Topologia przestrzeni metrycznych ćw 2.

Zad 1. Ciągłość metryki.

Udowodnić, że

$$\forall_{x,y,z,w\in X} \quad |d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$$

$\Rightarrow$ $d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(y,w)$ z symetrii

$$d(z,w) \leq d(z,x) + d(x,w) \leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,w)$$

$\Rightarrow$ $d(z,w) - d(x,y) \leq d(z,x) + d(y,w)$

$\Rightarrow$ $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$ z symetrii

Zadanie 2. Metryka indukowana. Jeśli $Y \subset X$ zaś (X,d) jest przestrzenią metryczną, to $d_Y = d|_{Y\times Y}$ jest metryką na Y.

a) Opisać $K_Y(x,r)$, $\overline{K}_Y(x,r)$, $S_Y(x,r)$, $x\in Y$ $r>0$ względem d_Y. W szczególności, niech $X = \mathbb{R}^2$ zaś $Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$. Naszkicować $K_Y(\underline{0},1)$, $K_Y(\underline{0},1.1)$, $K_Y((1,1),1)$, $K_Y((1,1),2.5)$ gdy d jest metryką euklidesową i gdy d jest metryką $d(\underline{x},\underline{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$.

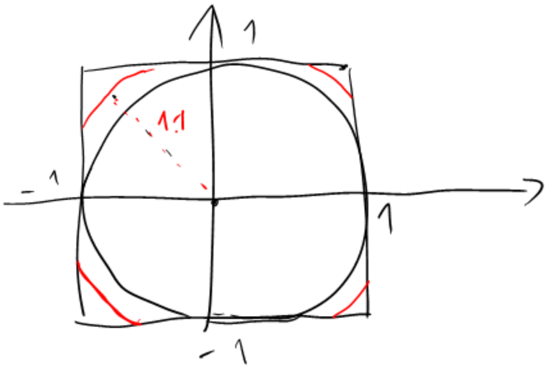
b) Skonstruować przykład przestrzeni metrycznej w której kula o większym promieniu zawiera się w kuli o promieniu mniejszym

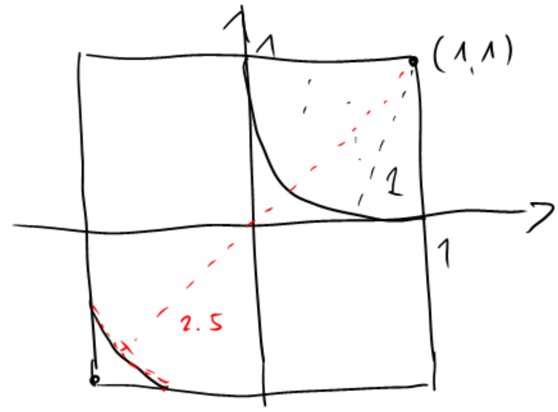
c) Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni ℓ^∞ składającą się z ciągów zero-jedynkowych. Metryka w l^∞ jest zadane wzorem $d(\underline{x},\underline{y}) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|$, gdzie $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots)$.

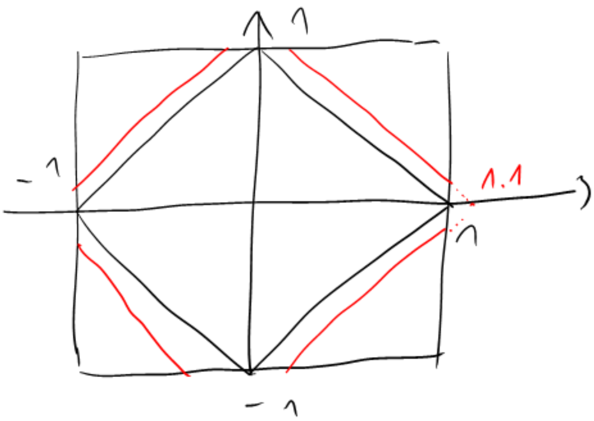
Opisać $d|_Y$.

Rozw. $K_Y(x,r) = \{y \in Y;\ d_Y(x,y) < r\} = Y \cap K(x,r)$

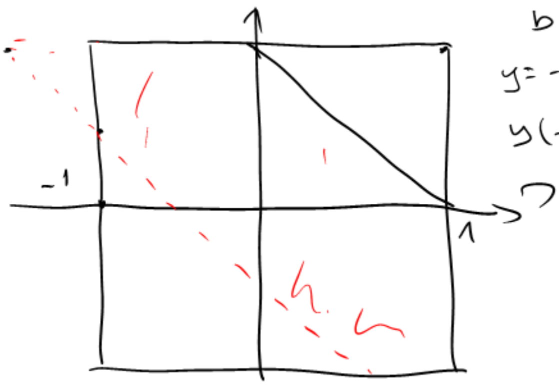
etc



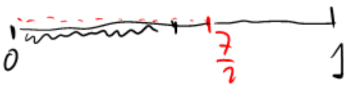




$1 = +1.5 + b \Rightarrow$
$b = -0.5$
$y = -x - 0.5$
$y(-1) = 0.5$



b)



$\Rightarrow$ $X = \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x - y|$

$Y = [0,1]$ z metryką indukowaną

$K(0, \frac{1}{2}) = [0, \frac{1}{2})$

$K(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) = [0, \frac{7}{12})$

c) $\underline{x} = (0, 1, \dots 1, 0 \dots)$

$\underline{y} = (1, 1, 0 \dots\dots 0, 1 \dots)$

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} \neq \underline{y} \\ 0 & \underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

gdyż różnice mogą być tylko 0, -1 lub 1

Zadanie 3. Udowodnić, że kule otwarte w p. metrycznej (X,d) jest zbiorem otwartym.

$K(x,r) = \{ y \in X; \quad d(x,y) < r \}$. Niech $z \in K(x,r)$, czyli $d(x,z) = r_1 = r - \varepsilon$. Rozważmy $K(z,\delta)$ gdzie $\delta = \frac{r-r_1}{2}$ i $v \in K(z,\delta)$. Mamy

$$d(v,x) \leq d(v,z) + d(z,x) < \frac{r-r_1}{2} + r_1 = \frac{\varepsilon}{2} + r - \varepsilon$$

$$= r - \frac{\varepsilon}{2} < r \quad \Rightarrow \quad v \in K(x,r).$$