Zadanie 1. Niech $\tilde{\ell}^1$ będzie zbiorem wszystkich ciągów sumowalnych
a) Wykazać że funkcja $d_2(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}$ jest metryką na $\tilde{\ell}^1$
b) Wykazać, że nie jest to metryka równoważna z metryką d_1.

ad a) Wykażemy, że $\tilde{\ell}^1 \subset \tilde{\ell}^2$ - zbiór wszystkich ciągów sumowalnych z kwadratem. Niech $\underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ spełnia $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$

Wówczas istnieje i_0 takie że $|x_i| \le 1$ dla $i \geq i_0$

Ale jeśli $|x_i| \le 1$, to $|x_i|^2 \le |x_i|$ zatem z kryterium porównawczego $\sum_{i=i_0}^{\infty} |x_i|^2 \le \sum_{i=i_0}^{\infty} |x_i|$ jest zbieżny

Ponieważ $\sum_{i=1}^{i_0-1} |x_i|^2 < +\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$ i $\tilde{\ell}^1 \subset \tilde{\ell}^2$, zatem $(\tilde{\ell}^1, d_2)$ jest przestrzenią metryczną (d_2 jest metryką indukowaną na $\tilde{\ell}^1$ z $\tilde{\ell}^2$)

Poprzednio pokazaliśmy, że

$$d_2(\underline{x}, \underline{y}) \le \sqrt{d_1(\underline{x}, \underline{y})}$$ gdzie d_1 jest standardową metryką ℓ^1, czyli że zbieżności w d_1 wynika zbieżność w d_2.

Rozważmy ciąg $\underline{x}_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \dots \tfrac{1}{n}}_{n \text{ razy}}, 0, \dots)$

$d_2(\underline{x}_n, \Theta) = \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ czyli $\underline{x}_n \to \Theta$ w d_2

$d_1(\underline{x}_n, \Theta) = \frac{n}{n} = 1 \not\to 0$ czyli $\underline{x}_n \not\to \Theta$ w d_1

2 Pokazać, dla dowolnej metryki d, że d jest równoważna $\overline{d} = \frac{d}{1+d}$

Jeśli $d(x_n, x) \to 0$ to, z ciągłości $f(t) = \frac{t}{1+t}$ w zerze, $\overline{d}(x_n, x) \to 0$. Niech $\overline{d}(x_n, x) \to 0$. Mamy $\overline{d}(1+d) = d \Rightarrow \overline{d} = d(1-\overline{d})$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} \overline{d}(x_n, x) < \varepsilon$ Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i odpowiednie $\overline{n}$

Wówczas dla $n \geq \overline{n}$ $d = \frac{\overline{d}}{1-\overline{d}} \le 2\overline{d}$, i $\forall_{\varepsilon} \exists_{n_0' \geq \max\{n_0, \overline{n}\}} \forall_{n \geq n_0'}$ $d(x_n, x) < 2\varepsilon \Rightarrow x_n \to x$.

3. Udowodnić, że w przestrzeni l^1, m jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny do g, jest zbieżny po współrzędnych.

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k, \ldots), \qquad g = (g^1, g^2, \ldots)$$

Zbieżność po współrzędnych: $\forall_k \exists_{g^k} \; x_n^k \to g^k$ gdy $n \to \infty$ tzn

$$\forall_k \forall_\varepsilon \exists_{n_k} \forall_{n \geq n_k} |x_n^k - g^k| < \varepsilon$$

Załóżmy że $\exists_{k_0} \exists_\varepsilon \forall_{n_0} \exists_{n > n_0} |x_n^{k_0} - g^{k_0}| \geq \varepsilon$

Wówczas

$$\exists_\varepsilon \forall_{n_0} \exists_{n > n_0} \; \rho(x_n, g) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - g^k| \geq |x_n^{k_0} - g^{k_0}| \geq \varepsilon$$

Czyli (x_n) nie może być zbieżny. W m dowód jest podobny (zadanie domowe)

4. Zbadać zbieżność

(i) $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots \frac{1}{n^2}}_{n \text{ razy}}, 0, 0 \ldots)$ w l^1

(ii) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \ldots \frac{1}{\sqrt[k]{n}}, \ldots)$ w m

Zgodnie z zad 3, jeśli ciągi te są zbieżne, to muszą być zbieżne do $\Theta = (0, 0, \ldots)$

(i) $\rho(x_n, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ zbieżny

(ii) $\rho(x_n, \Theta) = \sup_k \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 1 \not\to 0$ nie jest zbieżny

5. Zbieżność w przestrzeniach ciągowych nie zawsze jest zgodna ze zbieżnością po współrzędnych!

a) Dowieść, że p. X ciągów sumowalnych z metryką

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_{n \geq 2} |x_n - y_n| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) \right|$$

jest przestrzenią metryczną

b) Zbadać zbieżności $x_n = (0, \underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ razy}}, 0, \ldots)$

w X z metryką l^2 i w (X, ρ)

e) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Rightarrow x_n = y_n$ dla $n \geq 0$ oraz

$0 = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)\right| \Rightarrow x_1 - y_1 = 0$. Symetria oczywista

Warunek Δ dla max znany

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - z_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(z_n - y_n)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - z_n)\right| + \left|\sum_{n=1}^{\infty}(z_n - y_n)\right|$$

Czyli jest to metryka.

W (X, ρ_2) $x_n \to \Theta$ gdyż $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$

W (X, ρ) widać, że jeśli x_n zbieżny, to $x_n \to 0$ dla $n \geq 0$ czyli może być $g = (g^1, 0, 0 \ldots)$

Wówczas $\left|g^1 - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} 1\right| = |g^1 - 1|$, zatem powinno być $g = (1, 0, 0 \ldots)$

W istocie

$$\rho(x_n, g) = \max_{k \geq 2}\left|\frac{1}{n}\right| + \left|1 - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} 1\right| = \frac{1}{n} \to 0$$