Topologia przestrzeni metrycznych Ćw 3

1. Udowodnić, że Int A jest sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A.

Niech $\mathcal{A}$ – rodzina zbiorów otwartych zawartych w A

$x \in \operatorname{Int} A \Rightarrow \exists_{K(x,r)} \; K(x,r) \subset A \Rightarrow x \in K(x,r) \in \mathcal{A}$

zb. otwarty

$\Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \bigcup \mathcal{A}$

Jeśli $x \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow \exists$ zbiór otwarty A' taki że

$x \in A' \subset A \Rightarrow \exists_{K(x,r)} \; x \in K(x,r) \subset A' \subset A$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Int} A$

2. Udowodnić, że ciąg zbieżny (x_n) w p.m. (X,d) może mieć tylko jedną granicę.

Załóżmy, że $x_n \to a$, $x_n \to b$ i $a \neq b$

$\Rightarrow d(a,b) = r > 0$ i $K(a,\frac{r}{3}) \cap K(b,\frac{r}{3}) = \emptyset$

Istotnie, załóżmy że $x \in K(a,\frac{r}{3}) \cap K(b,\frac{r}{3}) \Rightarrow$

$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \frac{2}{3}r < r$ sprzeczność

Z def zbieżności $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} d(x_n,a) < \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n \geq n_1} d(x_n,b) < \varepsilon$

Weźmy $\varepsilon = \frac{r}{3}$ i $n_2 = \max\{n_0,n_1\} \Rightarrow$

$\forall_{n \geq n_2} \; d(x_n,a) < \frac{r}{3} \wedge d(x_n,b) < \frac{r}{3} \Rightarrow$

$x_n \in K(a,\frac{r}{3}) \cap K(b,\frac{r}{3})$ sprzeczność

3) Dowieść, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony.

WC: $\forall_{\varepsilon} \exists_{n_0} \forall_{n,m \geq n_0} \; d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$

Weźmy $\varepsilon = 1 \Rightarrow \forall_{m \geq n_0} \; d(x_{n_0},x_m) \leq 1$

Weźmy $r = 1 + \max_{1 \leq i \leq n_0} d(x_i, x_{n_0}) \Rightarrow d(x_i, n_0) \leq r$
i zbiór $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset K(x_{n_0}, r)$

4) Udowodnić, że jeśli każdy podciąg ciągu (x_n) zawiera podciąg zbieżny do g to (x_n) jest zbieżny do g

Załóżmy, że $x_n \not\to g \Rightarrow \exists_{\varepsilon_0} \forall_n \exists_{k_n \geq n} \; d(x_{k_n}, g) \geq \varepsilon_0$ $(*)$

Z drugiej strony (x_{k_n}) jest podciągiem (x_n) zatem zawiera podciąg zbieżny $(x_{k_{n_l}})$: $\forall_\varepsilon \exists_{l_0} \forall_{l \geq l_0} \; d(x_{k_{n_l}}, g) \leq \varepsilon$

Biorąc $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ otrzymujemy sprzeczność z $(*)$

5) Udowodnić, że $x \in \overline{A}$ wtw $\forall_{\varepsilon > 0} K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Z def $\overline{A} = A \cup A^d$ (domknięcie to A lub zbiór wszystkich p. skupienia A).

$x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A \lor x \in A^d$. Jeśli $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Jeśli $x \in A^d \Rightarrow \exists_{(x_n)} x_n \in A \quad x_n \to x \Rightarrow$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \; d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \subset K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Z drugiej strony, jeśli $\forall_{\varepsilon > 0} K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \lor x \in A$ i

$\forall_n \exists_{x_n \in A} K(x, x_n) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$ i $x \in A^d$

6) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną dyskr.
Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg dowolnego zbioru oraz postać ciągów zbieżnych

Niech $A \subset X$, $a \in A$, $K(a, r) = \{a\}$ dla $r < 1$
zatem $a \in K(a, r) \subset A \Rightarrow$ każdy punkt dowolnego zbioru jest punktem wewnętrznym $\Rightarrow A = \operatorname{Int} A$

Załóżmy, że (x_n) jest zbieżny do $a \Rightarrow \forall_\varepsilon \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} d(x_n, a) \leq \varepsilon$

Jeśli $\varepsilon < 1 \Rightarrow \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} x_n = a$ zatem jeśli ciąg jest zbieżny to musi być stały od pewnego momentu. (odwrotnie jest oczywiste)

$a \in \bar{A}$ wtw $\forall_{\varepsilon} K(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ale dla $\varepsilon < 1$

$\emptyset \neq K(a,\varepsilon) \cap A = \{a\} \cap A$ wtw $a \in A \Rightarrow \bar{A} \subset A$ o

słowo $A \subset \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$. $\text{Brzeg} = \bar{A} \setminus \text{Int} A = \emptyset$.

7. Niech (X, d_1), (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi. d_1 i d_2 nazywamy równoważnymi jeśli określają tę samą zbieżność tzn

$\forall_{(x_n)}$ $d_1(x_n, g) \to 0$ wtw $d_2(x_n, g) \to 0$. (Przechodniość!)

Niech (X_1, d_1), (X_2, d_2) będą p. metr. Udowodnić że metryki $\rho_1 = d_1 + d_2$, $\rho_2 = \max\{d_1, d_2\}$ i $\rho_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ są równoważne na $X_1 \times X_2$

Łatwo dowieść, że ρ_i, $i = 1,2,3$ są metrykami.

Mamy
$$\rho_1 = d_1 + d_2 \leq \max\{d_1, d_2\} + \max\{d_1, d_2\} \leq 2\max\{d_1, d_2\} = 2\rho_2$$

Z drugiej strony
$$\max\{d_1, d_2\} \leq \max\{d_1 + d_2, d_1 + d_2\} = d_1 + d_2 = \rho_1$$

Również,
$$\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2} = d_1 + d_2$$

oraz
$$(d_1 + d_2)^2 \leq d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \leq 2(d_1^2 + d_2^2)$$
(z $(d_1 - d_2)^2 \geq 0 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1 d_2$)

zatem
$$\rho_3 \leq \rho_1 \leq \sqrt{2}\rho_3$$

Czyli $(x_n, y_n) \to (x, y)$ w ρ_3, ρ_2, ρ_1 wtw gdy $x_n \to x$ w d_1 i $y_n \to y$ w d_2