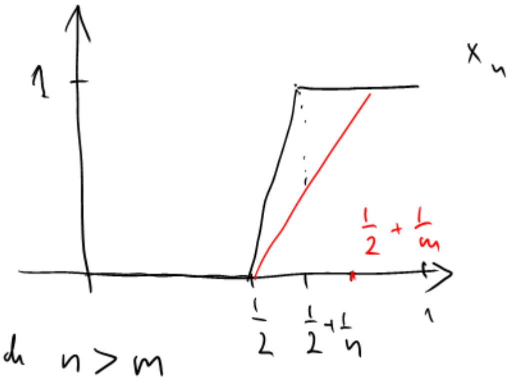
Zupełności

1. Wykazać, że przestrzeń $\tilde{C}([0,1])$ funkcji ciągłych z metryką $d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$ nie jest przestrzenią zupełną



Rozważmy ciąg

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ nt - \frac{n}{2} & \frac{1}{2} < t \le \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

Niech $n > m$

$n \geq 2$

$$d(x_n, x_m) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left[(n-m)t - \left(\frac{n-m}{2}\right)\right] dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(1 - nt + \frac{n}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

Jest to ciąg Cauchy'ego.

Załóżmy, że $x_n(t)$ jest zbieżny w L^1 do funkcji ciągłej

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{k} \forall_{n \geq k} \; d(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\,dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|\,dt$$

$\Rightarrow x(t) = 0$ dla $0 \le t \le \frac{1}{2}$

Oraz

$$\forall_{\varepsilon} \exists_{n} \forall_{n \geq n} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|\,dt < \varepsilon$$

Ustalmy $\delta > 0$ wówczas $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} < \frac{1}{2}+\delta$ dla wszystkich dostatecznie dużych n, zatem $\int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1} |1-x(t)|\,dt < \varepsilon$

Z dowolności ε

$\int_{\frac{1}{2}+\delta}^{1} |x(t)-1|\,dt = 0$ zatem $x(t)=1$ na $(\frac{1}{2}+\delta, 1]$.

z dowolności δ $x(t)=1$ na $(\frac{1}{2}, 1]$

zatem funkcja graniczna

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

nie jest ciągła.

2. Pokazać, że przestrzeń c_0 jest zupełna

Niech $\underline{x}_n = (x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w c_0 tzn

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m \geq N} \sup_k |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| < \varepsilon$$

To oznacza również, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m \geq N} \forall_k |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\forall_k (x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ jest liczbowym ciągiem Cauchy'ego

Czyli $\forall_k \exists_{x^{(k)}} \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x^{(k)}$

Show $\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m \geq N} \sup_k |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| < \varepsilon$

Ustalmy $n \geq N$ $\Rightarrow \forall_k \forall_{m \geq N} |x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow \forall_k \forall_{m \geq N} |x_n^{(k)} - x^{(k)}| < \varepsilon$

Czyli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n \geq N} \sup_k |x_n^{(k)} - x^{(k)}| < \varepsilon$

zatem $d^{\infty}(\underline{x}_n, \underline{x}) \to 0$ gdy $n \to \infty$

Trzeba pokazać, że $\underline{x} \in c_0$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $n_0 \geq N$ $\forall_k |x_n^{(k)} - x^{(k)}| < \varepsilon$

Również, istnieje k_0 takie że $\forall_{k \geq k_0} |x_{n_0}^{(k)}| < \varepsilon$

Czyli $\exists_{k_0} \forall_{k > k_0} |x^{(k)}| = |x^{(k)} - x_{n_0}^{(k)}| + |x_{n_0}^{(k)}| < 2\varepsilon$

z dowolności ε, $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0$ czyli $\underline{x} \in c_0$

3. Wykazać, że przestrzeń metryczna $(\tilde{\ell}^1, d)$ z metryką

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sup_{i\geq 2}|x^{(i)}-y^{(i)}| + \left|\sum_{i=1}^{\infty}(x^{(i)}-y^{(i)})\right|$$ nie jest zupełna.

Rozważmy ciąg $\underline{x}_n = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, 0 \dots\right)$

Ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego w d bo

$$\sup_{i\geq 2}|\underline{x}_n^{(i)} - x_m^{(i)}| = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_n^{(i)} - y_m^{(i)}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\right| \to 0$$ warunek Cauchy'ego dla szeregu anharmonicznego

Ponieważ pierwsza część metryki wymusza zbieżność po współrzędnych, jeśli $\underline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ jest granicą, to $x^{(i)} = (-1)^{i+1}\frac{1}{i}$. Wówczas aby

$$\left|x^{(1)} - 1 + \sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

musimy mieć $x^{(1)} = 1$. Zatem potencjalna granica jest

$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \dots (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \dots\right)$. Jednakże

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = +\infty$$ zatem $\underline{x} \notin \tilde{\ell}^1$.

<u>Zadanie 4</u>. Rozważmy na $\mathbb{R}^2$ następującą funkcję

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \underline{x}=\underline{y} \\ |x_1|+|y_1| + |x_2-y_2| & \text{dla } \underline{x}\neq\underline{y} \end{cases}$$

(i) Pokazać, że jest to metryka

(ii) Znaleźć postać kul otwartych w $(\mathbb{R}^2, d)$

(iii) Znaleźć postać ciągów zbieżnych w $(\mathbb{R}^2, d)$

(iv) Zbadać, czy $(\mathbb{R}^2, d)$ jest zupełna.

ad (i) $d(\underline{x},\underline{y}) = 0$ $\quad |x_1|+|y_1|+|x_2-y_2| = 0 \implies 0 = |x_1| = |y_1| = |x_2-y_2|$

$\implies x_1 = y_1 = 0$ i $x_2 = y_2 \implies \underline{x} = (0, x_2)$, $\underline{y} = (0, x_2)$

War 2 zachodzi z własności modułu

Warunek Δ. Jeśli $\underline{x} = \underline{y} \implies d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \leq d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})$

dla dow $\underline{z}$

Jeśli $\underline{x}\neq\underline{y}$ i $\underline{x}=\underline{z}$ to $\underline{y}\neq\underline{z}$ i

$d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{z},\underline{y})$, $d(\underline{x},\underline{z}) = 0$ i

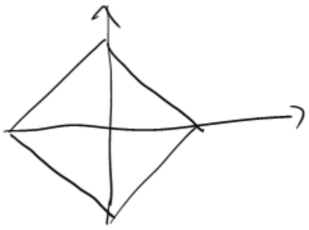
$$d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})$$

Jeśli $\underline{x} \neq \underline{y} \neq \underline{z}$ i $\underline{x} \neq \underline{z}$

$$d(\underline{x},\underline{y}) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1| + |z_1| + |z_1| + |y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})$$

(ii) Postać kul

(a) środek w $\Theta \Rightarrow d(\underline{x},\Theta) = |x_1| + |y_1|$ a zatem mamy standardową kulę w metryce l^1



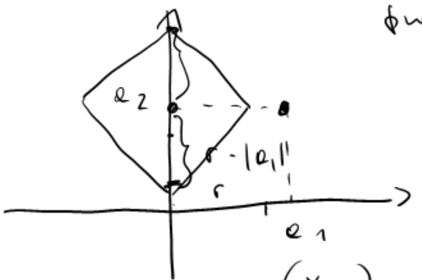
b) środek w $\underline{a} = (a_1, a_2)$, promień $r > 0$: $\underline{x} = \underline{a}$ lub

$$|x_1| + |a_1| + |x_2 - a_2| < r$$

Jeśli $r \leq |a_1| \Rightarrow K(\underline{a}, r) = \{a\}$

Jeśli $r > |a_1| \Rightarrow |x_1| + |x_2 - a_2| < r - |a_1|$

Zatem jest to kwadrat o środku $(0, a_2)$ i przekątnej. Jeśli $r - |a_1| > |a_1|$ to $\underline{a}$ należy do wnętrza tego kwadratu



(iii) Niech ciąg $(\underline{x}_n)$ zbiega do $\underline{x}$ w $(\mathbb{R}^2, d)$

Jeśli $\underline{x} = \Theta$ to $d(\underline{x}_n, \Theta) = |x_n^{(1)}| + |x_n^{(2)}| \to 0$

czyli ciągi zbieżne po współrzędnych do Θ są zbieżne. Odwrotnie, jeśli $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) \to (0,0)$ to ciąg ten jest zbieżny w metryce.

Podobnie jest, gdy $\underline{x} = (0, x^{(2)})$ bo $d(\underline{x}_n, \underline{x}) = |x_n^{(1)}| + |x_n^{(2)} - x^{(2)}|$ co odpowiada metryce l^1 w $\mathbb{R}^2$.

Gdy $\underline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ $x^{(1)} \neq 0$ to widzimy, że na to by $d(\underline{x}_n, \underline{x}) < \varepsilon$ ale $\varepsilon < |x^{(1)}|$ $\underline{x}_n = \underline{x}$ a zatem ciąg musi być stały od pewnego miejsca. Odwrotnie, ciągi stałe od pewnego miejsca są zbieżne.

(iv). Niech $(\underline{x}_n)$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Jeśli ciąg zawiera podciąg stały, to jest zbieżny. Jeśli nie, to weźmy podciąg różnowartościowy $(\underline{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Wówczas

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{m} \forall_{k,l \geq m} \; d(\underline{x}_{n_k}, \underline{x}_{n_l}) = |x^{(1)}_{n_k}| + |x^{(1)}_{n_l}| + |x^{(2)}_{n_k} - x^{(2)}_{n_l}| < \varepsilon$$

Robiąc to na tym warunku $(x^{(1)}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ zbiega do 0, zaś $(x^{(2)}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest liczbowym ciągiem Cauchy'ego a zatem zbieżnym do jakiegoś $x^{(2)}$. Tak więc $\underline{x}_n \to (0, \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\uparrow}{x^{(2)}}})$

W każdym przypadku ciąg Cauchy'ego jest zbieżny a więc $(\mathbb{R}^2, d)$ jest zupełna.