Note Title 2/27/2009

Ćwiczenia z Równań Różniczkowych Zwyczajnych

Ćwiczenia 1

1. Przykłady zastosowań równania wzrostu wykładniczego

a) nieograniczony wzrost populacji

$$p' = ap$$

(a – wsp. wzrostu netto, p – liczba osobników (uciąglona))

b) rozpad promieniotwórczy

$$N' = -kN$$

N – liczba jąder

c) wchłanianie substancji

$$C' = -\mu C$$

C – stężenie substancji

b) chłodzenie (prawo Newtona)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

T - temperatura obiektu, T_m - temperatura otoczenia.

c) rozpuszczanie substancji

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x)$$

x stężenie, P - stężenie roztworu nasyconego

Zadanie 1 W próbce węglowego drewna odkrytej w 2003 w jaskini stosunek C^{14}/C^{12} wynosił 14.5% wartości standardowej. Oszacować, kiedy drzewo to zostało ścięte. Przyjąć, że okres połowicznego rozpadu C^{14} wynosi 5730 lat.

Ilość C^{12} w próbce nie ulega zmianie, czyli

$$\frac{N_{C^{14}}(2003)}{N_{C^{12}}(2003)} = 0.145\,\frac{N_{C^{14}}(t_0)}{N_{C^{12}}(t_0)} = 0.145\,\frac{N_{C^{14}}(t_0)}{N_{C^{12}}(2003)}$$

Stąd $\dfrac{N_{C^{14}}(2003)}{N_{C^{14}}(t_0)} = 0.145$

Zatem, skoro $N_{C^{14}}(2003) = N_{C^{14}}(t_0)\,e^{-r(2003-t_0)}$,

$$0.145 = e^{-r(2003-t_0)} = e^{-\frac{\ln 2}{5730}(2003-t_0)}$$

i $\ln 0{,}145 = -\dfrac{\ln 2}{5730}(2003-t_0)$

$$t_0 = 2003 + \frac{5730}{\ln 2}\ln 0.145$$

Zadanie 2. Staw rybny był zarybiony w latach 1979 i 1981. Łącznie opuszczono do niego 435 karpii. W 1999 odłowiono 300 ton karpia. Ponieważ wzrost był tak szybki, i można założyć, że jest opisywany równaniem $\frac{dp}{dt} = rp$, gdzie p jest liczbą ryb w stawie w chwili t. Zakładając, że karp waży przeciętnie 1.5 kg i odłowiono ok 10% populacji, oszacować współczynnik r.

Rozwiązanie. Niech t będzie mierzone w latach

$$p(t) = p(t_0)\, e^{r(t-t_0)}$$

p_0, p_1 - liczba kopii opuszczonych w, odp 1979 i 1981

Wówczas dla $t > 1981$

$$p(t) = \left(p_0 e^{r(1981-1979)} + p_1\right) e^{r(t-1981)} = p_0 e^{r(t-1979)} + p_1 e^{r(t-1981)}$$

$$p(1999) = p_0 e^{r20} + p_1 e^{r18}$$

$$(p_0+p_1)e^{r18} \leq p_0 e^{r20} + p_1 e^{r18} \leq (p_0+p_1)e^{r20}$$

$$\frac{1}{20} \ln \frac{p(1999)}{p_0+p_1} \leq r \leq \frac{1}{18} \ln \frac{p(1999)}{p_0+p_1}$$

$$p(1999) = \frac{300000}{1.5} \cdot 10 = 2000000$$

Zadanie 3 Rozważmy jezioro położone przy uprzemysłowionym mieście. Miasto pompuje ścieki ze stałą prędkością P_1 $m^3/dzień$. Stężenie substancji toksycznych w ściekach jest znane i wynosi c_1 (stała). Ponadto rzeka zasila jezioro stałym dopływem R_1 $\frac{m^3}{dzień}$, a inna rzeka wypływa z jeziora z prędkością P_2 $\frac{m^3}{dzień}$.

a) Znaleźć równanie różniczkowe opisujące stężenie zanieczyszczeń w wodzie jeziora przyjmując, że ilość wody w jeziorze jest stała.

Stała ilość wody $\quad R_1 + P_1 = P_2$

Stężenie $\quad c = \frac{\text{ilość zanieczyszczeń w j.}}{V} = \frac{z}{V}$

Zmiana Z w jednostce czasu

$$Z(t+\Delta t) - Z(t) = \text{dopływ z miasta} - \text{odpływ z rzeki}$$

$$= c_1 P_1 \Delta t - c P_2 \Delta t$$

$$Z' = -cP_2 + c_1 P_1$$

$$c' = -c\frac{P_2}{V} + \frac{c_1 P_1}{V}$$

b) Rozwiązać równanie i opisać stężenie dla dużych czasów

Jest to równanie liniowe które rozwiążemy uzmienniając stałą

$$\bar{c}' = -\bar{c}\frac{P_2}{V} \quad \Rightarrow \quad \bar{c} = Ke^{-\frac{P_2}{V}t}$$

$$c(t) = K(t)e^{-\frac{P_2}{V}t} \qquad c' = K'e^{-\frac{P_2}{V}t} - \frac{P_2}{V}c$$

$$K' e^{-\frac{P_2}{V} t} - \cancel{\frac{P_2}{V}} C = - \cancel{\frac{P_2}{V}} C + \frac{c_1 P_1}{V}$$

$$K' = \frac{c_1 P_1}{V} e^{\frac{P_2}{V} t} \qquad K(t) = K_1 + \frac{c_1 P_1}{P_2} e^{\frac{P_2}{V} t}$$

$$c(t) = K_1 e^{-\frac{P_2}{V} t} + \frac{c_1 P_1}{P_2}$$

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \frac{c_1 P_1}{P_2}$$

Note Title 2/26/2009

1 Znaleźć rozwiązanie ogólne następujących równań

a) $x' = 2tx$

$x \equiv 0$ jest rozwiązaniem $\Rightarrow$ zakładamy $x \neq 0$

Równanie jest równoważne (tu Picarda!)

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|x| = 2t \Rightarrow$$

$$\ln|x| = 2t + C \Rightarrow |x| = e^{2t+C} = e^{C}e^{2t} = C'e^{2t}$$

$C' > 0$ Ale również $-x = C'e^{2t} \Rightarrow x = -C'e^{2t}$

i można przyjąć $x(t) = C''e^{2t}$ $C'' \neq 0$. $x(t) \equiv 0$

jest rozwiązaniem $\Rightarrow$ $x(t) = C'''e^{2t}$ $C''' \in \mathbb{R}$

b) $x' = e^x e^t \Rightarrow e^{-x} x' = e^t \Rightarrow -\frac{d}{dt} e^{-x} = e^t$

$-e^{-x} = e^t - C \Rightarrow e^{-x} = C - e^t \Rightarrow C - e^t > 0$

$e^t < C \quad C > 0 \Rightarrow t < \ln C$

$-x = \ln(C - e^t) \Rightarrow x = \ln \frac{1}{C - e^t} \quad t < \ln C$

c) $x' = \frac{x \sin t}{\ln x \cos^2 t} \quad x > 0 \quad x \neq 1$

$t \neq \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\frac{\ln x}{x} x' = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln^2 x = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos t} + C\right)$

$\ln^2 x = \frac{1}{\cos t} + C \quad \frac{1}{\cos t} + C > 0$

$\ln x = \sqrt{\frac{1}{\cos t} + C} \quad 1 < x$

$\ln x = -\sqrt{\frac{1}{\cos t} + C} \quad 0 < x < 1$

d)

$$x' = \sin(x - t) \qquad u = x - t \qquad u' = x' - 1$$

$$\sin(x-t) = \sin x \cos t - \sin t \cos x$$

$$u' + 1 = \sin u \Rightarrow u' = \sin u - 1$$

$$2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2} - \cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2} = -\left(\cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right)^2 =$$

$$= -\cos^2\frac{u}{2}\left(1 - \tan\frac{u}{2}\right)^2, \quad u \neq \pi + k\pi$$

Założymy, że $\pi < u < \frac{\pi}{2}$

$$-\int \frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}\left(1 - \tan\frac{u}{2}\right)^2} = t + C$$

przy założeniu $\sin u \neq 1$, $u \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \neq t + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = t + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ są rozwiązaniami

$z > 0$

$$z = 1 - \tan\frac{u}{2} \qquad \frac{dz}{du} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

Uwaga! Możemy wypatrywać u z innych przedziałów

$$2\int \frac{dz}{z^2} = t + C$$

$$-\frac{2}{z} = t + C \qquad z = -\frac{2}{t+C} \qquad t \neq -C$$

$$1 - \tan\frac{u}{2} = -\frac{2}{t+C} \Rightarrow \tan\frac{u}{2} = \frac{2+t+C}{t+C}$$

dla $t < C$, $z > 0$

$$\frac{u}{2} = \tan^{-1}\frac{2+t+C}{t+C} \Rightarrow x = t + 2\tan^{-1}\frac{2+t+C}{t+C}$$

Dla $-\infty < t < -C$ mamy $-\pi < u < \frac{\pi}{2}$, dla $C < t < \infty \Rightarrow \frac{\pi}{2} < u < \pi$.

b) $x + t x' = 1 + t x \qquad t \neq 0$.

$$(tx)' = 1 + tx \qquad u = tx$$

$$u' = 1 + u$$

$u = -1$ $\left(x = -\frac{1}{t}\right)$ jest rozwiązaniem

Assuming $u \neq -1$ $\qquad \int \frac{du}{1+u} = t + C$

$$|1+u| = C' e^t \qquad C' > 0$$

$$1 + u = C'' e^t \qquad C' \neq 0$$

$u = -1$ jest rozwiązaniem więc można je włączyć dopuszczając $C'' = 0$

$$u = -1 + C''' e^t \qquad C''' \in R$$

$$x = \frac{C''' e^t - 1}{t}$$

Znaleźć rozwiązanie ograniczone

5. $x' - x = \cos t - \sin t$

$$(xe^{-t})' = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$xe^{-t} = \int_0^t e^{-s}(\cos s - \sin s)\,ds + C$$

$$x(t) = e^{t}C + e^{t}\int_0^t e^{-s}(\cos s - \sin s)\,ds$$

$$(e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$x(t) = e^{t}C + e^{t}e^{-t}\sin t \Rightarrow$$

jedynym rozwiązaniem ograniczonym jest $x(t) = \sin t$

6. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

a) $x' = x \cdot \operatorname{ctg} t$ $\quad x \equiv 0$ nie jest rozwiązaniem

$x(\frac{\pi}{2}) \equiv 1$ $\quad t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

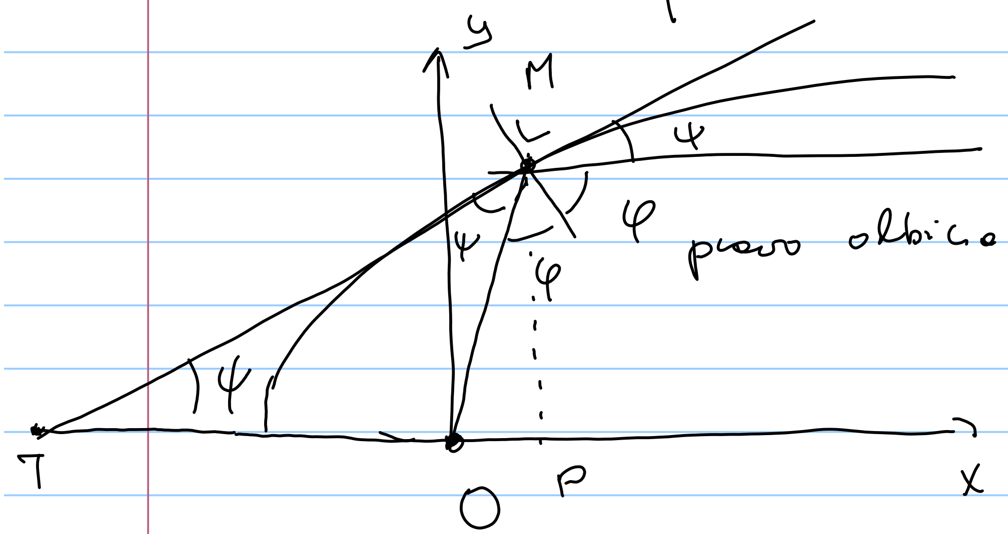
Załóż $x \neq 0$

$$\ln|x| = \int \operatorname{ctg} t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \ln|\sin t| + C$$

$$= \ln C' |\sin t|$$

$$x(t) = \sin t \qquad 0 < t < \pi$$

7. Znaleźć równanie opisujące kształt anteny satelitarnej. Rozważmy $y > 0$



ΔTOM jest równoramienny

$$\tan \sphericalangle OTM = \tan \sphericalangle OMT = \left.\frac{dy}{dx}\right|_M$$

Z drugiej strony

$$\tan \sphericalangle OTM = \frac{|MP|}{|PT|} =$$

$$= \frac{y}{|TO| \pm |OP|} = \frac{y}{|MO| + x}$$

(znak minus gdy P jest po lewej stronie O)

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$$

Zatem $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2} + x} = \frac{y}{|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1} =$

$$= \begin{cases} \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1} & \text{gdy } x > 0 \\ -\frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1} & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Rozważmy przypadek $x > 0$, $y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1} \quad := \quad z = \frac{y}{x}$$

$$y' = z'x + z \quad \Rightarrow \quad z'x + z = z \frac{1}{\sqrt{1+z^2} + 1}$$

$$z'x = \frac{-z\sqrt{1+z^2} - \cancel{z} + \cancel{z}}{\sqrt{1+z^2} + 1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z\sqrt{1+z^2}} \right) dz$$

$x, z > 0$

$$\ln Cx = -\ln z - \int \frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}\, dz$$

$$\int \frac{z\, dz}{z^2\sqrt{1+z^2}} \overset{u=z^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{1+u}} \overset{w=\sqrt{1+u} \quad w^2=1+u \quad du = 2w\,dw}{=}$$

$$= \int \frac{w\, dw}{(w^2-1)\, w} = \int \frac{dw}{w^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1} \right) dw$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left| \frac{w-1}{w+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt{1+u}+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u} = \ln\left(\sqrt{1+z^2}-1\right) - \ln z$$

$$\ln Cx = -\ln\left(\sqrt{1+z^2}-1\right) \Rightarrow Cx = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+z^2} = x + C' \Rightarrow \cancel{x^2} + y^2 = (x+C')^2 = \cancel{x^2} + 2xC' + C'$$

Rodzina poziomych parabol.