ZESTAW 1

1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $x_0 \in X$. Udowodnić, że
$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y, \\ d(x, x_0) + d(y, x_0), & \text{dla } x \neq y, \end{cases}$$
jest metryką na X. (max 3p)

2. Niech $\bar{d}$ będzie metryką zdefiniowaną w poprzednim zadaniu dla $X = \mathbb{R}^2$,
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
i $x_0 = (1, 1)$. Naszkicować (z uzasadnieniem) kule otwarte w $(X, \bar{d})$ o środku w $(0, 0)$ i promieniu r (rozważyć różne wartości r). (max 3p)

3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, że dowolny ciąg zbieżny jest ograniczony. (max 3p)

4. Zbadać zbieżność ciągu
$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^k}\right)_{k=1}^{\infty}, \quad n = 2, \ldots$$
w przestrzeni l^1. (max 3p)

Zestaw 2

1. Niech $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|$ dla $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Pokazać, że d nie jest metryką na $\mathbb{R}^2$, ale jest na $\mathbb{R}_+^2$, gdzie $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.
(max 3p)

2. Niech d będzie metryką zdefiniowaną w poprzednim zadaniu na $X = \mathbb{R}_+^2$. Naszkicować (z uzasadnieniem) kulę otwartą w (X,d) o środku w $(1,1)$ i promieniu 1.
(max 3p)

3. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, że dowolny podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.
(max 3p)

4. Zbadać zbieżność ciągu

$$\mathbf{x}_n = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1 \text{ razy}}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots\right), \quad n = 1,2,\ldots$$

w przestrzeni l^1.
(max 3p)

Zestaw 3

1. Udowodnić, że funkcja zdefiniowana dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$d(x, y) = \max\{3|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\}$$

jest metryką na $\mathbb{R}^2$. (max 3p)

2. Naszkicować (z uzasadnieniem) kulę otwartą w $(\mathbb{R}^2, d)$ o środku w $(1, 1)$ i promieniu 2. (max 3p)

3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, jeśli ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny, to jest on zbieżny. (max 3p)

4. Zbadać zbieżność ciągu

$$\mathbf{x}_n = \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}} \right)_{k=1}^{\infty}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

w przestrzeni m. (max 3p)

Zestaw 4

1. Niech $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||x_1|-|y_1||+||x_2|-|y_2||$ dla $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Pokazać, że d nie jest metryką na $\mathbb{R}^2$, ale jest na $\mathbb{R}^2_+$, gdzie $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. (max 3p)

2. Niech d będzie metryką zdefiniowaną w poprzednim zadaniu na $X = \mathbb{R}^2_+$. Naszkicować (z uzasadnieniem) kulę otwartą w (X,d) o środku w $(1,1)$ i promieniu $3/2$. (max 3p)

3. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Niech ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ będą zbieżne do a. Wykazać, że ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany wzorem $z_{2n} = y_n$ i $z_{2n-1} = x_n$ jest zbieżny do a. (max 3p)

4. Zbadać zbieżność ciągu

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n2^k}\right)_{k=1}^{\infty}, \quad n = 1,2,\ldots$$

w przestrzeni l^2. (max 3p)