Topologie przestrzeni metrycznych, ćw 1.

1. Metryka dyskretna. Zdefiniujmy na dow. zbiorze X

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad x,y \in X$$

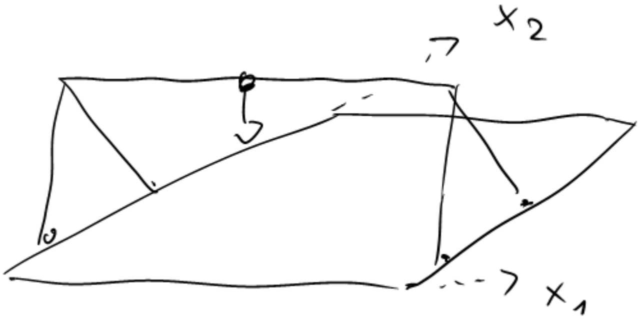
a) $d(x,y) \geq 0$ b) $d(x,x) = 0$ & $d(x,y) = 0$ $\Rightarrow x = y$ z def. c) $d(x,y) = d(y,x)$ z def

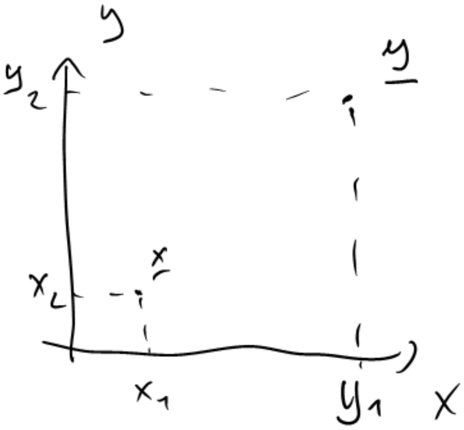
Nierówność trójkąta

(i) $x=y$ $0 = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dla dow z (punkt a)

(ii) $x \neq y$ $1 = d(x,y) = \begin{cases} 0 + 1 & \text{jeśli } z = x \ (\text{i } z \neq y) \\ 1 + 0 & \text{jeśli } z = y \ (\text{i } z \neq x) \\ 1 + 1 & \text{jeśli } z \neq x, y \end{cases}$

2. Metryki w magazynie





$d(\underline{x},\underline{y})$ = min. czas przetransportowania towaru z punktu $\underline{x}$ do $\underline{y}$

a) suwnica w danym momencie może przesuwać się tylko w jednym kierunku ze stałą prędkością V_x, V_y, odp.

b) suwnica przesuwa się w obu kierunkach z prędkościami V_x, V_y

c) w przyp. a) uwzględniamy przyspieszenie a_x, a_y przy czym suwnica nie osiąga max prędkości. (Hamowanie odbywa się z tym samym przysp.)

ad a) Zaczynając z $\underline{x} = (x_1, x_2)$ suwnica przesunie się najpierw do $\underline{x}' = (y_1, x_2)$, następnie do $\underline{y} = (y_1, y_2)$

$$d_a(\underline{x},\underline{y}) = t(\underline{x},\underline{y}) = t(\underline{x},\underline{x}') + t(\underline{x}',\underline{y}) = \frac{|y_1 - x_1|}{V_x} + \frac{|y_2 - y_1|}{V_y}$$

ad b) Z $\underline{x}$ suwnica i dźwig przesuwają się równocześnie dopóki w jednym kierunku nie osiągnie poziomu punktu docelowego

$$d_b(\underline{x},\underline{y}) = t(\underline{x},\underline{y}) = \max\{t(\underline{x},x'), t(\underline{x}',\underline{y})\}$$
$$= \max\left\{\frac{|y_1-x_1|}{v_x}, \frac{|x_2-y_2|}{v_y}\right\}$$

c) Ponieważ suwnica nie osiąga prędkości maksymalnej, przyspiesza do połowy, po czym hamuje

$$d_c(\underline{x},\underline{y}) = t(\underline{x},\underline{y}) = t(\underline{x},\underline{x}') + t(\underline{x}',\underline{y}) = 2\sqrt{\frac{|y_1-x_1|}{a_x}} + 2\sqrt{\frac{|x_2-y_2|}{a_y}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} s = \frac{1}{2}at^2 \\ t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \end{array}\right\}$$

Czy są to metryki?

$d_a(\underline{x},\underline{y})$ – wynika z własciwości wartości bezwzględnej

$d_b(\underline{x},\underline{y})$: (i) $d_b(\underline{x},\underline{y}) \geq 0$, (ii) $d_b(\underline{x},\underline{y}) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{|y_1-x_1|}{v_x} = 0 \quad i \quad \frac{|x_2-y_2|}{v_y} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}$$

$$d_b(\underline{x},\underline{y}) = \max\left\{\frac{|y_1-x_1|}{v_x}, \frac{|x_2-y_2|}{v_y}\right\}$$
$$\leq \max\left\{\frac{|x_1-z_1+z_1-y_1|}{v_x}, \frac{|x_2-z_2+z_2-y_2|}{v_y}\right\}$$
$$\leq \max\left\{\frac{|x_1-z_1|}{v_x} + \frac{|z_1-y_1|}{v_x}, \frac{|x_2-z_2|}{v_y} + \frac{|z_2-y_2|}{v_y}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \max\{a+b, c+d\} \\ \leq \max\{a,c\} + \max\{b,d\} \end{array}\right\} \leq d_b(\underline{x},\underline{z}) + d_b(\underline{z},\underline{y})$$

$d_c(\underline{x},\underline{y})$: nierówność trójkąta wynika z

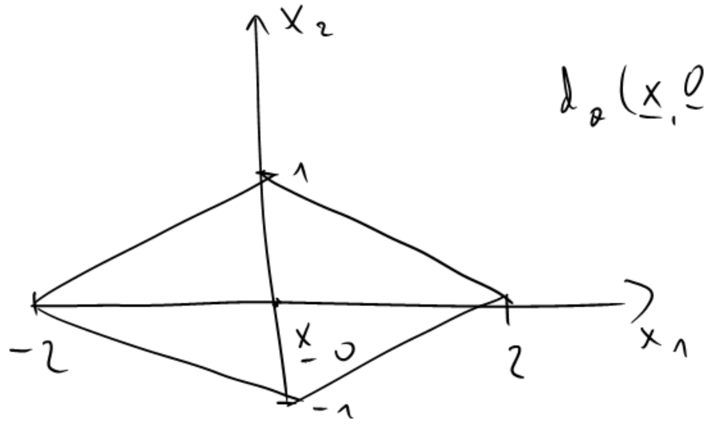
$$\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{|a-c|+|c-d|} \quad i$$

$$\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \{\alpha+\beta \leq \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\}$$

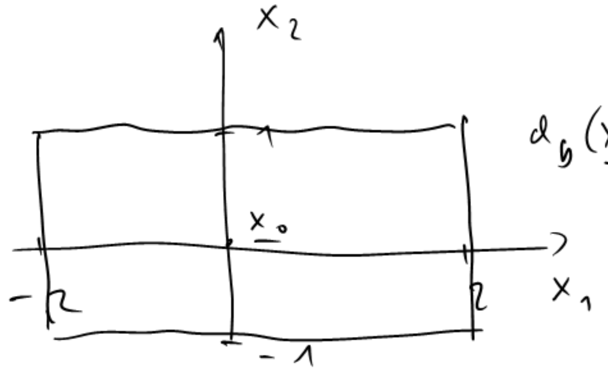
Naszkicować zbiory punktów spełniających warunek

$d_a(\underline{x}_0, \underline{x}) = 1$, $d_b(x_0, x) = 1$ $(v_x = 2, v_y = 1)$

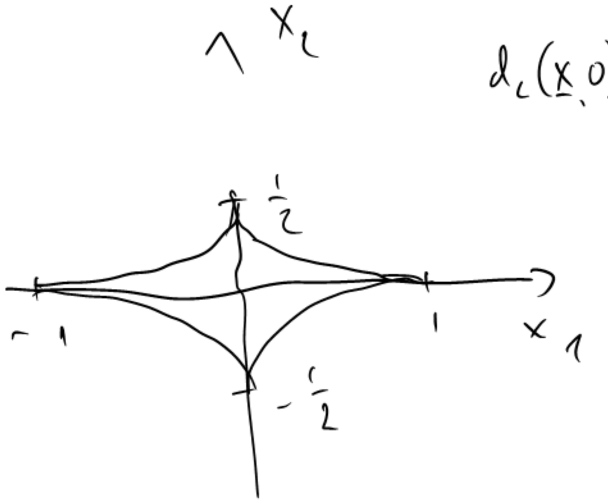
$d_c(\underline{x}_0, x) = 1$ $(a_x = 4, v_y = 1)$



$$d_a(\underline{x},\underline{0}) = \frac{|x_1|}{2} + |x_2| = 1$$



$$d_b(\underline{x},\underline{0}) = \max\left\{\frac{|x_1|}{2}, |x_2|\right\} = 1$$



$$d_c(\underline{x},0) = \sqrt{|x_1|} + 2\sqrt{|x_2|} = 1$$

Let $x_1, x_2 > 0$

$$\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} = 1$$

$$F(x_1, x_2) = 1$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\frac{dx_2}{dx_1}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} \qquad x_2 \neq 0,\ x_1 \neq 0$$

3. Dowieść, że warunek symetrii i trójkąta może być zastąpiony przez jeden warunek

$$\forall_{x,y,z}\quad d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$$

Mamy $d(x,y) \le d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$

$d(y,x) \le d(y,y) + d(x,y) = d(x,y)$

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

Zwykły warunek △ wynika z powyższej symetrii

4. Niech $f(t) = \frac{t}{1+t}$ $\quad t \geq 0$

Dowieść, że $d'(x,y) = f(d(x,y))$

jest metryką na zbiorze X jeśli d jest metryką na X.

(i) $f(d(x,y)) \geqslant 0$

(ii) $f(d(x,y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(iii) oczywiste

(iv) $f(t) = \frac{t}{1+t}$ jest funkcją rosnącą

$$d'(x,y) = f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y)) =$$

$$\frac{d(x,z) + d(z,x)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + \ldots\ldots}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} = d'(x,z) + d'(z,y)$$

Czy wynik powyższy jest prawdziwy dla dow. funkcji ściśle monotonicznej f spełniającej $f(0) = 0$

Rozważmy $f(t) = t^2 \quad t \geqslant 0 \qquad X = \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x - y|$

$d'(x,y) = |x-y|^2$. Warunek Δ jest równoważny

$$\forall_{x,y,z} \; -xy \leqslant z^2 - z(x+y) \iff z^2 - z(x+y) + xy \geqslant 0$$

Ale $\Delta = (x+y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 > 0$ dla $x \neq y$ i zawsze istnieje wtedy z dla którego nierówność Δ nie zachodzi.