Rozwiązanie zadań testowych

Zadanie 1

$$\bar{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ d(x,x_0) + d(y,x_0) & x \neq y \end{cases}$$

$\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+$ jeśli d ma te własności

A1 $x = y \Rightarrow \bar{d}(x,y) = 0$

$\bar{d}(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,x_0) + d(y,x_0) = 0 \Rightarrow d(x,x_0) = 0 \wedge d(y,x_0) = 0$

czyli $x = x_0,\ y = y_0 \Rightarrow x = y$

A2 $x \neq y \Rightarrow \bar{d}(x,y) = d(x,x_0) + d(y,x_0) = d(y,x_0) + d(x,x_0) = \bar{d}(y,x)$

$x = y \quad 0 = \bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x) = 0$

A3 $x = y \Rightarrow \bar{d}(x,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$ z nieujemności metryki

$x \neq y \Rightarrow \bar{d}(x,y) = d(x,x_0) + d(y,x_0) \leq d(x,x_0) + d(z,x_0) + d(z,x_0) + d(y,x_0) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$

z nieujemności d.

$X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (1,1)$ środek kuli $\underline{y} = (0,0)$

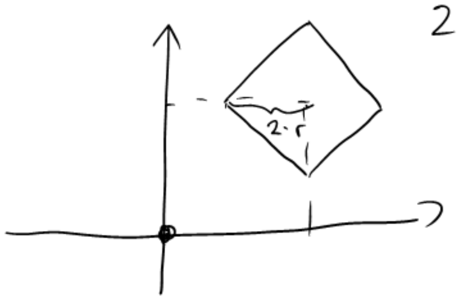
$\underline{y} \in K(\underline{y}, r)$ dla dow $r \geq 0$

$\underline{x} \neq (0,0) \qquad |x_1 - 1| + |x_2 - 1| + |1-0| + |1-0| < r$

$$|x_1 - 1| + |x_2 - 1| < r - 2$$

Dla $r \leq 2 \qquad K(0,r) = \{(0,0)\}$

Dla $r > 2$ kwadrat o środku $(1,1)$ i przekątnej $2(r-2)$ oraz $\{(0,0)\}$



Zadanie 2 Załóżmy że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x tzn

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N} \forall_{n\geq N} \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Ustalmy $\varepsilon = 1$, czyli istnieje k_1 takie, że dla wszystkich $n \geq k_1$ $d(x_n, x) \leq 1$.

Niech $r = \max_{1 \leq n < k_1} \{ d(x_n, x) \} < \infty$ bo zbiór jest skończony

Wówczas $\forall_n \; d(x_n, x) \leq \max\{1, r\}$

Czyli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K(x, \max\{1, r\})$

i ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Zadanie 3

$$\underline{x}_n = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^k}\right)_{k=1}^{\infty} \quad n = 2, \ldots; \quad \underline{x}_n \in \ell^1 \text{ gdyż } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\text{i } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < +\infty \quad n \geq 2$$

Jeśli jest zbieżny, to $\forall_k \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^k}\right) = \frac{1}{k^2} \Rightarrow$

potencjalny element graniczny $x = (1, \frac{1}{4}, \ldots)$

$$d_1(\underline{x}_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \to 0 \text{ dla } n\to\infty$$

Zadanie 4

$$\underline{x}_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}\right)_{k=1}^{\infty} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{w } \ell^{\infty}(m)$$

Jeśli jest zbieżny, to z $\forall_k \lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^n = 0$,

gdyż $\sqrt[k]{\frac{1}{2}} < 1$, wynika że element graniczny to

$\underline{x} = (0, 0, \ldots)$

Ale $d_\infty(\underline{x}_n, \Theta) = \sup_k \left(\sqrt[k]{\frac{1}{2}}\right)^n = \left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2}}\right)^n = 1 \not\to 0$

Zatem ciąg nie jest zbieżny.

Zadanie 5. $d(x,y) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| \qquad (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$0 = d(x,y) = |x_i^2 - y_i^2| \Rightarrow x_i^2 = y_i^2 \Rightarrow x_i = \pm y_i \quad i=1,2$

zatem nie jest to metryka

Jeśli $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

A1) $0 = d(x,y) \Rightarrow x_i^2 = y_i^2 \Rightarrow x_i = \pm y_i \Rightarrow x_i = y_i, \ i=1,2$

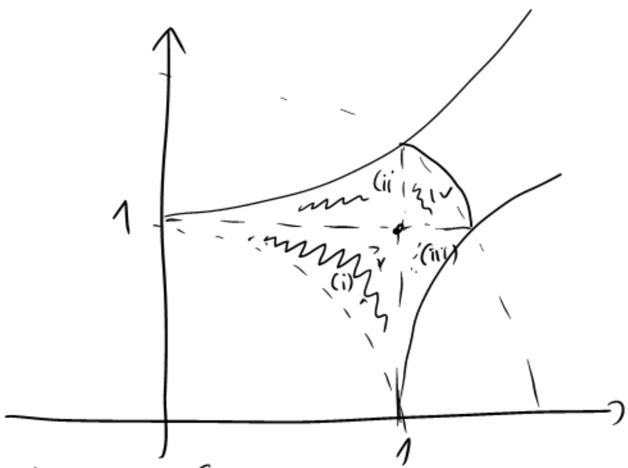
zatem $x=y$

A2 $d(x,y) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| = |y_1^2 - x_1^2| + |y_2^2 - x_2^2| = d(y,x)$

A3 $d(x,y) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| \leq |x_1^2 - z_1^2| + |z_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - z_2^2| + |z_2^2 - y_2^2| = d(x,z) + d(z,y)$

Kula o promieniu 1 i środku $(1,1)$

$|x_1^2 - 1| + |x_2^2 - 1| < 1 \qquad x_1, x_2 > 0$



(i) $0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1 \Rightarrow$
$1 - x_1^2 + 1 - x_2^2 < 1 \qquad x_1^2 + x_2^2 > 1$

(ii) $0 < x_1 < 1 \quad x_2 > 1 \Rightarrow$
$1 - x_1^2 + x_2^2 - 1 < 1 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 < 1$
hiperbola

(iii) $x_2 > 1, \ 0 < x_2 < 1$, symetryczne

(iv) $x_1 > 1, \ x_2 > 1$
$x_1^2 + x_2^2 < 3$

Zadanie 6 $\quad d(\underline{x},\underline{y}) = ||x_1| - |y_1|| + ||x_2| - |y_2|| \qquad \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^2$

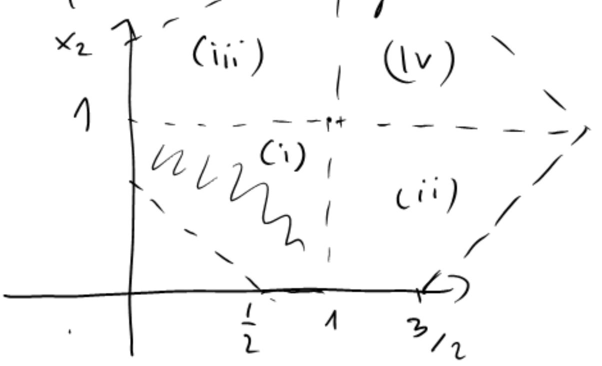
$0 = d(\underline{x},\underline{y}) \Rightarrow |x_1| = |y_1| \wedge |x_2| = |y_2| \Rightarrow x_1 = \pm y_1, \ x_2 = \pm y_2$

Nie jest to metryka.

Dla $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^2_+$ mamy $|x_i| = x_i, \ |y_i| = y_i$ i

$$d(\underline{x},\underline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

i jest to metryka indukowana z metryki ℓ^1 na $\mathbb{R}^2$



$|x_1 - 1| + |x_2 - 1| < 3/2$

(i) $0 < x_1, x_2 < 1 \Rightarrow x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$

(ii) $x_1 > 1, 0 < x_2 < 1 \Rightarrow x_1 - x_2 < \frac{3}{2}$

(iii) $x_2 > 1, \ 0 < x_1 < 1 \Rightarrow x_2 - x_1 < \frac{3}{2}$

(iv) $x_2 > 1, \ x_1 > 1 \Rightarrow x_1 + x_2 < 7/2$

Zadanie 7. Załóżmy, że $\lim x_n = x$ i że istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ który nie jest zbieżny do x tzn

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{k} \forall_{n \geq k} \; d(x_n, x) < \varepsilon$$

i $$\exists_{\varepsilon_0} \forall_{l_0} \exists_{l \geq l_0} \; d(x_{n_l}, x) \geq \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Weźmy $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ i odpowiednie k_0. Ponieważ n_k jest ściśle monotoniczny dla pewnego l_0, $n_{l_0} \geq k_0$, a zatem $n_l \geq k_0$ jeśli $l \geq l_0$. Czyli dla $l \geq l_0$ z $(*)$

$$\underbrace{d(x_{n_l}, x) < \frac{\varepsilon_0}{2}}_{\text{bo } n_l \geq k_0} \quad \text{oraz} \quad \underbrace{d(x_{n_l}, x) \geq \varepsilon_0}_{\text{z } (*)}$$

Sprzeczność

Zadanie 8

$$\underline{x}_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \tfrac{1}{n^2}, \tfrac{1}{(n+1)^2}, \ldots) \quad \text{w } l^1, \quad \underline{x}_n \in l^1 \text{ gdyż } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} < \infty$$

Jeśli jest zbieżny, to $\forall_k \lim x_n^{(k)} = 0$ bo

$x_n^{(k)} = 0$ od $n \geq k$. Czyli $\underline{x} = (0, 0, \ldots 0 \ldots)$

Ale $$d_1(\underline{x}_n, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x^{(k)}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{l^2} \to 0$$

jako reszta szeregu $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ który jest zbieżny.

Zadanie 9

$$\underline{x}_n = \left(\frac{1}{n 2^k}\right)_{k=1}^{\infty} \quad \text{w } l^2. \text{ Możliwa granica } \underline{x} = (0, 0, \ldots)$$

$$d_2(\underline{x}_n, \underline{x}) = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n}$$

$\to 0$ gdy $n \to \infty$

Zadanie 10 Ciąg Cauchy'ego

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_0} \forall_{n,m>k_0} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Podciąg zbieżny

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{l} \forall_{k>l} \quad d(x_{n_k}, g) < \varepsilon$$

Weźmy $k_1 = \max\{k_0, n_l\}$ i dowolne $n > k_1$. Istnieje $n_k > k_1$. Dla tego n_k bo $n_k > k_1 \geq n_l$

$$d(x_n, g) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{\text{bo } n, n_k > k_1 \geq k_0} + \overbrace{d(x_{n_k}, g)} < 2\varepsilon$$

Z dowolności ε $d(x_n, g) \to 0$

Zadanie 11

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_1} \forall_{n>k_1} \quad d(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k_2} \forall_{n>k_2} \quad d(y_n, a) < \varepsilon$$

Weźmy $k = 2\max\{k_1, k_2\}$, i rozważmy dowolne $n > k$

$d(z_n, a)$. Jeśli $n = 2l$, to $d(z_n, a) = d(y_l, a)$ ale

$l > \max\{k_1, k_2\} \geq k_2$ czyli $d(z_n, a) < \varepsilon$

Jeśli $n = 2l-1$, to $z_n = x_l$ i $l > \max\{k_1, k_2\}$

i $d(z_n, a) = d(x_l, a) < \varepsilon$

Zatem $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k = 2\max\{k_1, k_2\}} \forall_{n>k} \quad d(z_n, a) < \varepsilon$

i ciąg jest zbieżny.

Zadanie 12

$d(\underline{x}, \underline{y}) = \max\{3|x_1 - y_1|, 2|x_2 - y_2|\} \geq 0$

A1 $0 = d(\underline{x}, \underline{y}) \Rightarrow 3|x_1 - y_1| = 0,\ 2|x_2 - y_2| = 0 \Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}$

A2. Symetria wynika z wł. modułu.

A3 $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq \max\{3|x_1 - z_1| + 3|z_1 - y_1|,\ 2|x_2 - z_2| + 2|z_2 - y_2|\}$

(bo każdy element zbioru jest nie mniejszy niż poprzednio)

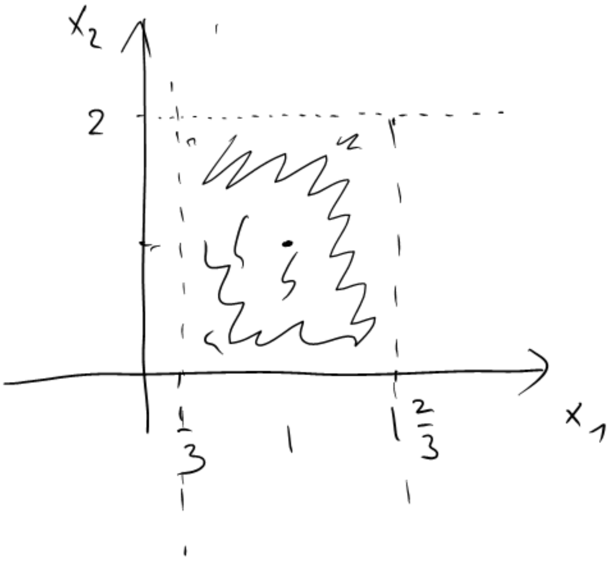
$\leq \max\{3|x_1 - z_1|,\ 2|x_2 - z_2|\} + \max\{3|z_1 - y_1|,\ 2|z_2 - y_2|\}$

(z $\max\{a+b, c+d\} \leq \max\{\max\{a,c\} + \max\{b,d\},\ \max\{c,a\} + \max\{d,b\}\}$
$= \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$)

$= d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$.

Kula otwarta $K((1,1), 2)$

$$\max\{3|x_1-1|,\ 2|x_2-1|\} < 2$$



Zbiór (x_1, x_2) definiowany przez

$$3|x_1-1| < 2$$

$$\frac{1}{3} < x_1 < 1\frac{2}{3}$$

Zbiór zdef przez

$$2|x_2-1| < 2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < x_2 < 2$$