda)$ tego równania, nie ulega zmianie. A więc oba te wielomiany, obliczone dla równania (2), nie różnią się od tychże wielomianów dla równania (3), czyli:

$$V(\lambda)=(A_1-\lambda)\cdot(A_2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(A_k-\lambda)\cdot(-\lambda)^{n-k},$$
$$W(\lambda)=(A_0-\lambda)\cdot(A_1-\lambda)\cdot\ldots\cdot(A_k-\lambda)\cdot(-\lambda)^{n-k}.$$

Wynika stąd, że pierwiastkami pierwszego z tych wielomianów są liczby $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $n-k$ zer, drugiego zaś — liczby $A_0, A_1, \ldots, A_n$ i $n-k$ zer.

Wielomiany $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ otrzymane z jednego i tego samego równania tworu w układzie, którego początkiem jest środek tworu, nazywamy *odpowiednimi*.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Pierwiastki wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$ tworu stopnia ≤ 2, mającego środek, są spółczynnikami przy $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ równania kanonicznego tego tworu.*

Spółczynnik przy x_0^2 jest tym, który pozostaje z pierwiastków odpowiedniego wielomianu pseudocharakterystycznego $W(\lambda)$ po usunięciu pierwiastków wielomianu $V(\lambda)$.

Widzimy zatem, że znajomość (z dokładnością do proporcjonalności) pierwiastków wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$ i odpowiedniego wielomianu pseudocharakterystycznego $W(\lambda)$ wyznacza jednoznacznie równanie kanoniczne tworu, a więc i sam twór (z dokładnością do izometrii). A więc oba układy tych pierwiastków stanowią łącznie układ zupełny niezmienników metrycznych w zakresie klasy tworów rzeczywistych stopnia ≤ 2, mających środek właściwy. Nie można jednak układów tych uważać za rozwiązanie postawionego wyżej zasadniczego zagadnienia w zakresie tych tworów, ponieważ obliczenie tych pierwiastków nastręczać może istotne trudności algebraiczne. Możemy trudności tych uniknąć, biorąc pod uwagę zamiast pierwiastków same wielomiany odpowiednie $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$, których obliczenie nie sprawia już żadnych trudności — z tym, że parę wielomianów $[V(\lambda), W(\lambda)]$ uważać będziemy za identyczną z każdą parą wielomianów postaci $\left[\frac{1}{\varrho^n} V(\varrho\cdot\lambda), \frac{1}{\varrho^{n+1}} W(\varrho\cdot\lambda)\right]$, gdzie ϱ jest dowolną stałą różną od zera, albowiem układy pierwiastków tych wielomianów są proporcjonalne (z tym samym spółczynnikiem proporcjonalności $1/\varrho$) do układów pierwiastków wielomianów $V(\lambda)$, $W(\lambda)$, układy zaś proporcjonalne pierwiastków charakterystycznych i pseudocharakterystycznych uważamy za identyczne.

PRZYKŁAD. Okażemy, że krzywe o równaniach

$$x_1\cdot x_2 - x_0^2 = 0, \quad 25x_0^2 - 12x_1^2 - 7x_1\cdot x_2 + 12x_2^2 = 0$$

są przystające. Oba te równania odnoszą się do układu, którego początkiem jest środek tworu. Dla pierwszego równania odpowiednie wielomiany $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ mają postać:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}; \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{4},$$

dla drugiego zaś równania są one postaci:

$$\begin{vmatrix} -12-\lambda & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{25^2}{4}; \quad \begin{vmatrix} 25-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -12-\lambda & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & 12-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda^2 + \frac{25^2}{4}\lambda - \frac{25^3}{4}.$$

Biorąc $\varrho = -25$, stwierdzamy identyczność tych wielomianów w omawianym sensie.

Uwaga. Z punktu widzenia metrycznej charakteryzacji rzeczywistego tworu stopnia ≤ 2, mającego co najmniej jeden środek właściwy, wielomian pseudocharakterystyczny gra jedynie rolę narzędzia przy wyznaczaniu spółczynnika przy x_0^2 w równaniu kanonicznym.

Warto zauważyć, że w przypadku, gdy twór ma dokładnie jeden środek, mały wyróżnik $\mathfrak{m}$ równania (2) jest równy $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n \neq 0$ (w myśl wniosku 2 z Nr 139), zaś wielki wyróżnik $\mathfrak{M}$ tegoż równania (2) jest równy $A_0\cdot A_1\cdot\ldots\cdot A_n$. A więc $A_0 = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{m}}$. W tym więc przypadku wyznaczenie postaci kanonicznej równania sprowadza się do rozwiązania równania $V(\lambda)=0$ (co nam daje spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$) oraz do obliczenia wyróżników $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{M}$.

ĆWICZENIA. 1. Okazać, że równania: $(a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_2)^2 + (b_1\cdot x_1 + b_2\cdot x_2)^2 - c^2\cdot x_0^2 = 0$ i $(a_1\cdot x_1 + b_1\cdot x_2)^2 + (a_2\cdot x_1 + b_2\cdot x_2)^2 - c^2\cdot x_0^2 = 0$, określają krzywe przystające.

2. Zbadać, czy przystające są powierzchnie o równaniach:

$$x_0^2 + 2x_1\cdot x_2 + 4x_1\cdot x_3 + 6x_2\cdot x_3 = 0,$$

$$477x_0^2 + 240x_0\cdot x_1 + 24x_0\cdot x_2 - 36x_0\cdot x_3 + 36x_1^2 + \\ + 12x_1\cdot x_2 + 6x_1\cdot x_3 - 12x_2^2 + 18x_2\cdot x_3 - 24x_3^2 = 0.$$

3. Powierzchnię o równaniu:

$$x_0^2 - x_1^2 - 2x_1\cdot x_2 + 4x_1\cdot x_3 - x_2^2 - 2x_3^2 = 0$$

przecięto płaszczyznami o równaniach:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{i} \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Zbadać, czy przekroje są przystające.

4. Przez środek powierzchni o równaniu:

$$6x_0^2 - 8x_0\cdot x_1 + 8x_0\cdot x_3 + 5x_1^2 - 4x_1\cdot x_2 - 2x_1\cdot x_3 - 4x_2\cdot x_3 + 2x_2^2 - 4x_2\cdot x_3 + 5x_3^2 = 0$$

przeprowadzono płaszczyznę prostopadłą do kierunku $\{0, 1, 1, 1\}$. Okazać, że przecina ona tę powierzchnię wzdłuż elipsy. Znaleźć ogniska tej elipsy.

156. Układ zupełny niezmienników metrycznych dla tworów rzeczywistych drugiego stopnia nie mających środków właściwych. Niech równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j = 0$ określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ twór rzeczywisty $\mathfrak{A}$, nie mający środka. Możemy założyć, że spółczynniki $A_{i,j}$ są rzeczywiste. W myśl twierdzenia z Nr 154 (łącznie z podaną tam uwagą) możemy znaleźć (w sposób elementarny) punkt rzeczywisty $d=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$ będący wierzchołkiem parabolicznym tworu $\mathfrak{A}$. Po przesunięciu początku układu spółrzędnych danym przez wzory

$$x_0 = \bar{x}_0 \quad \text{i} \quad x_i = \bar{x}_i + d_i\cdot\bar{x}_0 \quad \text{dla } i=1, 2, \ldots, n,$$

równanie tworu przyjmie postać

$$(4)\qquad \sum_{i,j=0}^{n} \bar{A}_{i,j}\cdot \bar{x}_i\cdot \bar{x}_j=0.$$

Wobec wniosku 1 z Nr 154, można przez obrót dokoła początku układu spółrzędnych doprowadzić równanie tworu do postaci, różniącej się od kanonicznej jedynie pewnym spółczynnikiem $B\neq 0$, czyli do postaci

$$(5)\qquad B\cdot\left[\sum_{i=1}^{k} A_i\cdot x_i^2+2x_0\cdot x_n\right]=0,\quad \text{gdzie } A_i\neq 0 \text{ dla } i=1,2,\ldots,k,\; k<n.$$

Wobec twierdzeń z Nr 148 oraz Nr 150, wielomian charakterystyczny $V(\lambda)$ i pseudocharakterystyczny $W(\lambda)$ są dla równania (4) takie jak i dla równania (5), a więc mają postać

$$(6)\qquad V(\lambda)=(B\cdot A_1-\lambda)\cdot(B\cdot A_2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(B\cdot A_k-\lambda)\cdot(-\lambda)^{n-k},$$

$$W(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & B \\ 0 & B\cdot A_1-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & B\cdot A_2-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B & 0 & 0 & \ldots & B\cdot A_n-\lambda \end{vmatrix}$$

gdzie $A_i=0$ dla $i>k$. Przestawiając w ostatnim wyznaczniku drugi wiersz z ostatnim, a następnie drugą kolumnę z ostatnią, nadać możemy wielomianowi $W(\lambda)$ postać

$$(7)\qquad W(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & B & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B\cdot A_2-\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B\cdot A_{n-1}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B\cdot A_1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda^2-B^2)\cdot(B\cdot A_1-\lambda)\cdot(B\cdot A_2-\lambda)\cdot\ldots\cdot(B\cdot A_k-\lambda)\cdot(-\lambda)^{n-k-1}.$$

Z (6) wynika, że spółczynniki $B\cdot A_1, B\cdot A_2, \ldots, B\cdot A_k$ równania (5) są identyczne z pierwiastkami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$ różnymi od zera. Z wzorów (6) i (7) wynika dalej, że $B^2-\lambda^2$ jest ilorazem wielomianu $\lambda\cdot W(\lambda)$ przez wielomian $V(\lambda)$, co wyznacza jednoznacznie B^2, a więc i B z dokładnością do znaku. Mając B, znajdujemy spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ równania kanonicznego z wzoru $A_i=\frac{\lambda_i}{B}$.

Znak B nie ma przy tym znaczenia geometrycznego, gdyż twory określone przez równania

$$\sum_{i=1}^{k} A_i\cdot x_i^2+2x_0\cdot x_n=0 \quad\text{i}\quad -\sum_{i=1}^{k} A_i\cdot x_i^2+2x_0\cdot x_n=0$$

są izometryczne, pierwszy bowiem przechodzi w drugi przy izometrii $x_i=x_i'$ dla $i=0,1,\ldots,n-1$, $x_n=-x_n'$. W ten sposób okazaliśmy, że układy pierwiastków wielomianów $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ (względem układu spółrzędnych, którego początkiem jest pewien wierzchołek paraboliczny tworu) wyznaczają twór $\mathfrak{A}$ jednoznacznie.

Otrzymany rezultat pozwala nam wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Różne od zera spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ równania kanonicznego drugiego rodzaju tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia, nie mającego środka właściwego, są postaci*

$$\frac{\lambda_1}{B}, \frac{\lambda_2}{B}, \ldots, \frac{\lambda_k}{B},$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, stanowią układ różnych od zera pierwiastków wielomianu charakterystycznego $V(\lambda)$, zaś spółczynnik B określony jest przez równanie

$$B^2=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda\cdot W(\lambda)}{V(\lambda)},$$

gdzie $W(\lambda)$ jest wielomianem pseudocharakterystycznym równania tworu $\mathfrak{A}$ w układzie spółrzędnych, którego początek leży w którymkolwiek z wierzchołków parabolicznych tworu $\mathfrak{A}$.

Wynika stąd w szczególności, że układy pierwiastków wielomianów $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ w układzie spółrzędnych, którego początkiem jest którykolwiek z wierzchołków parabolicznych tworu, wyznaczają twór $\mathfrak{A}$ pod względem metrycznym.

Oba zatem układy tych pierwiastków stanowią łącznie układ zupełny niezmienników metrycznych w zakresie klasy tworów rzeczywistych drugiego stopnia, nie mających środka właściwego. Ponieważ jednak obliczenie pierwiastków wielomianów $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ może nastręczać istotne trudności algebraiczne, więc zamiast układów pierwiastków możemy wziąć same wielomiany $V(\lambda)$ i $W(\lambda)$ z tym, że (podobnie jak w Nr 155) parę wielomianów $[V(\lambda), W(\lambda)]$ uważać będziemy za identyczną z parą wielomianów $\left[\frac{1}{\varrho^n}\cdot V(\varrho\cdot\lambda), \frac{1}{\varrho^{n+1}}\cdot W(\varrho\cdot\lambda)\right]$, gdzie ϱ jest dowolną stałą różną od zera.

PRZYKŁAD. Okażemy, że walec paraboliczny o równaniu

$$2x_0\cdot x_1+x_2^2=0$$

jest izometryczny z tworem o równaniu

$$4\sqrt{3}x_0\cdot x_1+4\sqrt{3}x_0\cdot x_2+4\sqrt{3}x_0\cdot x_3+3x_1^2-6x_1\cdot x_2+3x_2^2=0.$$

Stwierdzamy od razu, że każdy z tych tworów ma w początku układu spółrzędnych swój wierzchołek paraboliczny. Pozostaje więc zbadanie ich wielomianów charakterystycznych i pseudocharakterystycznych. Oznaczając je dla pierwszego tworu przez $V_1(\lambda)$ i $W_1(\lambda)$, znajdujemy

$$V_1(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2,\quad W_1(\lambda)=\lambda^4-\lambda^3-\lambda^2+\lambda.$$

Odpowiednie wielomiany $V_2(\lambda)$ i $W_2(\lambda)$ dla drugiego tworu mają postać

$$V_2(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2,\quad W_2(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3-36\lambda^2+216\lambda.$$

Widzimy stąd, że:

$$\frac{1}{6^3}\cdot V_2(6\cdot\lambda)=V_1(\lambda),\quad \frac{1}{6^4}\cdot W_2(\lambda)=W_1(\lambda),$$

co dowodzi, że para wielomianów $[V_1(\lambda), W_1(\lambda)]$ jest w przyjętym tu sensie identyczna z parą wielomianów $[V_2(\lambda), W_2(\lambda)]$.

ĆWICZENIA. 1. Zbadać, czy krzywe o równaniach

$$175x_0^2+20x_0\cdot x_1-50x_0\cdot x_2-16x_1^2+24x_1\cdot x_2-9x_2^2=0,$$
$$44x_0^2+20x_0\cdot x_1-100x_0\cdot x_2+25x_1^2=0$$

są izometryczne.

2. Zbadać, czy twory określone w przestrzeni $\mathfrak{P}_4$ przez równania:

$$2x_0^2-40x_0\cdot x_1-20x_0\cdot x_2-30x_0\cdot x_4-9x_1^2+24x_1\cdot x_4+50x_2^2-16x_4^2=0,$$
$$50x_0^2+110x_0\cdot x_1-20x_0\cdot x_2+30x_0\cdot x_3+40x_0\cdot x_4+$$
$$+16x_1^2-24x_1\cdot x_2+9x_2^2-18x_3^2-24x_3\cdot x_4-32x_4^2=0$$

są izometryczne.

157. Klasyfikacja tworów rzeczywistych drugiego stopnia według podobieństwa. Udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Aby dwa twory rzeczywiste drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ były podobne, potrzeba i wystarcza, by ich pierwsze wskaźniki rzutowe były jednakowe i pierwiastki wielomianów charakterystycznych proporcjonalne.*

Dowód. Jeżeli twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ określone w $\mathfrak{P}_n$ przez równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0 \quad \text{i} \quad \sum_{i,j=0}^{n} A'_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$$

są podobne, przy czym $\varkappa$ oznacza określony w Nr 56 spółczynnik podobieństwa, to przekształcenie

$$(8)\qquad x_0=x_0',\quad x_i=\varkappa\cdot x_i'\quad \text{dla } i=1, 2, \ldots, n$$

przekształca $\mathfrak{A}$ na twór $\mathfrak{A}''$ izometryczny z $\mathfrak{A}'$. Równanie tworu $\mathfrak{A}''$ ma postać:

$$\sum_{i,j=0}^{n} A''_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0,\quad \text{gdzie } A''_{i,j}=\varkappa^2\cdot A_{i,j}\quad \text{dla}\quad i,j=1,2,\ldots, n.$$

Wynika stąd, że wielomiany charakterystyczne dla $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ mają postać

$$|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=1, 2, \ldots, n)\quad \text{i}\quad |\varkappa^2\cdot A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=1, 2, \ldots, n),$$

a więc ich pierwiastki są proporcjonalne (ze spółczynnikiem proporcjonalności $\varkappa^2$). Ponieważ w myśl wniosku 1 z Nr 134 wskaźniki rzutowe dla $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są jednakowe, więc warunki podane w twierdzeniu są dla podobieństwa tworów konieczne.

Załóżmy teraz, że twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ mają jednakowe pierwsze wskaźniki rzutowe oraz proporcjonalne pierwiastki wielomianów charakterystycznych. Z wniosków 1, 3 i 4 z Nr 153 wynika, że twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ bądź oba mają środki właściwe, bądź oba są ich pozbawione.

W pierwszym przypadku ich równania kanoniczne mają postać

$$(9)\qquad A_0\cdot x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_k\cdot x_k^2=0,\quad \text{gdzie } A_i\neq 0 \text{ dla } i=1, 2, \ldots, k,$$
$$(10)\qquad A_0'\cdot x_0'+A_1'\cdot x_1^2+\ldots+A'_{k'}\cdot x_{k'}^2=0,\quad \text{gdzie } A_i'\neq 0 \text{ dla } i=1, 2, \ldots, k',$$

przy czym układy liczb $A_1, A_2, \ldots, A_k$ i $A_1', A_2', \ldots, A'_{k'}$, są proporcjonalne. Stąd $k=k'$. Po odpowiednim uporządkowaniu wskaźników i pomnożeniu równań przez stały spółczynnik możemy założyć, że $A_i=A_i'$ dla $i=1, 2, \ldots, k$. Wynika stąd, że jeżeli pierwsze wskaźniki rzutowe są równe k, czyli gdy $A_0=0=A_0'$, twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są przystające. Jeżeli zaś wskaźniki rzutowe są większe od k, to $A_0\neq 0\neq A_0'$ i twory są podobne, a spółczynnikiem podobieństwa jest $\varkappa=\sqrt{\dfrac{A_0'}{A_0}}$.

W drugim przypadku, tj. gdy twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są pozbawione środków właściwych, ich równania kanoniczne mają postać

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{k} A_i\cdot x_i^2+2x_0\cdot x_n=0, \quad \text{gdzie } A_i\neq 0 \text{ dla } i=1,2,\dots,k \text{ oraz } k<n,$$

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{k'} A_i'\cdot x_i^2+2x_0\cdot x_n=0, \quad \text{gdzie } A_i'\neq 0 \text{ dla } i=1,2,\dots,k' \text{ oraz } k'<n,$$

przy czym spółczynniki $A_1, A_2, \dots, A_k$ (po odpowiednim uporządkowaniu) są proporcjonalne do spółczynników $A_1', A_2', \dots, A_{k'}'$. Stąd $k=k'$. Jeśli $\varkappa$ oznacza spółczynnik proporcjonalności, czyli $A_i'=\varkappa\cdot A_i$ dla $i=1, 2,\dots, n$, to przy podobieństwie (8) twór $\mathfrak{A}$ przejdzie na twór $\mathfrak{A}'$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek 1. *Aby dwie rozmaitości rzeczywiste drugiego stopnia, leżące w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ były podobne, potrzeba i wystarcza, by pierwiastki ich wielomianów charakterystycznych były proporcjonalne.*

Istotnie, pierwsze wskaźniki rzutowe rozmaitości są w myśl wniosku 2 z Nr 134 równe $n+1$, a więc jednakowe.

Wniosek 2. *Przecięcia rozmaitości $\mathfrak{A}$ o równaniu $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ dwiema równoległymi hiperpłaszczyznami $(n-1)$-wymiarowymi rzeczywistymi $\mathfrak{H}$ i $\mathfrak{H}'$, z których żadna nie jest styczna do $\mathfrak{A}$, są podobne.*

Możemy założyć, że hiperpłaszczyzny mają równania $x_n=c_1\cdot x_0$ oraz $x_n=c_2\cdot x_0$. A więc przekroje są przystające do tworów określonych w $\mathfrak{P}_{n-1}$ przez równania:

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j+2\cdot c_\nu\cdot\sum_{i=0}^{n-1} A_{i,n}\cdot x_i\cdot x_0+c_\nu^2\cdot A_{n,n}\cdot x_0^2=0, \quad \text{gdzie } \nu=1,2.$$

Ich wielomiany charakterystyczne są jednakowe, mianowicie równe wyznacznikowi

$$|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,\big(i, j=1, 2, \dots, (n-1)\big).$$

Ponieważ w myśl wniosku z Nr 135 przekroje te są rozmaitościami, więc z uwagi na poprzedni wniosek, są one podobne.

ĆWICZENIA. 1. Dla jakiej wartości parametru a krzywa o równaniu

$$3x_0^2+x_0\cdot x_1+3x_0-x_1^2+2ax_2^2=0$$

jest podobna do krzywej o równaniu

$$11x_0^2+7x_0\cdot x_1+5x_0\cdot x_2+2x_1^2+6ax_1\cdot x_2-2x_2^2=0?$$

2. Czy podobne są twory określone w $\mathfrak{P}_4$ przez równania:

$$x_1^2+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_4-x_2^2-x_2\cdot x_3-x_2\cdot x_4+x_3^2-x_4^2=0,$$

$$6x_0^2+7x_0\cdot x_1-2x_0\cdot x_2+6x_0\cdot x_3+2x_0\cdot x_4+2x_1^2-3x_1\cdot x_2+$$
$$+x_1\cdot x_3+2x_1\cdot x_4-2x_2^2-2x_2\cdot x_3-4x_2\cdot x_4+2x_3^2+3x_3\cdot x_4-2x_4^2=0?$$

3. W przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ dana jest rozmaitość rzeczywista $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia oraz dwie równoległe hiperpłaszczyzny k-wymiarowe rzeczywiste $\mathfrak{H}_1$ i $\mathfrak{H}_2$, z których żadna nie leży w hiperpłaszczyźnie $(n-1)$-wymiarowej stycznej do $\mathfrak{A}$. Czy przekroje $\mathfrak{H}_1$ i $\mathfrak{H}_2$ z $\mathfrak{A}_n$ są podobne?

158. Wskaźniki rzutowe i wskaźniki afiniczne. Klasyfikację rzutową i afiniczną tworów rzeczywistych drugiego stopnia oprzemy na niezmiennikach całkowitoliczbowych, zwanych pierwszym i drugim wskaźnikiem rzutowym oraz pierwszym i drugim wskaźnikiem afinicznym; z nich pierwszy wskaźnik rzutowy poznaliśmy w Nr 134, pierwszy zaś afiniczny w Nr 136.

Zaczniemy od dowodu następującego lematu:

Lemat (tzw. *prawo bezwładności* S y l v e s t e r a). *Niech przy przekształceniach rzutowych rzeczywistych*:

$$\varphi'(x_0, x_1, \dots, x_n)=\{x_0', x_1', \dots, x_n'\} \quad \text{i} \quad \varphi''(x_0, x_1, \dots, x_n)=\{x_0'', x_1'', \dots, x_n''\}$$

określonych odpowiednio przez wzory:

$$x_i=\sum_{\nu=0}^{n} a_{i,\nu}'\cdot x_\nu' \quad \text{i} \quad x_i=\sum_{\nu=0}^{n} a_{i,\nu}''\cdot x_\nu'' \quad \text{dla } i=1,2,\dots,n$$

wielomian $\sum\limits_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j$ *o spółczynnikach rzeczywistych przybiera odpowiednio postać* $\sum\limits_{\nu=0}^{n} A_\nu'\cdot x_\nu'^2$ *i* $\sum\limits_{\nu=0}^{n} A_\nu''\cdot x_\nu''^2$. *Wówczas wśród liczb (rzeczywistych) A_ν' jest tyleż dodatnich, ujemnych i zer, co wśród liczb A_ν''.*

Dowód. Przekształcenie $\varphi(x_0', x_1', \dots, x_n')=\{x_0'', x_1'', \dots, x_n''\}$ rzutowe rzeczywiste, będące superpozycją przekształcenia φ'_{-1}, odwrotnego względem φ' oraz przekształcenia φ'', niech będzie określone przez wzór

$$x_\nu'=\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu,\mu}\cdot x_\mu''.$$

Przekształca ono twór rzeczywisty $\mathfrak{A}'$, określony w $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum\limits_{\nu=0}^{n} A_\nu'\cdot x_\nu'^2=0$ na twór rzeczywisty $\mathfrak{A}''$, określony w $\mathfrak{P}_n$ przez równanie $\sum\limits_{\nu=0}^{n} A_\nu''\cdot x_\nu''^2=0$. Stąd na mocy wniosku 1 z Nr 134 wynika, że pierwsze wskaźniki rzutowe tworów $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{A}''$ są jednakowe, czyli że wśród liczb A_ν' ilość liczb różnych od zera jest taka sama jak wśród liczb A_ν''. Możemy spółrzędne tak ponumerować, by $A_0', A_1', \dots, A_{m'-1}'$ były wszystkimi liczbami dodatnimi spośród liczb A_ν', zaś $A_0'', A_1'', \dots, A_{m''-1}''$ wszystkimi dodatnimi spośród liczb A_ν''. Lemat będzie udowodniony, gdy okażemy, że $m'=m''$ lub — co na jedno wychodzi — że nierówność $m'<m''$ prowadzi do sprzeczności. Mamy

$$\sum_{\nu=0}^{m'-1} A'_\nu \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu,\mu}\cdot x''_\mu\right)^2 - \sum_{\nu=m''}^{n} A''_\nu \cdot x''^2_\nu = \sum_{\nu=0}^{m''-1} A''_\nu\cdot x''^2_\nu - \sum_{\nu=m'}^{n} A'_\nu \cdot\left(\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu,\mu}\cdot x''_\mu\right)^2. \tag{13}$$

Jeśli $m'<m''$, to układ złożony z $m'+(n-m''+1)<n+1$ równań liniowych jednorodnych względem $x''_0, x''_1, \ldots, x''_n$

$$\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu,\mu}\cdot x''_\mu=0 \quad \text{dla} \quad \nu=1,2,\ldots,(m'-1), \quad x''_\nu=0 \quad \text{dla} \quad \nu=m'', m''+1,\ldots,n$$

ma rozwiązanie rzeczywiste niezerowe $\{x''_0, x''_1, \ldots, x''_n\}$. Wówczas co najmniej jedna z liczb $x''_0, x''_1, \ldots, x''_{m''-1}$ jest różna od zera, a więc prawa strona równości (13) jest (wobec $A''_\nu>0$ dla $\nu=0, 1, \ldots, m''-1$ oraz $A'_\nu\leq 0$ dla $\nu=m', m'+1, \ldots, n$) dodatnia, wbrew znikaniu strony lewej.

Dowód lematu został tym samym zakończony.

Twierdzenie. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem rzeczywistym określonym w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ przez równanie:*

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0.$$

Liczba różnych od zera pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego

$$W(\lambda)=|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=0, 1, \ldots, n)$$

jest równa pierwszemu wskaźnikowi rzutowemu $K(\mathfrak{A})$ tworu $\mathfrak{A}$, a więc jest niezmiennikiem przekształceń rzeczywistych rzutowych.

Również niezmiennikiem przekształceń rzeczywistych rzutowych jest wartość bezwzględna $L(\mathfrak{A})$ różnicy między liczbą pierwiastków dodatnich i ujemnych wielomianu pseudocharakterystycznego $W(\lambda)$.

Liczbę $L(\mathfrak{A})$ nazywać będziemy *drugim wskaźnikiem rzutowym* tworu $\mathfrak{A}$.

Dowód. Identyfikując każdy punkt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}\;\varepsilon\;\mathfrak{P}_n$ z punktem niewłaściwym $\{0, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ przestrzeni $\mathfrak{P}_{n+1}$ (której punkty są postaci $\{x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$), możemy równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ uważać za równanie pewnego tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}^*$ drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_{n+1}$ o środku $\{1, 0, \ldots, 0\}$; twór ten jest pewnym stożkiem (z uwagi na wniosek 5

z Nr 134). Stosując twierdzenie o redukcji z Nr 151, wnioskujemy, że istnieje obrót rzeczywisty przestrzeni $\mathfrak{P}_{n+1}$ dokoła początku układu określony przez wzory:

$$x_{-1}=x'_{-1}, \quad x_i=a_{i,0}\cdot x'_0+a_{i,1}\cdot x'_1+\ldots+a_{i,n}\cdot x'_n \quad \text{dla } i=0, 1, \ldots, n,$$

gdzie macierz $(a_{i,j})\,(i, j=0, 1, \ldots, n)$ jest ortogonalna, który przekształca równanie tworu w równanie postaci

$$A'_{-1}\cdot x_{-1}^2+A'_0\cdot x_0^2+\ldots+A'_n\cdot x_n^2=0, \tag{14}$$

przy czym $A'_{-1}=0$, gdyż środek $\{1, 0, \ldots, 0\}\;\varepsilon\;\mathfrak{P}_{n+1}$ leży na tworze. W myśl twierdzenia z Nr 148 wielomian charakterystyczny dla tworu $\mathfrak{A}^*$ nie ulegnie zmianie przy tym obrocie, czyli

$$|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\,(i, j=0, 1, \ldots, n)=(A'_0-\lambda)\cdot(A'_1-\lambda)\cdot\ldots\cdot(A'_n-\lambda). \tag{15}$$

Lewa strona jest jednak wielomianem pseudocharakterystycznym równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0. \tag{16}$$

A więc spółczynniki $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ stanowią układ pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego równania (16).

Niech teraz $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)=\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ będzie dowolnym przekształceniem rzutowym rzeczywistym przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie określonym przez wzory:

$$x_i=b_{i,0}\cdot y_0+b_{i,1}\cdot y_1+\ldots+b_{i,n}\cdot y_n.$$

Po tym przekształceniu równanie (16) przybierze postać równania

$$\sum_{i,j=0}^{n} B_{i,j}\cdot y_i\cdot y_j=0, \tag{17}$$

określającego w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ twór rzeczywisty $\mathfrak{B}=\psi(\mathfrak{A})$. Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że istnieje przekształcenie rzeczywiste rzutowe

$$y_i=b''_{i,0}\cdot x''_0+b''_{i,1}\cdot x''_1+\ldots+b''_{i,n}\cdot x''_n$$

o macierzy ortogonalnej $(b''_{i,j})\,(i, j=0, 1, \ldots, n)$, w którego wyniku równanie (17) przyjmie postać

$$\sum_{i=0}^{n} A''_i\cdot x''^2_i=0, \tag{18}$$

gdzie spółczynniki $A''_0, A''_1, \ldots, A''_n$ stanowią układ pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego równania (17). Biorąc jednak pod uwagę, że zarówno lewa strona równania (14), jak i lewa strona równania (18) powstały z lewej strony równania (16) drogą pewnego przekształcenia rzutowego rzeczywistego, wnioskujemy z lematu, że liczba dodatnich i liczba ujemnych pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego

$$|A_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\ (i,j=0,1,\ldots,n),$$

równania tworu $\mathfrak{A}$, są takie same jak odpowiednie liczby pierwiastków wielomianu

$$|B_{i,j}-\lambda\cdot\delta_i^j|\ (i,j=0,1,\ldots,n),$$

pseudocharakterystycznego dla równania tworu $\mathfrak{B}=\psi(\mathfrak{A})$.

Ale jak stwierdziliśmy w Nr 150 — układ pierwiastków wielomianu pseudocharakterystycznego jest przez twór $\mathfrak{A}$ wyznaczony jedynie z dokładnością do proporcjonalności. Wynika stąd, że zarówno liczba pierwiastków różnych od zera, jak i wartość bezwzględna różnicy między liczbą dodatnich a liczbą ujemnych pierwiastków, są jednakowe dla wielomianów pseudocharakterystycznych dowolnych równań tworu $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

Wniosek 1. *Dla tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}$ o równaniu* (16) *liczba $k(\mathfrak{A})$ różnych od zera pierwiastków wielomianu charakterystycznego, jak również liczba $l(\mathfrak{A})$ będąca wartością bezwzględną różnicy między liczbą dodatnich a liczbą ujemnych pierwiastków, są niezmiennikami przekształceń afinicznych rzeczywistych.*

Istotnie, przy przekształceniu afinicznym rzeczywistym przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ jej $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna niewłaściwa, czyli zbiór punktów postaci $\{0,x_1,\ldots,x_n\}\ \varepsilon\ \mathfrak{P}_n$, które identyfikować możemy z punktami postaci $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\ \varepsilon\ \mathfrak{P}_{n-1}$, ulega przekształceniu rzutowemu rzeczywistemu. Równanie $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ określa w $\mathfrak{P}_{n-1}$ twór $\mathfrak{A}_0$, przy czym jego wielomian pseudocharakterystyczny jest identyczny z wielomianem charakterystycznym równania (16). Niezmienniczość liczb $k(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$ otrzymamy więc, stosując ostatnie twierdzenie do tworu $\mathfrak{A}_0$.

Niezmienniczość afiniczną liczby $k(\mathfrak{A})$ stwierdziliśmy już na innej drodze, w Nr 153 (wniosek 2). Tam też okazaliśmy, że liczba $k(\mathfrak{A})$ jest identyczna z tak zwanym *pierwszym wskaźnikiem afinicznym tworu* $\mathfrak{A}$, czyli z rzędem macierzy $|A_{i,j}|\ (i,j=1,2,\ldots,n)$.

Liczbę $l(\mathfrak{A})$ nazywać będziemy *drugim wskaźnikiem afinicznym* tworu $\mathfrak{A}$.

Liczby K, k, L, l nie są od siebie niezależne. Z uwagi na wniosek 3 i 4 z Nr 153 różnica $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})$ przybierać może jedynie wartości 0, 1 i 2.

W przypadku pierwszym, równanie kanoniczne tworu ma postać:

$$A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,$$

skąd wynika, że $L(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})$.

W przypadku drugim równanie kanoniczne ma postać

$$A_0\cdot x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,\text{ gdzie }A_0\neq 0,$$

skąd wynika, że $|L(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})|=1$. Wreszcie w przypadku trzecim równanie kanoniczne ma postać

$$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,$$

skąd wynika, że $L(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})$.

Mamy więc następujący

Wniosek 2. *Między wskaźnikami rzutowymi a afinicznymi zachodzą następujące zależności*:

$$0\leq l(\mathfrak{A})\leq k(\mathfrak{A})\leq K(\mathfrak{A})\leq k(\mathfrak{A})+2,\quad 0\leq L(\mathfrak{A})\leq K(\mathfrak{A}).$$

Jeżeli $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})$ jest zerem lub dwójką, to $L(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A})$, jeśli zaś $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})=1$, to $|L(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})|=1$.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć wskaźniki rzutowe i afiniczne dla stożkowych i kwadryk.

2. Okazać na przykładzie, że żaden ze wskaźników afinicznych nie jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych rzeczywistych.

3. Okazać, że dowolnie dany twór kwadratowy rzeczywisty można przekształcić rzutowo, ale nie przy pomocy przekształcenia rzeczywistego, na inny twór rzeczywisty, mający drugi wskaźnik rzutowy różny od drugiego wskaźnika rzutowego tworu danego.

159. Klasyfikacja rzutowa tworów drugiego stopnia. Okażemy, że z punktu widzenia ogólnej geometrii rzutowej przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, twór $\mathfrak{A}$ stopnia ≤ 2 jest scharakteryzowany przez swój pierwszy wskaźnik rzutowy, zaś z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, twór rzeczywisty $\mathfrak{A}$ jest scharakteryzowany przez oba swe wskaźniki rzutowe. Inaczej mówiąc, udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ będą tworami stopnia ≤ 2 w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Aby istniało przekształcenie rzutowe $\varphi(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}'$, potrzeba i wystarcza, by*

$$K(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A}').$$

Jeśli zaś twory $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{A}'$ *są rzeczywiste, to na to, by istniało przekształcenie rzutowe rzeczywiste* $\varphi(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}'$, *potrzeba i wystarcza, by*

$$K(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A}') \text{ i } L(\mathfrak{A})=L(\mathfrak{A}').$$

Dowód. Konieczność warunków wynika natychmiast z wniosku 1 z Nr 134 oraz z twierdzenia z Nr 158. Pozostaje do okazania, że warunki są dostateczne.

Załóżmy więc najpierw, że

$$K(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A}')=m+1. \tag{19}$$

Wobec wniosku 5 z Nr 153 możemy przyjąć, że twór $\mathfrak{A}$ określony jest przez równanie

$$\sum_{i=0}^{m} A_i\cdot x_i^2=0, \quad \text{gdzie } A_i\neq 0 \quad \text{dla } i=0,1,\ldots,m, \tag{20}$$

a twór $\mathfrak{A}'$ — przez równanie

$$\sum_{i=0}^{m} A_i'\cdot x_i^2=0, \quad \text{gdzie } A_i'\neq 0 \quad \text{dla } i=0,1,\ldots,m. \tag{21}$$

Niech teraz α_i będzie taką liczbą (na ogół zespoloną), że $\alpha_i^2=\frac{A_i'}{A_i}$ dla $i=0, 1, \ldots, m$, oraz $\alpha_i=1$ dla $i>m$. Jasne jest, że przekształcenie rzutowe określone przez wzory:

$$x_i=\alpha_i\cdot x_i' \quad \text{dla } i=0, 1, \ldots, n \tag{22}$$

przekształca twór $\mathfrak{A}$ na twór $\mathfrak{A}'$.

Załóżmy następnie, że twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są rzeczywiste i że prócz (19) zachodzi zależność

$$L(\mathfrak{A})=L(\mathfrak{A}').$$

Wobec wniosku 5 z Nr 153 możemy przyjąć, że twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są określone przez równania (20) i (21) o spółczynnikach rzeczywistych, przy czym w obu tych równaniach ilość spółczynników dodatnich jest jednakowa i podobnie ilość spółczynników ujemnych. Po ewentualnej zmianie porządku wskaźników możemy więc przyjąć, że:

$$\frac{A_i'}{A_i}>0 \text{ dla } i=0, 1, \ldots, m.$$

Biorąc więc $\alpha_i=\sqrt{\frac{A_i'}{A_i}}$ dla $i=0, 1, \ldots, m$, zaś $\alpha_i=1$ dla $i>m$, mamy

określone przez wzory (22) przekształcenie rzutowe $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Wniosek 1. *Żadne dwie rozmaitości drugiego stopnia w przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *nie różnią się między sobą z punktu widzenia geometrii rzutowej zespolonej.*

Wniosek 2. *Istnieje w* $\mathfrak{P}_n$ *dokładnie n typów tworów drugiego stopnia różniących się między sobą z punktu widzenia geometrii rzutowej zespolonej.*

Istotnie, typy te otrzymamy, przyjmując dla pierwszego wskaźnika rzutowego $K(\mathfrak{A})$ kolejne wartości $2, 3, \ldots, n+1$, gdyż dla $K(\mathfrak{A})=1$ twór jest stopnia pierwszego.

Wniosek 3. *Z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej w przestrzeni* $\mathfrak{P}_n$ *istnieje wśród rozmaitości rzeczywistych drugiego stopnia* $\mathrm{E}\frac{n+3}{2}$[1] *różnych typów, zaś wśród tworów rzeczywistych drugiego stopnia* $\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{E}\frac{\nu+3}{2}$[2] *różnych typów.*

Istotnie, wszystkie różne typy rozmaitości rzeczywistych drugiego stopnia otrzymamy, zakładając, że wśród $n+1$ spółczynników rzeczywistych $A_0, A_1, \ldots, A_n$ równania $\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot x_i^2=0$ jest $0, 1, \ldots, \mathrm{E}\frac{n+1}{2}$ ujemnych. Natomiast wszystkie typy tworów rzeczywistych drugiego stopnia otrzymamy, przyjmując $K(\mathfrak{A})=\nu+1$, gdzie ν przybiera kolejno wartości $1, 2, \ldots, n$, i zakładając kolejno, że wśród $\nu+1$ spółczynników rzeczywistych równania (20) jest $0, 1, \ldots, \mathrm{E}\frac{\nu+1}{2}$ ujemnych.

W szczególności dla $n=2$ otrzymujemy $\mathrm{E}\frac{n+3}{2}=2$.

A więc *na płaszczyźnie rzutowej mamy dwa różne typy rozmaitości rzeczywistych*: typ stożkowych, scharakteryzowany przez warunki:

$$K(\mathfrak{A})=3 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=1,$$

oraz typ rozmaitości bez punktów rzeczywistych, scharakteryzowany przez warunki:

$$K(\mathfrak{A})=3 \text{ i } L(\mathfrak{A})=3.$$

---

[1] Dla każdej liczby rzeczywistej x symbol $\mathrm{E}x$ oznacza największą całość (po francusku »entier«) zawartą w x, tj. liczbę całkowitą k spełniającą nierówność $k\leqq x<k+1$.

[2] Łatwo okazać, że suma ta (dla każdego naturalnego n) daje się wyrazić wzorem: $\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{E}\frac{\nu+3}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(n^2+7n-2\mathrm{E}\frac{n}{2}\right)$.

Natomiast wszystkich typów krzywych rzeczywistych drugiego stopnia jest $\mathrm{E}\frac{1+3}{2}+\mathrm{E}\frac{2+3}{2}=4$: mianowicie dochodzi do poprzednich typ dwóch różnych prostych rzeczywistych, gdy

$$K(\mathfrak{A})=2 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=0,$$

oraz dwóch różnych prostych, mających jeden tylko (wspólny) punkt rzeczywisty, gdy

$$K(\mathfrak{A})=2 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=2.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy $\mathrm{E}\frac{n+3}{2}=3$.

A więc *w przestrzeni rzutowej $\mathfrak{P}_3$ mamy trzy różne typy rozmaitości rzeczywistych*: typ, do którego należy hiperboloida jednopowłokowa i paraboloida hiperboliczna, scharakteryzowany przez warunki

$$K(\mathfrak{A})=4 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=0,$$

dalej typ, do którego należą pozostałe trzy kwadryki, scharakteryzowany przez warunki:

$$K(\mathfrak{A})=4 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=2,$$

wreszcie typ, do którego należy rozmaitość bez punktów rzeczywistych, scharakteryzowany przez warunki

$$K(\mathfrak{A})=4 \quad \text{i} \quad L(\mathfrak{A})=4.$$

Wszystkich rzeczywistych typów powierzchni w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ mamy:

$$\mathrm{E}\frac{1+3}{2}+\mathrm{E}\frac{2+3}{2}+\mathrm{E}\frac{3+3}{2}=7.$$

ĆWICZENIA. 1. Czy powierzchnie określone przez równania:

$$3x_0^2-4x_0\cdot x_1+4x_0\cdot x_2+2x_0\cdot x_3+3x_1^2+2x_1\cdot x_2-8x_1\cdot x_3+5x_2^2-4x_2\cdot x_3+x_3^2=0,$$
$$5x_0^2-4x_0\cdot x_1-4x_0\cdot x_2-2x_0\cdot x_3-x_1^2-6x_1\cdot x_2+8x_1\cdot x_3-3x_2^2+4x_2\cdot x_3-x_3^2=0$$

różnią się z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej?

2. Znaleźć przekształcenie rzutowe rzeczywiste, które krzywą o równaniu

$$2x_0^2+6x_0\cdot x_2-3x_1^2+3x_1\cdot x_2=0$$

przekształca na krzywą o równaniu

$$x_0^2+12x_0\cdot x_1-12x_0\cdot x_2-15x_1^2-54x_1\cdot x_2-27x_2^2=0.$$

3. Okazać, że jeśli $\mathfrak{A}$ jest rzeczywistą rozmaitością drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, przy czym $L(\mathfrak{A})=l$, i jeśli A jest zbiorem punktów rzeczywistych tworu $\mathfrak{A}$, to w przestrzeni P_n istnieje hiperpłaszczyzna o wymiarze $\frac{n+l-1}{2}$, rozłączna z A, natomiast każda hiperpłaszczyzna o wymiarze wyższym, leżąca w P_n, przecina A.

160. Klasyfikacja afiniczna tworów drugiego stopnia. Okażemy, że z punktu widzenia ogólnej geometrii afinicznej przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ twór $\mathfrak{A}$ stopnia $\leqq 2$ jest scharakteryzowany przez oba swe pierwsze wskaźniki: rzutowy i afiniczny, zaś z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ twór rzeczywisty $\mathfrak{A}$ stopnia $\leqq 2$ jest scharakteryzowany przez swe oba wskaźniki rzutowe i oba wskaźniki afiniczne. Inaczej mówiąc udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ będą dwoma tworami stopnia $\leqq 2$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Aby istniało przekształcenie afiniczne φ, przy którym $\mathfrak{A}$ przechodzi na $\mathfrak{A}'$, potrzeba i wystarcza, by*:

$$K(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A}') \quad \text{i} \quad k(\mathfrak{A})=k(\mathfrak{A}').$$

Jeżeli zaś twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ są rzeczywiste, to na to, by istniało przekształcenie afiniczne rzeczywiste φ, przy którym $\mathfrak{A}$ przechodzi na $\mathfrak{A}'$, potrzeba i wystarcza, by:

$$K(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A}'),\quad L(\mathfrak{A})=L(\mathfrak{A}'),\quad k(\mathfrak{A})=k(\mathfrak{A}'),\quad l(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A}').$$

Dowód. Konieczność warunków wynika z wniosku 1 z Nr 134, Nr 136 i twierdzenia z Nr 158. Pozostaje do okazania, że warunki są dostateczne.

Załóżmy więc, że pierwsze wskaźniki, rzutowy i afiniczny, są dla tworów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ odpowiednio jednakowe. Wobec wniosków 3 i 4 z Nr 153 różnica $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})$ jest równa 0, 1 lub 2. Rozpatrzymy kolejno te trzy możliwości.

W przypadku, gdy $K(\mathfrak{A})=k(\mathfrak{A})$, to każdy z tworów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ zawiera środek właściwy i możemy założyć, że równania ich mają postać

$$A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,\quad A_1'\cdot x_1^2+A_2'\cdot x_2^2+\ldots+A_m'\cdot x_m^2=0,$$

gdzie spółczynniki A_i i A_i' są dla $i=1,2,\ldots,m$ różne od zera. Oznaczając przez α_i liczbę (zespoloną) taką, że $\alpha_i^2=\frac{A_i'}{A_i}$ dla $i=1,2,\ldots,m$ oraz $\alpha_i=1$ dla $i=0$ i dla $i>m$, stwierdzamy natychmiast, że przekształcenie afiniczne określone przez wzory

$$x_i=\alpha_i\cdot x_i',\quad \text{gdzie } i=0,1,\ldots,n, \tag{23}$$

przekształca $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

W przypadku, gdy $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})=1$, twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ mają środek właściwy nie leżący na tworze i możemy założyć, że równania ich są postaci

$$A_0\cdot x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,\quad A_0'\cdot x_0^2+A_1'\cdot x_1^2+\ldots+A_m'\cdot x_m^2=0,$$

gdzie spółczynniki A_i i A'_i są dla $i=0, 1, \ldots, m$ różne od zera. Oznaczając przez α_i liczbę zespoloną taką, że $\alpha_i^2=\dfrac{A'_i\cdot A_0}{A_i\cdot A'_0}$ dla $i=1, 2, \ldots, m$ oraz $\alpha_i=1$ dla $i=0$ i dla $i>m$, stwierdzamy, że przekształcenie afiniczne (23) przekształca $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Wreszcie w przypadku, gdy $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})=2$, twory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ nie mają środków właściwych i możemy założyć, że równania ich mają postać

$$2x_0\cdot x_1+\sum_{\nu=2}^{m} A_i\cdot x_i^2=0, \qquad 2x_0\cdot x_1+\sum_{\nu=2}^{m} A'_i\cdot x_i^2=0,$$

gdzie spółczynniki A_i i A'_i są dla $i=2, 3, \ldots, m$ różne od zera. Oznaczając przez α_i liczbę zespoloną taką, że $\alpha_i^2=\dfrac{A'_i}{A_i}$ dla $i=2, 3, \ldots, m$ oraz $\alpha_i=1$ dla $i=0, 1$ i dla $i>m$, stwierdzamy, że przekształcenie afiniczne określone przez wzory (23) przekształca $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

W ten sposób okazaliśmy, że w przypadku zespolonym równość pierwszego wskaźnika rzutowego i pierwszego wskaźnika afinicznego tworów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ wystarcza na to, by istniało przekształcenie afiniczne $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Pozostaje do okazania, że w przypadku rzeczywistym równość wszystkich czterech wskaźników dla tworów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}'$ pociąga za sobą istnienie rzeczywistego przekształcenia afinicznego tworu $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Jeżeli $K(\mathfrak{A})=k(\mathfrak{A})=m$, to możemy założyć, że równania tworów są postaci

$$A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_d\cdot x_d^2-A_{d+1}\cdot x_{d+1}^2-\ldots-A_m\cdot x_m^2=0,$$
$$A'_1\cdot x_1^2+A'_2\cdot x_2^2+\ldots+A'_{d'}\cdot x_{d'}^2-A'_{d'+1}\cdot x_{d'+1}^2-\ldots-A'_m\cdot x_m^2=0,$$

gdzie liczby A_i i A'_i są dla $i=1, 2, \ldots, m$ dodatnie, przy czym możemy założyć, że $d\geqq\frac{m}{2}$ i $d'\geqq\frac{m}{2}$. Ponieważ $l(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A}')$, więc $|d-(m-d)|=|d'-(m-d')|$, skąd $(2d-m)^2=(2d'-m)^2$ czyli $(d-d')\cdot(d+d'-m)=0$, skąd wobec $d, d'\geqq\frac{m}{2}$, wynika $d=d'$. A więc iloraz $\dfrac{A'_i}{A_i}$ jest dla $i=1, 2, \ldots, m$ dodatni. Przyjmując $\alpha_i=\sqrt{\dfrac{A'_i}{A_i}}$ dla $i=1, 2, \ldots, m$ oraz $\alpha_i=1$ dla $i=0$ i dla $i>m$, stwierdzamy, że przekształcenie (23) jest afiniczne i rzeczywiste, przy czym przekształca ono $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Jeżeli $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})=1$, to możemy założyć, że równania tworów są postaci

$$A_0\cdot x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_d\cdot x_d^2-A_{d+1}\cdot x_{d+1}^2-\ldots-A_m\cdot x_m^2=0,$$
$$A'_0\cdot x_0^2+A'_1\cdot x_1^2+\ldots+A'_{d'}\cdot x_{d'}^2-A'_{d'+1}\cdot x_{d'+1}^2-\ldots-A'_m\cdot x_m^2=0,$$

gdzie liczby A_i i A'_i są dla $i=0, 1, \ldots, m$ dodatnie. Wobec $l(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A}')$ mamy $|d-(m-d)|=|d'-(m-d')|$, skąd $(d-d')\cdot(d+d'-m)=0$, a wobec $L(\mathfrak{A})=L(\mathfrak{A}')$ jest $|d+1-(m+1-d-1)|=|d'+1-(m+1-d'-1)|$, skąd $(d-d')\cdot(d+d'-m+1)=0$. Stąd $d=d'$. A więc iloraz $\dfrac{A'_i}{A_i}$ jest dla $i=0, 1, \ldots, m$ dodatni. Biorąc $\alpha_i=\sqrt{\dfrac{A'_i\cdot A_0}{A_i\cdot A'_0}}$ dla $i=0, 1, \ldots, m$, zaś $\alpha_i=1$ dla $i=0$ oraz $i>m$, stwierdzamy, że przekształcenie (23) jest afiniczne i rzeczywiste, przy czym przekształca ono $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

Jeżeli $K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A})=2$, to możemy założyć, że równania tworów są postaci

$$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_d\cdot x_d^2-A_{d+1}\cdot x_{d+1}^2-\ldots-A_m\cdot x_m^2=0,$$
$$2x_0\cdot x_1+A'_2\cdot x_2^2+\ldots+A'_{d'}\cdot x_{d'}^2-A'_{d'+1}\cdot x_{d'+1}^2-\ldots-A'_m\cdot x_m^2=0,$$

gdzie liczby A_i i A'_i są dla $i=2, 3, \ldots, m$ dodatnie. Ponieważ zmiana znaku przy wszystkich spółczynnikach A_i jest równoważna przekształceniu izometrycznemu

$$x_1=-x_1^* \quad \text{oraz} \quad x_i=x_i^* \text{ dla } i\neq 1,$$

a więc na postać tworu nie wpływa, przeto możemy założyć, że wśród spółczynników A_i, jak również wśród spółczynników A'_i dodatnich jest nie mniej niż ujemnych, czyli że $d-1\geqq\dfrac{m-1}{2}$ oraz $d'-1\geqq\dfrac{m-1}{2}$.

Wobec $l(\mathfrak{A})=l(\mathfrak{A}')$ mamy $|d-1-(m-d)|=|d'-1-(m-d')|$, skąd $(d-d')\cdot(d+d'-m-1)=0$. Wobec $d\geqq\dfrac{m+1}{2}$ i $d'\geqq\dfrac{m+1}{2}$ wynika stąd, że $d=d'$. A więc iloraz $\dfrac{A'_i}{A_i}$ jest dla $i=2, 3, \ldots, m$ dodatni. Biorąc $\alpha_i=\sqrt{\dfrac{A'_i}{A_i}}$ dla $i=2, 3, \ldots, m$ oraz $\alpha_i=1$ dla $i=0, 1$ i dla $i>m$, stwierdzamy, że przekształcenie afiniczne, określone przez wzory (23), przekształca $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{A}'$.

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rozmaitością drugiego stopnia w $\mathfrak{P}_n$, to $K(\mathfrak{A})=n+1$, zaś, wobec $0 \leq K(\mathfrak{A})-k(\mathfrak{A}) \leq 2$ i $k(\mathfrak{A}) \leq n$ jest

$$\text{albo } k(\mathfrak{A})=n, \quad \text{albo } k(\mathfrak{A})=n-1.$$

Pierwszą możliwość mamy np. w przypadku n-wymiarowej sfery o równaniu

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-x_0^2=0,$$

drugą w przypadku tworu o równaniu

$$2x_0\cdot x_1+x_2^2+\ldots+x_n^2=0.$$

Wynika stąd

Wniosek 1. *Z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej istnieją w $\mathfrak{P}_n$ dokładnie dwa różne typy rozmaitości stopnia drugiego.*

Jeżeli $K(\mathfrak{A})=m<n+1$ oraz $K(\mathfrak{A}) \geq 2$, to mamy dokładnie trzy typy, różne pod względem afinicznym, reprezentowane przez twory o równaniach:

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{m-1}^2=0, \quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2=0,$$

$$2x_0\cdot x_1+x_2^2+\ldots+x_{m-1}^2=0.$$

Biorąc $m=2, 3, \ldots, n$, otrzymamy łącznie $3(n-1)$ typów tworów drugiego stopnia nie będących rozmaitościami, skąd wynika

Wniosek 2. *Z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej istnieje w $\mathfrak{P}_n$ dokładnie $3n-1$ typów tworów drugiego stopnia.*

Zauważmy, że wśród rozmaitości rzeczywistych o równaniu postaci

$$x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_n\cdot x_n^2=0$$

istnieje $n+1$ typów różnych z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej, natomiast wśród rozmaitości o równaniu

$$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_n\cdot x_n^2=0$$

istnieje $\mathrm{E}\dfrac{n+1}{2}$ różnych typów. Wynika stąd

Wniosek 3. *Z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ istnieje $n+\mathrm{E}\dfrac{n+1}{2}+1$ różnych rozmaitości rzeczywistych drugiego stopnia.*

Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest tworem rzeczywistym drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ nie będącym rozmaitością (a więc jeżeli $K(\mathfrak{A}) \geq 2$, przy czym $K(\mathfrak{A})=m<n+1$), to jego równanie kanoniczne ma jedną z trzech postaci

$$x_0^2+A_1\cdot x_1^2+\ldots+A_{m-1}\cdot x_{m-1}^2=0,$$
$$A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_m\cdot x_m^2=0,$$
$$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2+\ldots+A_{m-1}\cdot x_{m-1}^2=0.$$

Jasne jest, że z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej istnieje m różnych tworów mających równanie pierwszej z tych postaci, $\mathrm{E}\dfrac{m}{2}+1$ różnych tworów mających równanie drugiej postaci, wreszcie $\mathrm{E}\dfrac{m-2}{2}+1=\mathrm{E}\dfrac{m}{2}$ różnych tworów mających równanie trzeciej postaci.

Łącznie więc tworów nie będących rozmaitościami jest

$$\sum_{m=2}^{n}\left[m+\mathrm{E}\frac{m}{2}+1+\mathrm{E}\frac{m}{2}\right]=\frac{(n+4)(n-1)}{2}+2\sum_{m=2}^{n}\left(\mathrm{E}\frac{m}{2}\right).$$

A więc wraz z rozmaitościami otrzymujemy

$$\frac{n^2+5n-2}{2}+2\sum_{m=2}^{n}\left(\mathrm{E}\frac{m}{2}\right)+\mathrm{E}\frac{n+1}{2}$$

różnych tworów stopnia drugiego. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to

$$\sum_{m=2}^{n}\left(\mathrm{E}\frac{m}{2}\right)=2\left(1+2+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{4}, \quad \mathrm{E}\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2},$$

a więc różnych tworów mamy

$$\frac{n_2+5n-2}{2}+\frac{n^2-1}{2}+\frac{n+1}{2}=n^2+3n-1.$$

Jeśli zaś n jest liczbą parzystą, to

$$\sum_{m=2}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right)=\sum_{m=2}^{n+1}\mathrm{E}\frac{m}{2}-\frac{n}{2}=\frac{(n+1)^2-1}{4}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}, \quad \mathrm{E}\frac{n+1}{2}=\frac{n}{2},$$

a więc różnych tworów mamy

$$\frac{n^2+5n-2}{2}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=n^2+3n-1.$$

Stąd otrzymujemy

Wniosek 4. *Z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ istnieje n^2+3n-1 różnych tworów rzeczywistych drugiego stopnia.*

ĆWICZENIA. 1. Czy w przestrzeni $\mathfrak{P}_5$ twory o równaniach

$$x_0\cdot x_1+x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_4+x_4\cdot x_5=0,\quad x_0\cdot x_1+x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_4+x_5^2=0$$

różnią się pod względem afinicznym?

2. Okazać, że w przestrzeni C_n jedynymi tworami ograniczonymi drugiego stopnia są obrazy afiniczne (rzeczywiste) sfer $(n-1)$-wymiarowych zdegenerowanych lub nie (w sensie przyjętym w Nr 111).

3. Okazać, że jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rozmaitością rzeczywistą drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ i jeżeli zbiór $A=\mathfrak{A}\cdot P_n$ zawiera co najmniej dwa punkty, to zbiór P_n-A rozpada się (i to dokładnie w jeden sposób) na dwa zbiory rozłączne, niepuste, których wspólnym brzegiem jest A.

161. Klasyfikacja afiniczna krzywych drugiego stopnia. Niech będzie dane równanie $\sum_{i,j=0}^{n} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ o spółczynnikach rzeczywistych tworu $\mathfrak{A}$ w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Drogą elementarnych rachunków, opartych na tzw. twierdzeniu Sturma (zob. Nr 148, str. 375), można wyznaczyć liczbę dodatnich oraz ujemnych pierwiastków wielomianów charakterystycznego i pseudocharakterystycznego, a więc obliczyć oba wskaźniki afiniczne i oba wskaźniki rzutowe i tym samym całkowicie określić typ afiniczny tworu $\mathfrak{A}$.

W przypadkach $n=2$ i $n=3$ do wyznaczenia tego typu doprowadzi nas jednak droga bardziej elementarna, oparta na Nr 149. Z udowodnionego tam twierdzenia wynika mianowicie, że jeśli

$$W(\lambda)=-\lambda^3+B_1\cdot\lambda^2-B_2\cdot\lambda+B_3$$

jest wielomianem pseudocharakterystycznym równania $\sum_{i,j=0}^{2} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$, gdzie $B_3\neq 0$, to $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy liczby B_2 i $B_1\cdot B_3$ są obie dodatnie; w pozostałych zaś przypadkach $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$ jest dodatnie. Wynika stąd, że wyznaczenie znaku różnicy $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$ (będącego niezmiennikiem przekształceń rzutowych rzeczywistych) nie nastręcza w przypadku $n=2$ żadnych trudności natury algebraicznej. Również wyznaczenie wartości $K(\mathfrak{A})$ (czyli rzędu macierzy wielkiego wyróżnika), podobnie jak i wartości $k(\mathfrak{A})$ (czyli rzędu macierzy małego wyróżnika) oraz znaku małego wyróżnika $\overline{\mathfrak{m}}$ (będącego z uwagi na wniosek 2 z Nr 146 niezmiennikiem przekształceń afinicznych rzeczywistych) nie nastręcza trudności algebraicznych.

Okażemy obecnie, że w przypadku $n=2$ te cztery niezmienniki, mianowicie liczby $K(\mathfrak{A})$, $k(\mathfrak{A})$ oraz znaki przy $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$ i $\overline{\mathfrak{m}}$, całkowicie wyznaczają twór $\mathfrak{A}$ z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej. W tym celu zestawimy wartości tych niezmienników, jak również wartości $L(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$, w następującej tablicy:

Nr	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	$K(\mathfrak{A})$	$L(\mathfrak{A})$	$k(\mathfrak{A})$	$l(\mathfrak{A})$	Postać kanoniczna	Nazwa tworu	$\overline{\mathfrak{m}}$	$K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$
1	3	3	2	2	$x_0^2+A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2=0$	Rozmaitość bez punktów rzeczywistych	+	0
2		1	2	2	$x_0^2-A_1\cdot x_1^2-A_2\cdot x_2^2=0$	Elipsa	+	+
3			2	0	$x_0^2+A_1\cdot x_1^2-A_2\cdot x_2^2=0$	Hiperbola	−	+
4			1	1	$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2=0$	Parabola	0	+
5	2	2	2	2	$A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2=0$	Para prostych urojonych przecinających się w punkcie rzeczywistym właściwym	+	0
6			1	1	$x_0^2+A_1\cdot x_1^2=0$	Para prostych urojonych równoległych	0	0
7		0	2	0	$A_1\cdot x_1^2-A_2\cdot x_2^2=0$	Para prostych rzeczywistych przecinających się	−	+
8			1	1	$x_0^2-A_1\cdot x_1^2=0$	Para prostych rzeczywistych równoległych	0	+
9			0	0	$2x_0\cdot x_1=0$	Para prostych: właściwa rzeczywista i niewłaściwa	0	+
10	1	1	1	1	$x_1^2=0$	Prosta właściwa rzeczywista	0	0
11			0	0	$x_0^2=0$	Prosta niewłaściwa	0	0

Kolumna I określa twór, w myśl twierdzenia z Nr 159, z punktu widzenia geometrii rzutowej zespolonej, zaś łącznie z kolumną II — z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej. Kolumny I i III wyznaczają twór, w myśl twierdzenia z Nr 160, z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej, zaś I, II, III i IV wyznaczają twór z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej.

Kolumny VII i VIII zawierają niezmienniki pomocnicze, a mianowicie znaki przy $\overline{\mathfrak{m}}$ i przy $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$, których wyznaczenie jest algebraicznie łatwiejsze niż obliczenie $l(\mathfrak{A})$ i $L(\mathfrak{A})$.

Jak widać z tablicy, znajomość ich, łącznie z wartościami $K(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$ wyznacza całkowicie twór z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej.

ĆWICZENIA. 1. Zbadać, jakie twory określone są (z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej) przez równania:

$$10x_0^2-12x_0\cdot x_1+18x_0\cdot x_2+20x_1^2-52x_1\cdot x_2+34x_2^2=0,$$
$$9x_0^2-12x_0\cdot x_1+30x_0\cdot x_2+20x_1^2-92x_1\cdot x_2+106x_2^2=0,$$
$$6x_0^2-4x_0\cdot x_1+6x_0\cdot x_2+16x_1^2-40x_1\cdot x_2+25x_2^2=0,$$
$$8x_0^2-12x_0\cdot x_1+18x_0\cdot x_2-4x_1^2-12x_1\cdot x_2+9x_2^2=0.$$

2. Dobrać parametr a w taki sposób, by równanie

$$8ax_0^2+2(6-5a)\cdot x_0\cdot x_1+6(4a-3)\cdot x_0\cdot x_2+$$
$$+(3a-4)\cdot x_1^2-2(2+a)\cdot x_1\cdot x_2-(1+8a)\cdot x_2^2=0$$

przedstawiało dwie proste rzeczywiste równoległe. Czym jest krzywa dla pozostałych wartości parametru a?

162. Klasyfikacja afiniczna powierzchni drugiego stopnia. W przypadku $n=3$ niezmiennikiem przekształceń rzutowych rzeczywistych jest znak wielkiego wyróżnika $\mathfrak{M}$ (na mocy wniosku 2 z Nr 145). Wielomian charakterystyczny równania $\sum_{i,j=0}^{3} A_{i,j}\cdot x_i\cdot x_j=0$ ma postać

$$V(\lambda)=-\lambda^3+B_1\cdot\lambda^2-B_2\cdot\lambda+B_3.$$

Jeżeli $B_3\neq 0$, to (wobec Nr 149) różnica $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$ znika wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby B_2 i $B_1\cdot B_3$ są dodatnie. W pozostałych przypadkach $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$ jest dodatnie. A więc wyznaczenie znaku różnicy $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$, będącej niezmiennikiem przekształceń afinicznych rzeczywistych nie nastręcza trudności natury algebraicznej. To samo dotyczy wartości wskaźników $K(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$.

Okażemy, że dla *rozmaitości*, czyli w przypadku $K(\mathfrak{A})=4$, niezmienniki $K(\mathfrak{A})$, $k(\mathfrak{A})$, znak różnicy $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$ i znak wielkiego wyróżnika $\mathfrak{M}$ wyznaczają całkowicie twór z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej. Tym samym okażemy, że ustalenie, czym jest rozmaitość drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_3$ (z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej), nie nastręcza trudności algebraicznych. W tym celu zestawmy wartości tych niezmienników, jak również wartości $L(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$, w tablicy na str. 419.

Wartość $K(\mathfrak{A})=4$, podana w kolumnie I, znaczy, że twór jest rozmaitością, a łącznie z wartością $L(\mathfrak{A})$, podaną w kolumnie II, charakteryzuje twór z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej.

Kolumny I i III charakteryzują twór z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej, zaś kolumny I, II, III i IV — z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej.

Kolumny VII i VIII zawierają niezmienniki pomocnicze, których wyznaczenie jest algebraicznie prostsze niż bezpośrednie obliczanie

$L(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$, co sprawiać może pewien kłopot, gdyż wymaga wyznaczenia znaków pierwiastków równania czwartego i trzeciego stopnia.

Jak widać z tablicy, znajomość znaków $\overline{\mathfrak{M}}$ i $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$ łącznie z wartościami $K(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$ wyznacza całkowicie rozmaitość $\mathfrak{A}$ z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej.

Nr	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	$K(\mathfrak{A})$	$L(\mathfrak{A})$	$k(\mathfrak{A})$	$l(\mathfrak{A})$	Postać kanoniczna	Nazwa tworu	$\overline{\mathfrak{M}}$	$k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$
1	4	4	3	3	$x_0^2+A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+A_3\cdot x_3^2=0$	Rozmaitość bez punktów rzeczywistych	+	0
2		2	3	3	$x_0^2-A_1\cdot x_1^2-A_2\cdot x_2^2-A_3\cdot x_3^2=0$	Elipsoida	−	0
3			3	1	$x_0^2-A_1\cdot x_1^2+A_2\cdot x_2^2+A_3\cdot x_3^2=0$	Hiperboloida dwupowłokowa	−	+
4			2	2	$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2+A_3\cdot x_3^2=0$	Paraboloida eliptyczna	−	0
5		0	3	1	$x_0^2-A_1\cdot x_1^2-A_2\cdot x_2^2+A_3\cdot x_3^2=0$	Hiperboloida jednopowłokowa	+	+
6			2	0	$2x_0\cdot x_1+A_2\cdot x_2^2-A_3\cdot x_3^2=0$	Paraboloida hiperboliczna	+	+

Zauważmy, że niezmienniki te nie charakteryzują już tworów nie będących rozmaitościami, gdyż np. dla obu równań $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ i $x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$ mamy:

$$K(\mathfrak{A})=3,\quad k(\mathfrak{A})=2,\quad \overline{\mathfrak{M}}=0,\quad k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})=0,$$

mimo że pierwsze z tych równań określa twór, którego jedynym punktem rzeczywistym jest punkt niewłaściwy $\{0, 0, 0, 1\}$, natomiast drugie określa walec obrotowy.

Z tego względu, dla tworów nie będących rozmaitościami weźmiemy, prócz znaku różnicy $k(\mathfrak{A})-l(\mathfrak{A})$, za pomocniczy niezmiennik znak różnicy $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$. Zauważmy przede wszystkim, że w przypadku $K(\mathfrak{A})<4$ znak tej różnicy daje się wyznaczyć bez trudności algebraicznych. Istotnie, $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})\geq 0$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie różne od zera pierwiastki wielomianu pseudocharakterystycznego

$$W(\lambda)=\lambda^4-\overline{B}_1\cdot\lambda^3+\overline{B}_2\cdot\lambda^2-\overline{B}_3\cdot\lambda+\overline{B}_4$$

mają znaki jednakowe. Jeżeli jednak $K(\mathfrak{A})<4$, to $\overline{B}_4=0$ i pierwiastki te są identyczne z pierwiastkami wielomianu $\lambda^3-\overline{B}_1\cdot\lambda^2+\overline{B}_2\cdot\lambda-\overline{B}_3$, którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste. Jeżeli $B_3\neq 0$, to w myśl twierdzenia z Nr 149 znaki tych pierwiastków są jednakowe wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby $\overline{B}_2$ i $\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_3$ są dodatnie.

Dla tworów nie będących rozmaitościami rozpoznanie postaci tworu opieramy więc na niezmiennikach $K(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$ oraz na znakach różnic $K(\mathfrak{A})$—$L(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$—$l(\mathfrak{A})$. Natomiast pominąć możemy znak wielkiego wyróżnika $\mathfrak{M}$, który dla tworów tych jest stale zerem. A więc tablica przybierze postać:

Nr	I	II	III	IV	V	VI	VII	V…
	$K(\mathfrak{A})$	$L(\mathfrak{A})$	$k(\mathfrak{A})$	$l(\mathfrak{A})$	Postać kanoniczna	Nazwa tworu	$K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})$	$k(\mathfrak{A})$…
7	3	3	3	3	$A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 + A_3 \cdot x_3^2 = 0$	Twór zawierający tylko 1 punkt rzeczywisty właściwy	0	
8			2	2	$x_0 + A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Twór zawierający tylko 1 punkt rzeczywisty niewłaściwy	0	
9		1	3	1	$A_1 \cdot x_1^2 - A_2 \cdot x_2^2 - A_3 \cdot x_3^2 = 0$	Stożek	+	
10			2	2	$x_0^2 - A_1 \cdot x_1^2 - A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Walec eliptyczny	+	
11			2	0	$x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 - A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Walec hiperboliczny	+	
12			1	1	$2x_0 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Walec paraboliczny	+	
13	2	2	2	2	$A_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Para płaszczyzn urojonych, przecinających się wzdłuż prostej rzeczywistej właściwej	0	
14			1	1	$x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = 0$	Para płaszczyzn urojonych równoległych	0	
15		0	2	0	$A_1 \cdot x_1^2 - A_2 \cdot x_2^2 = 0$	Para płaszczyzn rzeczywistych właściwych, przecinających się wzdłuż prostej właściwej	+	
16			1	1	$x_0^2 - A_1 \cdot x_1^2 = 0$	Para płaszczyzn rzeczywistych właściwych równoległych	+	
17			0	0	$2x_0 \cdot x_1 = 0$	Para płaszczyzn: jedna właściwa, druga niewłaściwa	+	
18	1	1	1	1	$x_1^2 = 0$	Płaszczyzna rzeczywista właściwa	0	
19		1	0	0	$x_0^2 = 0$	Płaszczyzna niewłaściwa	0	

Kolumna I określa twór z punktu widzenia geometrii rzutowej zespolonej, zaś łącznie z kolumną II — z punktu widzenia geometrii rzutowej rzeczywistej. Kolumny I i III określają twór z punktu widzenia geometrii afinicznej zespolonej, łącznie zaś z kolumnami II i IV — z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej. Znajomość kolumn VII i VIII, przy znanych wartościach $K(\mathfrak{A})$ i $k(\mathfrak{A})$, zastępuje znajomość wartości $L(\mathfrak{A})$ i $l(\mathfrak{A})$, dzięki czemu wyznaczenie tworu z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej nie natrafia na trudności algebraiczne.

ĆWICZENIA. 1. Czym są z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej twory, określone w $\mathfrak{P}_3$ przez równania:

$$3x_0^2 + 4x_0 \cdot x_1 + 2x_1^2 - 4x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \cdot x_3 + 5x_2^2 - 10x_2 \cdot x_3 + 10x_3^2 = 0,$$
$$5x_0^2 + 4x_0 \cdot x_1 + 4x_0 \cdot x_2 + 2x_1^2 - 6x_1 \cdot x_2 + 2x_1 \cdot x_3 + 6x_2^2 - 10x_2 \cdot x_3 + 10x_3^2 = 0,$$
$$4x_0 \cdot x_3 - x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 6x_1 \cdot x_3 - x_2^2 - 6x_2 \cdot x_3 - 13x_3^2 = 0,$$
$$2x_0^2 - 4x_0 \cdot x_3 - x_1^2 + 2x_1 \cdot x_3 + 6x_1 \cdot x_3 + x_2^2 - 6x_2 \cdot x_3 + 5x_3^2 = 0,$$
$$3x_0^2 + 4x_0 \cdot x_1 + 10x_0 \cdot x_2 - 8x_0 \cdot x_3 - 3x_1^2 - 32x_1 \cdot x_2 + 11x_2^2 + 4x_3^2 = 0?$$

2. Czym jest z punktu widzenia geometrii afinicznej rzeczywistej przecięcie tworu określonego w $\mathfrak{P}_4$ przez równanie

$$x_0^2 - 2x_0 \cdot x_1 + 2x_1^2 - 5x_1 \cdot x_2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_3 \cdot x_4 + x_4^2 = 0,$$

hiperpłaszczyzną o równaniu $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$?

163. Tworzące prostoliniowe tworu P (por. Nr 134) są to proste położone całkowicie na tym tworze. Z pojęciem tym w dziedzinie rzeczywistej spotkaliśmy się już w Nr 73 (przy walcach i stożkach) oraz w Nr 76 i Nr 104, gdzie stwierdziliśmy istnienie tworzących prostoliniowych dla hiperboloidy jednopowłokowej i dla paraboloidy hiperbolicznej.

Obecnie zajmiemy się kwestią istnienia tworzących prostoliniowych dla dowolnych tworów drugiego stopnia w dziedzinie zespolonej.

Układ k prostych, przechodzących przez dany punkt a, nazywamy *liniowo zależnym*, jeżeli istnieje hiperpłaszczyzna o wymiarze mniejszym od k, zawierająca wszystkie te proste.

Jeśli hiperpłaszczyzna taka nie istnieje, to układ prostych nazywa się *liniowo niezależnym*.

Są to oczywiście pojęcia rzutowe. Jasne jest, że w przypadku, gdy dany punkt a jest właściwy, liniowa niezależność układu k prostych, przechodzących przez ten punkt, jest równoważna liniowej niezależności układu ich punktów niewłaściwych.

Dla każdego punktu p tworu $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ oznaczmy przez $\tau_{\mathfrak{A}}(p)$ maksymalną ilość liniowo niezależnych tworzących, przechodzących przez punkt p. Zachodzi wówczas

Twierdzenie. *Jeżeli p jest punktem osobliwym tworu $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, to*

$$\tau_{\mathfrak{A}}(p)=n,$$

jeżeli zaś p jest punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$, to

$$\tau_{\mathfrak{A}}(p)=n-1,\ \textit{gdy}\ K(\mathfrak{A})\neq 3,\ \textit{a}\ \tau_{\mathfrak{A}}(p)=n-2,\ \textit{gdy}\ K(\mathfrak{A})=3.$$

Dowód. Ponieważ twierdzenie dotyczy własności będącej niezmiennikiem ogólnych przekształceń rzutowych, więc wobec wniosku 6 z Nr 153 możemy założyć, że równanie tworu $\mathfrak{A}$ ma postać

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2=0, \quad \text{gdzie } k=K(\mathfrak{A})>1. \tag{28}$$

Punkty osobliwe scharakteryzowane są przez równania $x_i=0$ dla $i=0, 1, \ldots, k-1$. Jeśli więc $p=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ jest punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$, to co najmniej jedna ze spółrzędnych $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ nie znika; wobec symetrii założeń, możemy przyjąć, że np. $a_0=1$. Mamy więc

$$1+a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2=0. \tag{29}$$

Jeżeli prosta przechodząca przez punkt p ma kierunek $\{0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, to jej punkty właściwe mają postać:

$$\{1, a_1+\alpha_1\cdot t, \ldots, a_{k-1}+\alpha_{k-1}\cdot t, a_k+\alpha_k\cdot t, \ldots, a_n+\alpha_n\cdot t\}.$$

By była ona tworzącą, potrzeba i wystarcza, by równocześnie:

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i\cdot\alpha_i=0 \tag{30}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i^2=0. \tag{31}$$

Jeżeli $k=2$, to równanie (29) ma postać $1+a_1^2=0$, skąd $a_1=\pm i$, zaś równanie (30) redukuje się do $a_1\cdot\alpha_1=0$, skąd $\alpha_1=0$. Zależność (31) jest wówczas spełniona. Zatem równania (30) i (31) spełnione są wówczas przez wszystkie kierunki postaci $\{0, 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, wśród nich zaś jest $n-1$ liniowo niezależnych. A więc $\tau_{\mathfrak{A}}(p)=n-1$.

Jeżeli $k=3$, to równania (29) i (30) mają postać

$$1+a_1^2+a_2^2=0 \quad \text{i} \quad a_1\cdot\alpha_1+a_2\cdot\alpha_2=0.$$

Obie liczby a_1 i a_2 nie znikają, możemy więc założyć, że np. $a_1\neq 0$. Wówczas $\alpha_1=-\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\alpha_2$, co po podstawieniu do (31) daje $\dfrac{a_2^2}{a_1^2}\cdot\alpha_2^2+\alpha_2^2=0$,

czyli $\alpha_2=0$. Wynika stąd, że kierunki tworzących są identyczne z kierunkami postaci $\{0, 0, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$, skąd wynika $\tau_{\mathfrak{A}}(p)=n-2$.

Jeżeli wreszcie $k>3$, to wobec (29) możemy założyć, że np. $a_1\neq 0$. Równanie (30) określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-1}$, której punkty są postaci $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, pewną $(n-2)$-wymiarową hiperpłaszczyznę. Wynika stąd, że kierunków liniowo niezależnych tworzących jest co najwyżej $(n-2)+1=n-1$. Z (30) otrzymujemy

$$\alpha_1=-\left(\frac{a_2}{a_1}\cdot\alpha_2+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_1}\cdot\alpha_{k-1}\right),$$

co po podstawieniu do (31) daje równanie

$$(a_2\cdot\alpha_2+\ldots+a_{k-1}\cdot\alpha_{k-1})^2+a_1^2\cdot\sum_{i=2}^{k-1}\alpha_i^2=0,$$

czyli kierunki tworzących tworu $\mathfrak{A}$ przechodzących przez p scharakteryzowane są przez równanie

$$\sum_{i=2}^{k-1}\left(a_1^2+a_i^2\right)\cdot\alpha_i^2+2\sum_{\substack{i,j=2\\ i\neq j}}^{k-1} a_i\cdot a_j\cdot\alpha_i\cdot\alpha_j=0. \tag{32}$$

Równanie to określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-2}$, której punkty są postaci $\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$, pewien twór stopnia ≤ 2. Gdyby stopień ten był <2, to wobec wniosku 7 z Nr 134, wszystkie podwyznaczniki stopnia 2 macierzy

$$\begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_2\cdot a_3 & \ldots & a_2\cdot a_{k-1}\\ a_3\cdot a_2 & a_1^2+a_3^2 & \ldots & a_3\cdot a_{k-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k-1}\cdot a_2 & a_{k-1}\cdot a_3 & \ldots & a_1^2+a_{k-1}^2 \end{pmatrix}$$

byłyby równe zeru. W szczególności byłoby

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_2\cdot a_i\\ a_i\cdot a_2 & a_1^2+a_i^2 \end{vmatrix}=0$$

czyli $a_1^2\cdot(a_1^2+a_2^2+a_i^2)=0$, skąd, wobec $a_1\neq 0$, wynika, że $a_1^2+a_2^2+a_i^2=0$ dla $i=3, 4, \ldots, (k-1)$. A więc $a_3^2=a_4^2=\ldots=a_{k-1}^2$. Poza tym mamy

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_2\cdot a_3\\ a_4\cdot a_2 & a_4\cdot a_3 \end{vmatrix}=0,$$

czyli $a_1^2\cdot a_4\cdot a_3=0$, skąd $a_3\cdot a_4=0$. Zatem $a_3=a_4=\ldots=a_{k-1}=0$, co jednak wobec $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ sprzeczne jest z zależnością (29). A więc równanie (32) określa w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-2}$ twór kwadratowy. Stąd i z uwagi na lemat 1 z Nr 132 wnioskujemy, że istnieje $n-1$ liniowo niezależnych punktów postaci $\{a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}\}$, spełniających równanie (32), czyli że $\tau_{\mathfrak{A}}(p)=n-1$.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy p jest punktem osobliwym. Wówczas p jest postaci $\{0, 0, \ldots, 0, a_k, \ldots, a_n\}$. Biorąc dowolny punkt

$$q=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$$

tworu $\mathfrak{A}$ różny od p, mamy $b_0^2+b_1^2+\ldots+b_{k-1}^2=0$, skąd wynika, że każdy punkt prostej łączącej p z q, czyli każdy punkt postaci

$$\{\mu\cdot b_0, \mu\cdot b_1, \ldots, \mu\cdot b_{k-1}, \lambda\cdot a_k+\mu\cdot b_k, \ldots, \lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n\}$$

leży na tworze $\mathfrak{A}$. Wobec lematu 1 z Nr 132 istnieją na tworze $\mathfrak{A}$ punkty $q_1, q_2, \ldots, q_n$ takie, że układ $p, q_1, q_2, \ldots, q_n$ jest liniowo niezależny. Proste łączące p z punktami q_i stanowią wówczas układ n tworzących liniowo niezależnych.

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć równania tworzących prostoliniowych elipsoidy

$$x_1^2+\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_3^2}{9}-x_0^2=0,$$

przechodzących przez punkt $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 2\right\}$.

2. Czy na hiperboloidzie dwupowłokowej o równaniu

$$x_1^2-x_2^2-2x_3^2-x_0^2=0$$

istnieje punkt, przez który przechodzą dwie tworzące prostopadłe?

164. Jednorodność rzutowa tworów drugiego stopnia. W Nr 134 okazaliśmy, że wśród punktów tworu drugiego stopnia pewne punkty, zwane osobliwymi, różnią się z punktu widzenia geometrii rzutowej od pozostałych, zwanych zwyczajnymi. Obecnie okażemy, że w dziedzinie rzeczywistej żadnej innej różnicy rzutowej między punktami tworu drugiego stopnia już nie ma. Zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie. *Jeżeli punkty rzeczywiste a i b są bądź obydwa zwyczajnymi, bądź obydwa osobliwymi punktami tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, to istnieje przekształcenie rzutowe rzeczywiste $\varphi(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$ takie, że $\varphi(a)=b$.*

Dowód. Wobec rzutowego charakteru twierdzenia oraz wobec wniosku 5 z Nr 153, możemy założyć, że twór jest dany przez równanie

$$\sum_{i=0}^{\alpha} x_i^2-\sum_{j=1}^{\beta} x_{\alpha+j}^2=0, \quad \text{gdzie } \alpha>0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta\leqq n.$$

Niech

$$a=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \quad \text{i} \quad b=\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}.$$

Jeżeli a i b są punktami zwyczajnymi tworu $\mathfrak{A}$, to nie wszystkie spółrzędne $a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}$ oraz nie wszystkie spółrzędne $b_0, b_1, \ldots, b_{\alpha+\beta}$ znikają. Mamy więc $\sum_{i=0}^{\alpha} a_i^2>0$ i podobnie $\sum_{i=0}^{\alpha} b_i^2>0$. Ponieważ mamy do czynienia ze spółrzędnymi jednorodnymi, więc możemy założyć, że

$$\sum_{i=0}^{\alpha} a_i^2=\sum_{i=0}^{\alpha} b_i^2=1, \text{ a więc również że } \sum_{j=1}^{\beta} a_{\alpha+j}^2=\sum_{j=1}^{\beta} b_{\alpha+j}^2=1.$$

W myśl twierdzenia z Nr 9 istnieje obrót rzeczywisty φ przestrzeni $C_{\alpha+1}$ dokoła początku układu, w którego wyniku punkt $(a_0, a_1, \ldots, a_\alpha)$ przejdzie na punkt $(1, 0, \ldots, 0)\ \varepsilon\ C_{\alpha+1}$. Podobnie istnieje obrót rzeczywisty ψ przestrzeni C_β dokoła początku układu, w którego wyniku punkt $(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta})$ przejdzie na punkt $(1, 0, \ldots, 0)\ \varepsilon\ C_\beta$. Oba te obroty wyrażają się analitycznie jak następuje:

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_\alpha)=(x_0', x_1', \ldots, x_\alpha'), \quad \psi(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha+\beta})=(x_{\alpha+1}', \ldots, x_{\alpha+\beta}'),$$

gdzie

$$x_i'=a_{i,0}\cdot x_0+a_{i,1}\cdot x_1+\ldots+a_{i,\alpha}\cdot x_\alpha \quad \text{dla } i=0, 1, \ldots, \alpha, \tag{33}$$

$$x_i'=a_{i,\alpha+1}\cdot x_{\alpha+1}+a_{i,\alpha+2}\cdot x_{\alpha+2}+\ldots+a_{i,\alpha+\beta}\cdot x_{\alpha+\beta} \quad \text{dla } i=1, 2, \ldots, \beta, \tag{34}$$

przy czym macierze

$$(a_{i,j})\,(i, j=0, 1, \ldots, \alpha) \quad \text{i} \quad (a_{i,\alpha+j})\,(i, j=1, 2, \ldots, \beta) \tag{35}$$

są rzeczywiste ortogonalne. Wiemy dalej, że wśród wskaźników $0, 1, \ldots, \alpha$ istnieje taki wskaźnik i_0, że $a_{i_0}\neq 0$. Niech

$$x_i'=-\frac{a_i}{a_{i_0}}\cdot x_{i_0}+x_i \quad \text{dla } i>\alpha+\beta. \tag{36}$$

Wzory (33), (34), (35) określają łącznie przekształcenie rzutowe f przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie, przy czym wobec ortogonalności macierzy (35) niezmiennikiem tego przekształcenia będzie zarówno suma $\sum_{i=0}^{\alpha} x_i^2$, jak suma $\sum_{i=1}^{\beta} x_{\alpha+i}^2$.

Wynika stąd, że f przekształca twór $\mathfrak{A}$ na siebie, przy czym — jak łatwo zauważyć — punkt

$$a=\{a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}, a_{\alpha+\beta+1}, \ldots, a_n\}$$

przejdzie na punkt

$$c=\{1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}.$$

Podobnie istnieje przekształcenie rzutowe rzeczywiste g, przy którym twór $\mathfrak{A}$ przechodzi na siebie, a punkt b na ten sam co poprzednio punkt c. Przekształcenie $g_{-1}\cdot f$, gdzie g_{-1} oznacza odwrócenie g, jest przekształceniem rzutowym rzeczywistym przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie, przy którym twór $\mathfrak{A}$ przechodzi na siebie, zaś punkt a na punkt b.

Załóżmy teraz, że oba punkty a i b są osobliwe dla tworu $\mathfrak{A}$. Wówczas $a_i=b_i=0$ dla $i=0, 1, \ldots, \alpha+\beta$, a więc $\alpha+\beta<n$, przy czym nie wszystkie liczby a_i dla $i>\alpha+\beta$, jak również nie wszystkie liczby b dla $i>\alpha+\beta$ znikają. W przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-(\alpha+\beta+1)}$, której punkty są postaci $\{x_{\alpha+\beta+1}, x_{\alpha+\beta+2}, \ldots, x_n\}$, istnieje wówczas przekształcenie rzutowe rzeczywiste, określone przez wzory

$$x_i'=a_{i,\alpha+\beta+1}\cdot x_{\alpha+\beta+1}+a_{i,\alpha+\beta+2}\cdot x_{\alpha+\beta+2}+\ldots+a_{i,n}\cdot x_n, \tag{37}$$

gdzie $i=\alpha+\beta+1, \ldots, n$, przy którym punkt

$$a'=\{a_{\alpha+\beta+1}, a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_n\}$$

przejdzie na punkt

$$b'=\{b_{\alpha+\beta+1}, b_{\alpha+\beta+2}, \ldots, b_n\}.$$

Uzupełniając wzory (37) przez wzory

$$x_i'=x_i \quad \text{dla} \quad i=0, 1, \ldots, (\alpha+\beta),$$

otrzymamy takie przekształcenie rzutowe przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ na siebie, że twór $\mathfrak{A}$ przechodzi sam na siebie, a punkt a na punkt b.

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

ĆWICZENIA. 1. Elipsę o równaniu $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}-x_0^2=0$ przekształcić na siebie rzutowo w taki sposób, by punkt $\left(1, \frac{6}{13}\cdot\sqrt{13}, \frac{6}{13}\cdot\sqrt{13}\right)$ przeszedł na punkt $\{1, 2, 0\}$.

2. Niech $a=\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ i $b=\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ będą punktami rzeczywistymi elipsoidy $\frac{x_1^2}{c_1^2}+\frac{x_2^2}{c_2^2}+\frac{x_3^2}{c_3^2}-x_0^2=0$. Znaleźć przekształcenie rzutowe rzeczywiste, przy którym ta elipsoida przechodzi na siebie w taki sposób, że punkt a przechodzi na punkt b. Czy przekształcenie to musi być afiniczne?

165. Tworzące prostoliniowe rzeczywiste. W Nr 163 udowodniliśmy twierdzenie o istnieniu tworzących na tworach drugiego stopnia, należące do geometrii rzutowej zespolonej w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$. Obecnie zajmiemy się zbadaniem, jak podobne zagadnienie rozwiązuje się w dziedzinie rzeczywistej. Zaczniemy od dowodu lematu następującego:

Lemat. *Aby twór rzeczywisty $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ zawierał układ $n+1$ punktów rzeczywistych liniowo niezależnych, potrzeba i wystarcza, by $L(\mathfrak{A})<K(\mathfrak{A})$.*

Dowód. Ponieważ własność, którą należy udowodnić, jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych rzeczywistych, więc z uwagi na wniosek 5 z Nr 153 możemy założyć, że $\mathfrak{A}$ ma równanie postaci

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_\alpha^2-x_{\alpha+1}^2-\ldots-x_{\alpha+\beta}^2=0, \quad \text{gdzie } \alpha+1\geqq\beta. \tag{38}$$

Wówczas:

$$K(\mathfrak{A})=\alpha+\beta+1, \quad L(\mathfrak{A})=\alpha+1-\beta \quad \text{i} \quad \alpha+\beta\leqq n.$$

Jeżeli $L(\mathfrak{A})=K(\mathfrak{A})$, to równanie (38) ma postać $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_\alpha^2=0$, czyli $\beta=0$, a więc punkty rzeczywiste tworu $\mathfrak{A}$ są identyczne z punktami przestrzeni P_n postaci $\{0, 0, \ldots, 0, x_{\alpha+1}, \ldots, x_n\}$. Jasne jest, że punkty te tworzą w P_n pewną hiperpłaszczyznę rzutową $(n-\alpha-1)$-wymiarową, a więc zbiór ich nie zawiera układu złożonego z $n+1$ punktów liniowo niezależnych.

By okazać, że w przypadku $L(\mathfrak{A})<K(\mathfrak{A})$ twór zawiera układ $n+1$ punktów rzeczywistych liniowo niezależnych, posłużymy się metodą indukcji względem liczby $m=\alpha+\beta$. Jeżeli $m=1$, to równanie ma postać $x_0^2-x_1^2=0$. Punkty:

$$p_0=\{1,-1, 0, \ldots, 0\}, \quad p_1=\{1, 1, 0, \ldots, 0\} \quad \text{i} \quad p_i=\{1, 1, \delta_2^i, \delta_3^i, \ldots,\delta_n^i\}$$
$$\text{dla } i=2, 3, \ldots, n$$

stanowią wówczas układ $n+1$ punktów tworu liniowo niezależnych. Załóżmy więc, że $m=\alpha+\beta>1$ i że dla mniejszych wartości liczby m lemat jest prawdziwy (bez względu na wartość n). W myśl tego założenia, w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-1}$ istnieje układ n punktów rzeczywistych liniowo niezależnych postaci $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ spełniających równanie

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\alpha^2-x_{\alpha+1}^2-\ldots-x_{\alpha+\beta}^2=0.$$

Dopisując do spółrzędnych każdego z tych punktów spółrzędną $x_0=0$, otrzymamy układ liniowo niezależny złożony z punktów rzeczywistych niewłaściwych przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, spełniających równanie (38). Wraz z punktem $\{1, \delta_1^{\alpha+1}, \delta_2^{\alpha+1}, \ldots, \delta_n^{\alpha+1}\}$ punkty te tworzą układ $n+1$ punktów rzeczywistych przestrzeni $\mathfrak{P}_n$, którego istnienie było do okazania.

Oznaczmy przez $t_{\mathfrak{A}}(p)$ maksymalną liczbę liniowo niezależnych tworzących rzeczywistych tworu $\mathfrak{A}$, przechodzących przez punkt p. Udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie tworem rzeczywistym drugiego stopnia w przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ dla którego*

$$K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})\geqq 4.$$

Wówczas $t_{\mathfrak{A}}(p)=n$, jeżeli p jest rzeczywistym punktem osobliwym tworu $\mathfrak{A}$, zaś $t_{\mathfrak{A}}(p)=n-1$, jeżeli p jest rzeczywistym punktem zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$.

Dowód. Możemy przyjąć, że równanie tworu ma postać (38), gdzie $\alpha+1+\beta-(\alpha+1-\beta)\geqq 4$, czyli $\beta\geqq 2$. Załóżmy najpierw, że na $\mathfrak{A}$ istnieją punkty rzeczywiste osobliwe i niech p będzie jednym z nich. W myśl lematu istnieją na $\mathfrak{A}$ punkty rzeczywiste $p_1, p_2, \ldots, p_n$, które łącznie z p stanowią układ liniowo niezależny. Ponieważ p jest punktem osobliwym, więc w myśl definicji punktów osobliwych (ob. Nr 134) każda z prostych łączących p z p_i, gdzie $i=1, 2, \ldots, n$, jest tworzącą tworu $\mathfrak{A}$. W ten sposób otrzymujemy układ n liniowo niezależnych tworzących rzeczywistych, przechodzących przez p.

Załóżmy teraz, że p jest punktem rzeczywistym zwyczajnym tworu $\mathfrak{A}$. Mamy okazać, że $t_{\mathfrak{A}}(p)=n-1$. Wobec twierdzenia z Nr 164, wystarczy tego dowieść w przypadku, gdy

$$p=\{1, \delta_1^{\alpha+1}, \delta_2^{\alpha+1}, \ldots, \delta_n^{\alpha+1}\}\ \varepsilon\ \mathfrak{A}.$$

Dla każdego punktu niewłaściwego $c=\{0, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ punkty prostej łączącej p i c są postaci

$$\{\lambda, \lambda\cdot\delta_1^{\alpha+1}+\mu\cdot c_1, \lambda\cdot\delta_2^{\alpha+1}+\mu\cdot c_2, \ldots, \lambda\cdot\delta_n^{\alpha+1}+\mu\cdot c_n\},$$

gdzie λ i μ nie znikają jednocześnie. Aby prosta ta była tworzącą tworu $\mathfrak{A}$, potrzeba i wystarcza, by t o ż s a m o ś c i o w o spełnioną była zależność

$$\lambda^2+\mu^2\cdot(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_\alpha^2-c_{\alpha+1}^2-\ldots-c_{\alpha+\beta}^2)-2\cdot\lambda\cdot\mu\cdot c_{\alpha+1}-\lambda^2=0,$$

czyli by było $c_{\alpha+1}=0$ oraz

$$c_1^2+c_2^2+\ldots+c_\alpha^2-c_{\alpha+2}^2-\ldots-c_{\alpha+\beta}^2=0. \tag{39}$$

Z udowodnionego lematu wynika, wobec $\beta\geqq 2$, że w przestrzeni $\mathfrak{P}_{n-2}$, której punkty są postaci $\{c_1, c_2, \ldots, c_\alpha, c_{\alpha+2}, \ldots, c_{\alpha+\beta}, \ldots, c_n\}$, istnieje układ liniowo niezależny złożony z $n-1$ punktów rzeczywistych, spełniających równanie (39). Wówczas odpowiadające im punkty

$$\{0, c_1, c_2, \ldots, c_\alpha, 0, c_{\alpha+2}, \ldots, c_n\}$$

przestrzeni $\mathfrak{P}_n$ są również liniowo niezależne. Są to kierunki tworzących rzeczywistych przechodzących przez punkt p. A więc przez p przechodzi $n-1$ tworzących rzeczywistych liniowo niezależnych. Ponieważ w myśl twierdzenia z Nr 163 przez p nie przechodzi więcej niż $n-1$ liniowo niezależnych tworzących, więc dowód twierdzenia został zakończony.

Twierdzenie to obejmuje jako szczególny przypadek twierdzenie z Nr 105, dotyczące tworzących prostoliniowych hiperboloidy jednopowłokowej i paraboloidy hiperbolicznej.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć trzy tworzące rzeczywiste liniowo niezależne, przechodzące przez punkt $\left\{1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1\right\}$ tworu określonego w $\mathfrak{P}_4$ przez równanie

$$x_0^2+2x_1^2+3x_2^2-4x_3^2-5x_4^2=0.$$

Zbadać, czy twór ten zawiera płaszczyznę.

2. Okazać, że przez każdy punkt rzeczywisty zwyczajny tworu rzeczywistego $\mathfrak{A}$ drugiego stopnia, spełniającego warunek $K(\mathfrak{A})-L(\mathfrak{A})<4$, przechodzi jedynie $n-K(\mathfrak{A})+1$ tworzących rzeczywistych liniowo niezależnych.