

WSTĘP

1. **Przedmiot i metoda geometrii analitycznej.** W swych początkach geometria była zbiorem przepisów praktycznych, dotyczących wykonywania pomiarów rozmaitych przedmiotów materialnych. Już jednak w starożytności odbiega od tych początków, a około 300 r. przed Nar. Chr. otrzymuje w dziele matematyka greckiego Euklidesa, w tzw. *Elementach* (στοιχεῖα) postać nauki abstrakcyjnej, w której niejasne pojęcie przedmiotu materialnego zastąpione zostało przez pojęcie figury geometrycznej, będącej jakby jego idealizacją. Polega ona na tym, że ze wszystkich własności przedmiotów materialnych bierze się pod uwagę jedynie te, które dotyczą wielkości i kształtu, a więc które dla danego przedmiotu zależą jedynie od wzajemnych odległości między jego punktami. W szczególności natura samych punktów jest dla geometry obojętna, własności zaś figur nie różniących się ani wielkością, ani kształtem, czyli tzw. *figur przystających*, są identyczne. Sprecyzujmy nieco to ostatnie pojęcie.

Figury P i Q są *przystające*, jeżeli istnieje przyporządkowanie każdemu punktowi figury P takiego punktu figury Q , że odległość dwu jakiegokolwiek punktów p_1 i p_2 figury P jest stale równa odległości przyporządkowanych im punktów q_1 i q_2 figury Q , przy czym każdy punkt figury Q jest przyporządkowany pewnemu punktowi figury P . Przyporządkowanie takie nazywa się *przekształceniem izometrycznym* figury P na figurę Q lub krótko *izometrią*.

Geometria jest więc nauką o takich własnościach figur, które wraz z daną figurą przysługują wszystkim figurom do niej przystającym, czyli nauką o tzw. *własnościach metrycznych* czyli *niezmiennikach izometrii*.

Przez *figury* rozumiemy przy tym zbiory punktów należących do pewnego stałego zbioru punktów zwanego *przestrzenią*.

By pojęcie izometrii miało sens, musi być dla każdego dwóch punktów p, q rozpatrywanej przestrzeni określona liczba nieujemna $\varrho(p, q)$, zwana *odległością*. O odległości tej zakłada się przy tym, że spełnia ona trzy następujące warunki:

1. $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$,
2. $\varrho(p, q) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$,
3. dla każdych trzech punktów p, q, r jest $\varrho(p, r) \leq \varrho(p, q) + \varrho(q, r)$.

Ostatni z tych warunków nazywa się zwykle *nierównością trójkąta*.

Zbiór punktów, dla których par określona jest odległość ϱ spełniająca te warunki, czyli zbiór *zmetryzowany* przez funkcję ϱ , nazywa się *przestrzenią metryczną*.

Geometria danej przestrzeni metrycznej jest to teoria *niezmienników izometrii* figur w niej leżących.

Badania geometryczne nie ograniczają się bynajmniej do zakresu przestrzeni metrycznych: w części drugiej i trzeciej tej książki spotkamy się z rozważaniami, które w sposób naturalny doprowadzą nas do rozważania przestrzeni o zupełnie innym charakterze.

Najbardziej znanymi przykładami przestrzeni metrycznych są *prosta euklidesowa* E_1 , *plaszczyna euklidesowa* E_2 oraz *przestrzeń euklidesowa trójwymiarowa* E_3 . Każdy podzbiór jakiegokolwiek przestrzeni metrycznej również może być uważany za przestrzeń metryczną.

Gałąź geometrii, którą tutaj będziemy się zajmować, nazywa się *analityczną* ze względu na użytą w niej metodę. Metoda ta polega na tym, że położenie punktów wyznacza się przy pomocy pewnych układów liczb, zwanych *spółrzednymi* i przy pomocy rachunków na tych liczbach bada się własności geometryczne figur.

Należy wyraźnie zaznaczyć, że *spółrzedne* grają rolę jedynie narzędzia, a naprawdę interesuje nas tylko treść geometryczna, za ich pośrednictwem wyrażona. Będziemy więc przywiązywać wagę do tego, by wprowadzane pojęcia (nie będące tylko skrótami rachunkowymi) miały charakter niezależny od *spółrzednych*, to znaczy, by w ich definicjach nie mówiło się (bezpośrednio czy pośrednio) o *spółrzednych*, lecz jedynie o własnościach wynikających z wzajemnego rozmieszczenia punktów. To będziemy mieli na myśli, mówiąc o *geometrycznym charakterze* pojęć.

Jeśli w szczególności przestrzeń jest metryczna, to poddanie jej przekształceniu izometrycznemu, na ogół zmieniającemu *spółrzedne*, nie wpływa na zmianę wzajemnego rozmieszczenia punktów. Z tego względu wszelkie pojęcia geometryczne zachowują przy przekształceniu izometrycznym swój sens. To będziemy mieli na myśli, mówiąc o *niezmiennicznym charakterze* tych pojęć.

UWAGI HISTORYCZNE. Jak już było wspomniane, analityczna metoda wprowadzona została do geometrii przez filozofa i matematyka francuskiego R. Descartes'a (1596—1650), w dziele pt. *La Géométrie* wydanym w roku 1637. Z listów pozostawionych przez współczesnego mu matematyka francuskiego P. Fermata wynika, że doszedł on parę lat wcześniej do podobnych wyników. Metoda ana-

lityczna przyczyniła się nie tylko do odkrycia szeregu nowych faktów geometrycznych, ale pozwoliła również na bardziej ogólne i systematyczne ujęcie faktów znanych już dawniej, w szczególności teorii stożkowych powstałej w końcu III wieku przed Nar. Chr., dzięki pracom matematyka okresu hellenistycznego Apoloniusza z Perg.

Analityczna metoda pozwoliła ogromnie rozszerzyć zakres badań geometrycznych, a w szczególności dzięki powstałemu (około roku 1665) rachunkowi różniczkowemu (odkrytemu niezależnie przez matematyka i fizyka angielskiego I. Newtona oraz filozofa niemieckiego G. W. Leibniza) doprowadziła do powstania geometrii różniczkowej.

Dalszy istotny krok naprzód uczyniła metoda analityczna w geometrii z chwilą wprowadzenia współrzędnych jednorodnych (około roku 1828), dzięki pracom matematyków niemieckich A. F. Möbiusa i J. Plückera. Pozwoliły one sprowadzić na grunt badań analitycznych wyniki rozwijającej się w tym czasie (przede wszystkim dzięki badaniom matematyka francuskiego J. V. Ponceleta) geometrii rzutowej, obejmującej w szczególności szereg dawniej już znanych twierdzeń geometrycznych. Należą do nich niektóre twierdzenia zaliczane zazwyczaj do geometrii elementarnej, jak twierdzenia geometrów aleksandryjskich Pappusa (wiek IV po Nar. Chr.) i Menelausa (wiek I po Nar. Chr.) oraz twierdzenie o tzw. trójkątach perspektywicznych, odkryte przez G. Desargues'a, matematyka francuskiego z XVII wieku. Należy do nich również głośne twierdzenie o sześciokącie wpisanym w stożkową, odkryte w roku 1640 przez znakomitego myśliciela francuskiego B. Pascala, jak również dwoisty odpowiednik tego twierdzenia, odkryty w roku 1806 przez matematyka francuskiego Ch. J. Brianchona. Badania Ponceleta rzuciły światło na zależność między tymi dwoma ostatnimi twierdzeniami, doprowadzając do odkrycia tzw. *zasady dwoistości*. Dzięki wynikom Plückera, zasada ta znalazła swój wyraz również na gruncie geometrii analitycznej.

Odkrycie geometrii nieeuklidesowej przez matematyka rosyjskiego N. Łobaczewskiego (w roku 1829) oraz matematyka węgierskiego J. Bolyai de Bolya (w roku 1832) zwróciło zainteresowania geometrów w kierunku bardziej ogólnych przestrzeni. W szczególności przedmiotem badań matematyka niemieckiego H. Grassmanna stały się (około roku 1844) przestrzenie n -wymiarowe, a tzw. urojone twory geometryczne, które występują już w badaniach Ponceleta, stają się (od połowy XIX wieku) polem obszernych badań wielu matematyków, wśród których należy wymienić matematyka niemieckiego Ch. von Staudta oraz matematyków francuskich M. Chasles'a, E. Laguerre'a i G. Darboux.

Jednocześnie pojawiają się dążenia do oparcia całokształtu badań geometrycznych na jednolitej podstawie analitycznej. Staje się nią teoria niezmienników przekształceń liniowych rozwinięta przez matematyków angielskich A. Cayleya, J. J. Sylvestera i G. Salmona. Do dalszego ustalenia związku między teorią przekształceń a geometrią przyczynia się tzw. program z Erlangen, sformułowany w roku 1872 przez matematyka niemieckiego F. Kleina.

ĆWICZENIA. 1. Czy punkty okręgu będą tworzyły przestrzeń metryczną, jeśli za odległość dwóch punktów uważać będziemy długość mniejszego z łuków wyznaczonych przez te punkty (w razie identyczności punktów, łuk ten zredukuje się do punktu)?

2. Ile istnieje izometrii przekształcających kwadrat na siebie?

3. W zbiorze złożonym z czterech elementów e_1, e_2, e_3, e_4 określona jest funkcja $q(e_i, e_j) = 2|i-j|^3 - 9|i-j|^2 + 13|i-j|$ dla $i, j = 1, 2, 3, 4$. Czy może ona być uważana za odległość, a jeśli tak, to czy otrzymana w ten sposób przestrzeń metryczna jest izometryczna z jakimkolwiek podzbiorem przestrzeni euklidesowej E_3 ?

2. Przestrzeń kartezjańska jednowymiarowa¹. Na prostej euklidesowej E_1 obierzmy dowolny punkt o za tzw. *początek*.

Dzieli on E_1 na dwie półproste. Przyjmując którąkolwiek z nich za *dodatnią*, a pozostałą za *ujemną*, otrzymamy tzw. *prostą zorientowaną*, czyli *oś*.

Wówczas każdemu punktowi $p \in E_1$ przyporządkujemy jako jego tzw. *współrzedną kartezjańską* liczbę równą odległości $q(o, p)$, jeśli punkt leży na półprostej dodatniej, zaś liczbę $-q(o, p)$, jeśli leży on na półprostej ujemnej.

W ten sposób każdemu punktowi prostej odpowiada pewna liczba rzeczywista, zaś każdej liczbie rzeczywistej — punkt.

Prosta, dla której punktów ustalono w taki sposób współrzędne, nazywa się *osią liczbową*.

Punkty jej możemy uważać (w myśl zasady, że natura punktu jest zasadniczo dla geometrii obojętna) za liczby rzeczywiste lub też za układy złożone z poszczególnych liczb (x) . Odległość punktów (x') i (x'') wyrazi się wówczas wzorem

$$q((x'), (x'')) = |x' - x''| = \sqrt{(x' - x'')^2}.$$

Otrzymaną w ten sposób przestrzeń metryczną oznaczać będziemy przez C_1 i nazywać *przestrzenią jednowymiarową kartezjańską* lub *prostą kartezjańską*.

Różni się ona od euklidesowej prostej E_1 jedynie tym, że sprecyzowaną została natura jej punktów (jako układów jednolicebnych), co — jak już zaznaczyliśmy — z punktu widzenia geometrii jest bez znaczenia.

By dać przykład stosowania współrzędnych do zagadnień geometrycznych w przestrzeni C_1 ,okażmy, że odcinek ma dokładnie jeden środek. Istotnie, środkiem odcinka o (różnych) końcach (x') i (x'') nazywa się taki punkt (x) , że $q((x), (x')) = q((x), (x''))$ czyli $(x - x')^2 = (x - x'')^2$, co wobec $x' \neq x''$ równoważne jest równości $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$.

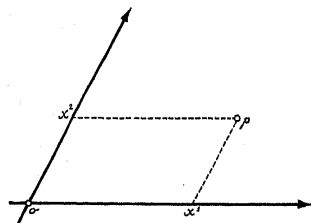
ĆWICZENIA. 1. W przestrzeni C_1 dane są dwa różne punkty $p' = (x')$ i $p'' = (x'')$. Dla danej liczby dodatniej λ znaleźć punkt $p = (x)$ taki, by $q(p, p') = \lambda \cdot q(p, p'')$. Ile takich punktów istnieje?

¹ Nazwa ta pochodzi od nazwiska matematyka i filozofa francuskiego R. Descartes'a, z łacińska zwanego Kartezjuszem (1596—1650).

$$q((x), (x')) = \lambda q((x), (x''))$$

2. Mając dane w przestrzeni C_1 trzy różne punkty $p_1=(x_1)$, $p_2=(x_2)$, $p_3=(x_3)$, znaleźć punkt $p=(x)$ taki, by $\varrho(p_1, p_3) \cdot \varrho(p, p_2) = \varrho(p_2, p_3) \cdot \varrho(p, p_1)$. Ile takich punktów istnieje?

3. **Przestrzeń kartezjańska dwuwymiarowa.** Na płaszczyźnie euklidesowej E_2 weźmy pod uwagę dwie przecinające się proste i na każdej z nich ustalmy współrzędne kartezjańskie, których wspólnym początkiem o jest punkt przecięcia obu prostych (rys. 1). Ustalmy dalej kolejność obu otrzymanych w ten sposób osi liczbowych, nazywając współrzędne na pierwszej z nich *odciętymi*, na drugiej zaś *rzednymi*.



Rys. 1

Tak uporządkowane osie tworzą na płaszczyźnie E_2 *kartezjański układ współrzędnych*.

Każdemu punktowi p płaszczyzny E_2 odpowiadają wówczas dwie liczby: od-

cięta x^1 , będąca na pierwszej osi współrzędną punktu przecięcia tej osi z prostą przez p równoległą do drugiej osi, oraz rzędna x^2 , będąca współrzędną na drugiej osi jej punktu przecięcia z prostą przez p , równoległą do osi pierwszej¹. Na odwrót, każdej parze liczb (x^1, x^2) , z uwzględnieniem ich porządku, odpowiada na E_2 dokładnie jeden punkt p , mający x^1 za swą odciętą, zaś x^2 za swą rzedną. Liczby x^1 i x^2 nazywają się *współrzędnymi kartezjańskimi* punktu p .

W ten sposób punktom płaszczyzny E_2 odpowiadają uporządkowane pary liczb rzeczywistych i na odwrót. Punkt p płaszczyzny E_2 o odciętej x^1 i rzędnej x^2 identyfikować możemy z parą uporządkowaną (x^1, x^2) , pisząc $p=(x^1, x^2)$.

Jeżeli w szczególności osie są prostopadłe, to współrzędne kartezjańskie nazywają się *prostokątnymi*.

Dla zaznaczenia, że chodzi o współrzędne prostokątne, wskaźniki będziemy pisać u dołu, oznaczając odciętą przez x_1 , zaś rzedną przez x_2 .

Przy współrzędnych prostokątnych odległość dwóch punktów $p'=(x_1', x_2')$ i $p''=(x_1'', x_2'')$ wyraża się tzw. *wzorem Pitagorasa*²:

$$(1) \quad \varrho(p', p'') = \varrho((x_1', x_2'), (x_1'', x_2'')) = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2}.$$

Zbiór par uporządkowanych (x_1, x_2) liczb rzeczywistych, zmetryzowany przez ten wzór, jest przystający do E_2 . Jest on tzw. *przestrzenią dwuwymiarową* (czyli *płaszczyzną*) *kartezjańską* C_2 .

¹ Oczywiście x^1 i x^2 nie oznaczają tutaj pierwszej i drugiej potęgi liczby x . Cyfry 1 i 2 grają tu rolę jedynie wskaźników.

² Pitagoras, matematyk i filozof grecki z VI wieku przed Nar. Chr.

By zilustrować zastosowanie współrzędnych do geometrii płaszczyzny, zbadajmy, czym jest zbiór punktów jednakowo oddalonych od dwóch danych różnych punktów płaszczyzny. W tym celu obierzmy współrzędne prostokątne tak, by danymi punktami były punkty $(-a, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a \neq 0$. Punkt (x_1, x_2) ma od nich jednakowe odległości wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1 + a)^2 + x_2^2 = (x_1 - a)^2 + x_2^2$, co równoznaczne jest z warunkiem $x_1 = 0$, charakteryzującym oczywiście punkty leżące na osi rzędnych. A więc badany zbiór punktów jest prostą.

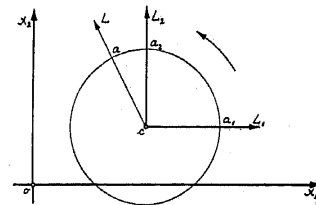
Dodatnie półproste układu osi współrzędnych wyznaczają w płaszczyźnie dwa dopełniające się obszary kątowe. Niech α oznacza wielkość kąta mniejszego z nich; a więc $0 < \alpha < \pi$. Przez obrót pierwszej osi o kąt α możemy więc doprowadzić ją do przyjęcia położenia osi drugiej. Zmieniając porządek osi, nie zmienimy wprowadzienia kąta α , lecz zmienimy kierunek obrotu, przeprowadzającego pierwszą oś w drugą, na przeciwny. W ten sposób, z punktu widzenia intuicyjnego, ustalenie porządku osi współrzędnych jest równoznaczne z ustaleniem pewnego kierunku obrotów na płaszczyźnie.

Z tego względu płaszczyznę, na której ustalony został kartezjański układ osi, nazywamy *zorientowaną*.

Przestrzeń C_2 jest więc zorientowana.

Zajmiemy się nieco bliżej kwestią liczenia kątów na płaszczyźnie C_2 . Przez środek c dowolnego okręgu S leżącego w C_2 przeprowadźmy dwie półproste o wspólnym początku c , przy czym pierwsza z nich L_1 niech przejdzie przez punkt a_1 okręgu S , mający największą odciętą, druga zaś L_2 przez punkt a_2 tegoż okręgu o największej rzędnej (rys. 2). Ograniczają one w płaszczyźnie C_2 prostokątny obszar kątowy, zwany *pierwszą ćwiartką* (o wierzchołku c). Jest to więc zbiór punktów, których odcięta jest większa od odciętej punktu c , rzędna zaś — od rzędnej. Leżącą w niej część okręgu S nazwijmy *pierwszą ćwiartką* tego okręgu. Niech teraz L oznacza dowolną półprostą w C_2 o początku w c . Punkt a' , w którym L przecina S , dzieli wraz z punktem a_1 okrąg na dwa łuki (z których jeden może redukować się do punktu, a wówczas drugi wypełnia cały okrąg). Przez a_1 i a' oznaczmy ten z nich, który bądź zawiera pierwszą ćwiartkę okręgu, bądź się w niej mieści.

Stosunek długości tego łuku do długości promienia okręgu S nazywa się *kątem* o początkowym ramieniu L_1 , a końcowym L .



Rys. 2

Kąt ten oznaczmy przez $\angle(L_1, L)$, przy czym umawiamy się, że dany jest on jedynie z dokładnością do składnika będącego wielokrotnością 2π , czyli że za kąty o początkowym ramieniu L_1 i końcowym L uważamy wszystkie liczby postaci $\angle(L_1, L) + 2k\pi$, gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Jeśli teraz L' jest jakimkolwiek innym promieniem wychodzącym z punktu o , to za kąt o początkowym ramieniu L , a końcowym L' uważamy liczbę $\angle(L, L') = \angle(L_1, L') - \angle(L_1, L)$, jak również każdą liczbę różniącą się od $\angle(L, L')$ o całkowitą wielokrotność liczby 2π .

Przez *amplitudę* punktu p płaszczyzny C_2 różnego od o rozumieć będziemy kąt, który półprosta o początku o , przechodząca przez p , tworzy z dodatnią półprostą osi odciętych; amplituda punktu $p \neq o$ jest więc liczbą określoną z dokładnością do składnika $2k\pi$. Za amplitudę punktu o uważamy każdą liczbę rzeczywistą.

Odległość $r = \rho(o, p)$ nazywa się *promieniem wodzącym*.

Dla $p=o$ amplituda nie jest określona, zaś promień wodzący jest zerem.

Promień wodzący r oraz amplitudę θ nazywamy *spółrzednymi biegunowymi* punktu p ; punkt $p=(x_1, x_2)$ o współrzędnych biegunowych r i θ oznaczać będziemy przez $b(r, \theta)$. Między współrzednymi biegunowymi a prostokątnymi zachodzą, jak łatwo zauważyć, zależności:

$$(2) \quad x_1 = r \cdot \cos \theta, \quad x_2 = r \cdot \sin \theta$$

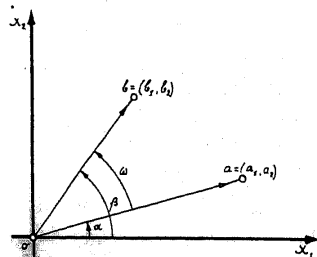
Czasem wygodnie jest zakres zmienności promienia wodzącego r rozciągnąć i na liczby ujemne. Zmianie znaku r towarzyszy jednocześnie zastąpienie amplitudy θ przez $\theta + \pi$. Wzory (2) nie ulegają wówczas zmianie.

Skorzystajmy z wzorów (2), aby wyrazić funkcje trygonometryczne

kąta ω o wierzchołku o (rys. 3), którego ramię początkowe przechodzi przez punkt $a=(a_1, a_2) \neq o$, zaś ramię końcowe przez punkt $b=(b_1, b_2) \neq o$. Wówczas $\omega = \beta - \alpha$, gdzie α oznacza amplitudę punktu a , zaś β amplitudę punktu b . Promienie wodzące tych punktów są odpowiednio równe $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ i $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Stąd i ze wzorów (2) otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$



Rys. 3

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha = \\ (3) \quad &= \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \\ \sin \omega &= \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \sin \alpha = \\ (4) \quad &= \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \end{aligned}$$

ĆWICZENIA: 1. W płaszczyźnie E_2 dany jest układ współrzędnych kartezjańskich, którego osie tworzą kąt θ , gdzie $0 < \theta < \pi$. Okazać, że kwadrat odległości punktów (x_1, x_2) i (x'_1, x'_2) równy jest

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + 2(x_1 - x'_1) \cdot (x_2 - x'_2) \cdot \cos \theta.$$

2. Mając dane trzy różne punkty przestrzeni C_2 :

$$a = (a_1, a_2), \quad b = (b_1, b_2), \quad c = (c_1, c_2),$$

znaleźć punkt jednakowo od nich oddalony. Z otrzymanego rozwiązania wynioskować, że warunkiem koniecznym i dostatecznym spółliniowości czyli leżenia punktów a, b i c na jednej prostej jest znikanie wyznacznika¹

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

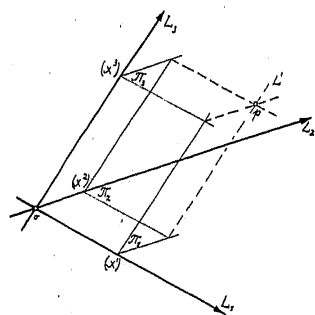
3. Okazać, że odległość punktów $b(r, \theta)$ i $b(r', \theta')$ równa się

$$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos(\theta - \theta')}.$$

4. Przestrzeń kartezjańska trójwymiarowa. W euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej E_3 weźmy trzy proste L_1, L_2, L_3 , nie leżące w jednej płaszczyźnie i przechodzące przez jeden punkt o . Ustalmy na nich współrzedne kartezjańskie o wspólnym początku o . Osie te w porządku ustalonym przez ich wskaźniki tworzą w przestrzeni E_3 *kartezjański układ współrzędnych*.

Każdemu punktowi p przestrzeni E_3 przyporządkujemy trzy liczby x^1, x^2, x^3 , gdzie x^i dla $i=1, 2, 3$ oznacza współrzedną na L_i punktu przecięcia L_i z płaszczyzną Π_i przechodzącą przez p i równoległą do obu pozostałych osi (rys. 4).

¹ Zasady teorii wyznaczników i równań liniowych, których znajomość zakładać będziemy w dalszym ciągu, znaleźć można np. w książce W. Sierpińskiego, *Zasady Algebry Wyższej*, Monografie Matematyczne, tom XI, Warszawa, 1946.



Rys. 4

Liczby te nazywają się *kartezjańskimi spółrzednymi* punktu p w układzie o osiach L_1, L_2, L_3 . W ten sposób każdemu punktowi p przestrzeni E_3 odpowiada uporządkowana trójka liczb rzeczywistych (x^1, x^2, x^3) . Na odwrót, mając dane trzy liczby x^1, x^2, x^3 , przeprowadźmy przez punkt (x^i) osi L_i płaszczyznę Π_i równoległą do obu osi pozostałych. Płaszczyzny Π_1 i Π_2 przetną się wzdłuż prostej L' równoległej do L_3 i przecinającej płaszczyznę Π_3 w punkcie p o spółrzednych x^1, x^2, x^3 . W ten sposób każdej trójce uporządkowanej liczb rzeczywistych (x^1, x^2, x^3) odpowiada punkt p przestrzeni E_3 , dla którego liczby te są kolejnymi spółrzednymi. Punkt ten będziemy identyfikować z trójką uporządkowaną (x^1, x^2, x^3) , pisząc $p = (x^1, x^2, x^3)$.

Jeżeli w szczególności każda z osi L_1, L_2, L_3 jest prostopadła do obu pozostałych, to układ nazywa się *prostokątnym*.

Uwydatnimy to w znakowaniu, pisząc wskaźniki przy spółrzednych u dołu.

Oznaczając dla punktów p' i p'' przez $\bar{p}'$ i $\bar{p}''$ ich rzuty prostopadłe na płaszczyznę Π osi L_1 i L_2 (rys. 5), wnosimy, że:

Jeśli $p' = (x_1', x_2', x_3')$, a $p'' = (x_1'', x_2'', x_3'')$ to $\bar{p}' = (x_1', x_2', 0)$ i $\bar{p}'' = (x_1'', x_2'', 0)$.

Wynika stąd, że x_1' i x_2' uważać możemy za spółrzedne prostokątne punktu p' w płaszczyźnie Π , zaś x_1'' i x_2'' za także spółrzedne punktu p'' . Stąd wobec wzoru (1) wnioskujemy, że

$$\varrho(\bar{p}', \bar{p}'')^2 = (x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2.$$

Oznaczając dalej przez q rzut punktu p' na płaszczyznę równoległą do Π i przechodzącą przez p'' , z trójkąta prostokątnego $\triangle(p', p'', q)$ znajdujemy:

$$\begin{aligned} \varrho(p', p'')^2 &= \varrho(q, p'')^2 + \varrho(q, p')^2 = \\ &= \varrho(\bar{p}', \bar{p}'')^2 + (x_3' - x_3'')^2 = (x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + (x_3' - x_3'')^2, \end{aligned}$$

skąd ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (5) \quad \varrho(p', p'') &= \varrho((x_1', x_2', x_3'), (x_1'', x_2'', x_3'')) = \\ &= \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + (x_3' - x_3'')^2}. \end{aligned}$$

Przestrzeń E_3 jest więc izometryczna ze zbiorem wszystkich uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3) zmetryzowanym przez wzór (5) (tzw. wzór Pitagorasa); zbiór ten nazywa się *trójwymiarową przestrzenią kartezjańską* C_3 .

By dać przykład zastosowania spółrzednych do geometrii przestrzeni trójwymiarowej, okażemy, że przez cztery punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie można przeprowadzić dokładnie jedną dwuwymiarową sferę czyli powierzchnię trójwymiarowej kuli.

W tym celu przeprowadźmy oś x_3 przez dwa z tych punktów, a oś x_2 przez trzeci. Dzięki temu punkty będą postaci:

$$p_1 = (0, 0, a); \quad p_2 = (0, 0, b); \quad p_3 = (0, c, 0); \quad p_4 = (d_1, d_2, d_3),$$

przy czym $a \neq b$ oraz $c \neq 0 \neq d_1$. Aby punkt $p = (x_1, x_2, x_3)$ był środkiem sfery przechodzącej przez te punkty, potrzeba i wystarcza, by wszystkie liczby $\varrho(p, p_i)$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$, były jednakowe, czyli by

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - b)^2 = x_1^2 + (x_2 - c)^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2 + (x_3 - d_3)^2. \end{aligned}$$

Zależność ta jest równoważna następującemu układowi trzech równań:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a - b) \cdot x_3 &= a^2 - b^2, \\ 2 \cdot a \cdot x_3 - 2 \cdot c \cdot x_2 &= a^2 - c^2, \\ 2 \cdot d_1 \cdot x_1 + 2 \cdot d_2 \cdot x_2 + 2 \cdot (d_3 - a) \cdot x_3 &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - a^2. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy jednoznacznie x_3 , z drugiego następnie x_2 , z trzeciego wreszcie x_1 .

Podobną rolę jak spółrzedne biegunowe na płaszczyźnie odgrywają w przestrzeni trójwymiarowej tzw. *spółrzedne sferyczne*. Położenie punktu $p = (x_1, x_2, x_3)$ przestrzeni C_3 wyznaczone jest jednoznacznie przez trzy liczby r, φ i θ , z których pierwsza oznacza odległość $\varrho(p, 0)$, druga amplitudę punktu (x_1, x_2) w płaszczyźnie C_2 , trzecia wreszcie kąt (w sensie elementarnej geometrii), który tworzy odcinek op z dodatnią półprostą osi L_3 . A więc spółrzedna φ punktu p jest wyznaczona z dokładnością do wielokrotności kąta 2π dla punktów p , dla których x_1 i x_2 jednocześnie nie znikają, czyli które nie leżą na osi L_3 . Dla punktów p leżących na L_3 za spółrzedną φ możemy przyjąć każdą liczbę rzeczywistą. Spółrzedna θ wyznaczona jest jednoznacznie dla punktów $p \neq 0$, przy czym przyjmuje ona wartości spełniające nierówność $0 \leq \theta \leq \pi$. Dla punktu $p = 0$ za spółrzedną θ przyjąć możemy każdą wartość rzeczywistą.

Ponieważ jasne jest, że $r \cdot \sin \theta$ równe jest promieniowi wodzącemu

punktu (x_1, x_2) w płaszczyźnie C_2 , więc między współrzędnymi sferycznymi a współzrędnymi prostokątnymi punktu p zachodzą zależności:

$$x_1 = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta, \quad x_2 = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad x_3 = r \cdot \cos \theta.$$

Nazwa współrzędnych sferycznych pochodzi stąd, że dla każdego $a > 0$ punkty przestrzeni C_3 , scharakteryzowane przez zależność $r=a$, są identyczne z punktami powierzchni kuli, czyli tzw. sfery o środku o i promieniu a .

Pośrednie miejsce między współzrędnymi prostokątnymi a sferycznymi zajmują tzw. *współrzędne walcowe* czyli cylindryczne.

Rozumiemy przez nie dla punktu $p=(x_1, x_2, x_3)$ trzy liczby r, φ, h , z których dwie pierwsze są identyczne z odpowiednimi współzrędnymi sferycznymi punktu $p(x_1, x_2, 0)$, ostatnia zaś h równa jest współrzędnej x_3 .

Przejście od współrzędnych prostokątnych do walcowych określają wzory:

$$x_1 = r \cdot \cos \varphi; \quad x_2 = r \cdot \sin \varphi; \quad x_3 = h.$$

Nazwa współrzędnych walcowych pochodzi stąd, że dla każdego $a > 0$ punkty przestrzeni C_3 , scharakteryzowane przez warunek $r=a$, są identyczne z punktami położonymi na powierzchni walca obrotowego o osi L_3 i promieniu a .

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć współrzędne środka odcinka o końcach (x_1', x_2', x_3') i (x_1'', x_2'', x_3'') .

2. Opierając się na tym, że przez trzy punkty, nie leżące na prostej, można zawsze przeprowadzić sferę (powierzchnię kuli), zbadać, czy istnieje liczba t taka, by punkt $p_t=(t-8, 6, t)$ leżał na prostej przechodzącej przez punkty $(1, 2, 3)$ i $(3, 4, 0)$.

5. Zbiory, funkcje, grupy. Z pojęciem zbioru spotkaliśmy się już w Nr 1; zamiast wyrazu «zbiór» używać będziemy czasem wyrazu «klasa». Korzystne będzie wprowadzenie kilku oznaczeń, związanych z pojęciem zbioru.

Przynależność przedmiotu a do zbioru A oznaczać będziemy pisząc $a \in A$, który to symbol czytać będziemy: a należy do zbioru A , lub też a jest elementem zbioru A .

Przez $\emptyset$ będziemy oznaczać tzw. *zbiór pusty* czyli zbiór nie zawierający żadnego elementu.

$A=B$ oznacza, że zbiory A i B są identyczne, tj. że każdy element pierwszego z nich należy do drugiego i na odwrót.

$A \subset B$ oznacza, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Mówimy wówczas, że A jest *zawarte* w B , lub też że A jest *podzbiorem* (czyli *częścią*) zbioru B . Tę samą zależność można też napisać w postaci $A \subsetneq B$, mówiąc, że B *zawiera* A , lub też że B jest *nadzbiorem* zbioru A .

Jasne jest, że zbiór jest zawsze swoim własnym podzbiorem i nadzbiorem i że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Podzbiór A zbioru B różny od B nazywa się *podzbiorem właściwym* zbioru B .

Dla dowolnej klasy K (niekoniecznie skończonej), której elementami są zbiory, rozumiemy będziemy przez *sumę* zbiorów klasy K zbiór S taki, że $p \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $E \in K$ taki, że $p \in E$. W szczególności, jeżeli klasa K składa się ze skończonej liczby zbiorów $E_1, E_2, \dots, E_n$, to ich sumę oznacza się przez $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ lub też przez $\sum_{i=1}^n E_i$. Tak określone dodawanie zbiorów jest oczywiście łączne i przemienne.

Iloczynem zbiorów klasy K nazywamy zbiór P taki, że $p \in P$ wtedy i tylko wtedy, gdy p należy do każdego ze zbiorów $E \in K$. Jeżeli klasa K składa się ze skończonej liczby zbiorów $E_1, E_2, \dots, E_n$, to ich iloczyn oznacza się przez $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n$, lub też przez $\prod_{i=1}^n E_i$. Jasne jest, że tak określone mnożenie zbiorów jest łączne i przemienne. Zamiast słowa iloczyn używa się czasem wyrażenia «*część wspólna*» lub też «*przecięcie*» zbiorów klasy K .

Dwa zbiory posiadające iloczyn pusty nazywają się *rozłącznymi*. Przez *różnicę* zbioru A i zbioru B rozumiemy będziemy zbiór $A-B$ utworzony przez wszystkie te elementy zbioru A , które nie należą do B . W przypadku, gdy $A \supset B$, różnica $A-B$ nazywa się też *uzupełnieniem* zbioru B względem A .

Jeżeli każdemu elementowi x zbioru A przyporządkowany został dokładnie jeden element $f(x)$ zbioru B , to mówimy, że w zbiorze A określona jest funkcja f o argumentach $x \in A$ i wartościach $f(x)$ należących do zbioru B . Zbiór wartości $f(x)$, gdzie $x \in A$, oznaczać będziemy przez $f(A)$ i nazywać *obrazem* zbioru A . W szczególności więc $f(A)$ jest zbiorem wszystkich wartości funkcji f . Zamiast wyrazu «*funkcja*» używać będziemy również wyrazu «*przekształcenie*».

Funkcją odwrotną względem funkcji $y=f(x)$ nazywa się funkcja, która każdej wartości y funkcji f przyporządkowuje argument x . Jest ona określona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f różnym argumentom przyporządkowuje zawsze różne wartości, czyli jest wzajemnie jednoznaczna. Funkcję odwrotną względem f oznaczać będziemy zwykle przez f^{-1} .

Funkcja określona (w dowolnym zbiorze argumentów) wzorem $f(x)=x$ nazywa się *przekształceniem tożsamościowym*.

Jeżeli funkcja f określona w zbiorze A ma wartości leżące w zbiorze B , zaś funkcja g określona jest w zbiorze B i ma wartości w zbiorze C , to wzór

$$h(x) = g[f(x)]$$

określa w zbiorze A funkcję h o wartościach należących do C , zwaną *superpozycją* funkcji f i g . Superpozycję tę oznaczamy zwykle przez gf , pisząc krótko $h(x) = gf(x)$.

Zbiór X , dla którego elementów określone jest działanie (zwane *operacją grupową*) przyporządkowujące każdej parze $x, y \in X$ pewien element $x \circ y \in X$, nazywa się *grupą*, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1° Dla każdych trzech elementów $x, y, z \in X$ jest $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

2° Istnieje element $x_0 \in X$ (tzw. *neutralny*) taki, że $x_0 \circ x = x$ dla każdego $x \in X$.

3° Dla każdego $x \in X$ istnieje element $\bar{x} \in X$ (tzw. *przeciwny*) taki, że $\bar{x} \circ x = x_0$.

Jeżeli operacja grupowa jest przemienna, czyli jeżeli jest stale $x \circ y = y \circ x$, to grupa nazywa się *przemenną* czyli *abelową*.¹

Podzbiór Y grupy X , który przy ustalonej w X operacji grupowej stanowi grupę, nazywa się *podgrupą* grupy X . Tak np. zbiór liczb rzeczywistych z dodawaniem jako operacją grupową jest grupą (abelową). Zbiór liczb całkowitych stanowi jej podgrupę.

Grupę, której elementami są przekształcenia wzajemnie jednoznaczne, dla których zarówno zbiorem argumentów jak i zbiorem wartości jest pewien ustalony zbiór A , operacją zaś grupową jest superpozycja, nazywamy *grupą przekształceń*. Rolę elementu neutralnego spełnia wówczas przekształcenie tożsamościowe, a rolę elementu przeciwnego względem f — przekształcenie odwrotne f_{-1} .

¹ Od nazwiska Abela, znakomitego matematyka norweskiego z XIX wieku.

CZĘŚĆ I.

Przestrzenie kartezjańskie

ROZDZIAŁ I.

Punkty i wektory w przestrzeniach kartezjańskich

6. Punkty przestrzeni C_n . Przez wprowadzenie współrzędnych prostokątnych nadaliśmy przestrzeniom euklidesowym jedno-, dwu- i trójwymiarowym postać tzw. przestrzeni kartezjańskich C_1 , C_2 i C_3 , których punktami są odpowiednio układy złożone z jednej, dwóch i trzech liczb rzeczywistych. Nasuwa się przypuszczenie, że zasięg metody analitycznej nie ogranicza się do tych przestrzeni, lecz że pozwala ona również na badanie przestrzeni, których punktami są układy złożone z większej ilości liczb. Inaczej mówiąc, że geometria analityczna uprawiana być może w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów. Za tak ogólnym ujęciem przemawia kilka względów. Po pierwsze, rozpatrywanie od razu przestrzeni n -wymiarowej pozwala na jednoczesne badanie trzech przypadków elementarnych ($n=1, 2, 3$), zamiast rozpatrywania każdego z nich osobno. Po drugie, rozwój fizyki okazał, że przestrzenie o większej liczbie wymiarów nie są bynajmniej jedynie ciekawostką matematyczną, lecz że grają coraz bardziej istotną rolę w nowoczesnej fizyce teoretycznej. Po trzecie, tak ogólne potraktowanie przedmiotu pozwala na oswojenie się w dziedzinie bardzo elementarnej z pojęciami i metodami, które zarówno w algebrze jak i analizie grają znaczną rolę. Wreszcie, po czwarte, pewne zwiększenie abstrakcyjności rozważań pozwala na uzyskanie większej ich przejrzystości; w dziedzinie bowiem «zwykłych» przestrzeni intuicja narzuca się tak silnie, że utrudnia często zrozumienie logicznej strony rozważań.

Przez C_{-1} rozumiemy przestrzeń, która jest zbiorem pustym¹ (p. wstęp, Nr 5); przez C_0 przestrzeń złożoną z jednego tylko punktu, uważanego za układ pusty liczb. Wreszcie, dla n naturalnych, przez n -wymiarową przestrzeń kartezjańską C_n rozumiemy zbiór

¹ tj. zbiorem, który nie zawiera żadnego elementu. Oznaczać go będziemy przez 0.