Ćwiczenia z Równań Różniczkowych Cząstk.

Note Title 3/9/2009

3

Zadanie 1 Omówić rozwiązalność problemu

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$$

z warunkami a) $u(x,x) = 2x$

b) $u(x, 2x-1) = 0$

c) $u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4y}$

Znajdźmy rozwiązanie ogólne. Równanie charakterystyczne

$x' = 1$

$y' = 2$

$\tilde{u}' = 4\tilde{u} + e^{x+y}$ (pamiętaj, x, y są funkcjami t)

Otrzymujemy $x - t = \xi_1$

$y - 2t = \xi_2$

Czyli $\tilde{u}' = 4\tilde{u} + e^{3t+\xi_1+\xi_2}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-4t}\tilde{u}\right) = e^{-t+\xi_1+\xi_2}$$

$$e^{-4t}\tilde{u} = -e^{-t+\xi_1+\xi_2} + \xi_3$$

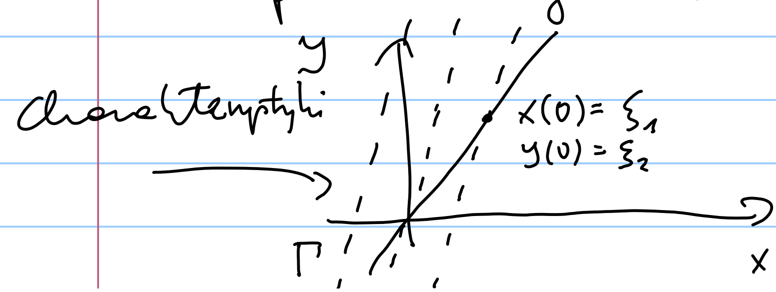
$$\tilde{u} = -e^{3t+\xi_1+\xi_2} + e^{4t}\xi_3$$

Czyli:

$$\begin{cases} x = t + \xi_1 \\ y = 2t + \xi_2 \\ \tilde{u} = e^{4t}\xi_3 - e^{3t+\xi_1+\xi_2} \end{cases}$$

jest rozwiązaniem naszego zagadnienia w postaci parametrycznej.

Rozważmy problem a) Krzywa początkowa jest dana parametrycznie $\Gamma = \{(s, s), s \in \mathbb{R}\}$



Warunek początkowy

$(x(0), y(0)) \in \Gamma$ czyli $\xi_1 = \xi_2$

Zatem $\tilde{u}(t) = e^{4t}\xi_3 - e^{3t+2\xi_1}$

i $u(x,x) = \tilde{u}(0) = \xi_3 - e^{2\xi_1} = 2\xi_1$

$\parallel$

$2x$

Stąd $\xi_3 = e^{2\xi_1} + 2\xi_1$

i
$$\tilde{u}(t) = \left(e^{2\xi_1} + 2\xi_1\right)e^{4t} - e^{3t+2\xi_1}$$

Musimy zapisać ten wynik w zmiennych x, y

Mamy $3t + 2\xi_1 = x+y$ (pamiętamy, że $\xi_1 = \xi_2$)

Dalej: $x = t + \xi_1$, $y = 2t + \xi_1$ $\Rightarrow$ $y - x = t$, $2x - y = \xi_1$

zatem
$$u(x,y) = \left(e^{4x-2y} + 4x - 2y\right)e^{4y-4x} - e^{x+y}$$

$$= e^{2y} + 2(2x-y)e^{4(y-x)} - e^{x+y}$$

b) Rozważmy teraz warunek początkowy na $y = 2x - 1$ $\Gamma = \{(s, 2s-1) ; s \in \mathbb{R}\}$

i charakterystyki dla $t = 0$ muszą spełniać

$(x(0), y(0)) \in \Gamma \Rightarrow (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma \Rightarrow$

$\xi_2 = 2\xi_1 - 1$

Zatem $0 = \tilde{u}(0) = \xi_3 - e^{2\xi_1}$

czyli $\xi_3 = e^{2\xi_1}$ i

$\tilde{u}(t) = e^{2\xi_1} e^{4t} - e^{3t+\xi_1+\xi_2} = e^{2\xi_1+4t} - e^{3t+3\xi_1-1}$

i porównujemy wyrazić współczynniki za pomocą x, y

Ale $\begin{array}{l} x = t + \xi_1 \\ y = 2t + 2\xi_1 - 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t + \xi_1 = x \\ t + \xi_1 = \frac{1}{2}(y+1) \end{array}$

i układ nie jest rozwiązalny chyba, że $x = \frac{1}{2}(y+1)$

c) Czasami warunek początkowy spełnia warunek zgodności umożliwiający rozwiązanie; jest wtedy ono niejednoznaczne. Rozważmy

$u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}$

Charakterystyki

$$\begin{aligned} x &= t + \xi_1 \\ y &= 2t + \xi_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} t=0 & x = \xi_1 \\ & y = \xi_2 \end{matrix} \Rightarrow \xi_2 = 2\xi_1$$

$$\tilde{u}(0) = \xi_3 - e^{3\xi_1} = e^{4\xi_1} - e^{3\xi_1}$$

$$\Rightarrow \xi_3 = e^{4\xi_1}$$

$$\tilde{u}(t) = e^{4\xi_1 + 4t} - e^{3t + \xi_1 + \xi_2} =$$

$$= e^{4x} - e^{x+y} = e^{2y} - e^{x+y}$$

Ogólnie, możemy zapisać, że

$$t + \xi_1 = \frac{\alpha x + \frac{\beta}{2} y}{\alpha + \beta}$$ α, β są dowolnymi funkcjami (x,y)

$$u(x,y) = e^{\frac{4\alpha x + 2\beta y}{\alpha+\beta}} - e^{x+y}.$$

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$u_t + u u_x = -u \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = -\frac{x}{2}$$

Piszemy układ charakterystyczny

$$t' = 1 \qquad\qquad t = \theta + \xi_1 \qquad x(\theta) = \xi_3 - \xi_2 e^{-\theta}$$

$$x' = u \qquad \text{skąd}$$

$$\tilde{u}' = -\tilde{u} \qquad\qquad \tilde{u} = \xi_2 e^{-\theta}$$

Dla charakterystyk dla $\theta = 0 \Rightarrow t = 0$

Czyli $\xi_1 = 0$ i $t = \theta$

Warunek początkowy $\theta = 0$

$$x(0) = \xi_3 - \xi_2$$

$$\tilde{u}(0) = \xi_2 = -\frac{x(0)}{2} = -\frac{\xi_3 - \xi_2}{2}$$

Zatem $2\xi_2 = -\xi_3 + \xi_2$

$$\xi_2 = -\xi_3$$

Mamy więc układ uwikłany

$$x(\theta) = \xi_3\left(e^{-\theta} + 1\right)$$

$$\tilde{u}(\theta) = -\xi_3 e^{-\theta} \qquad \theta = t$$

Eliminując θ i ξ_3 otrzymujemy

$$\frac{\tilde{u}(t)}{x(t)} = -\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \Rightarrow u(x,t) = -\frac{xe^{-t}}{1+e^{-t}}$$

istnieje dla wszystkich t.

Zadanie 3. Czy rozwiązanie dla $u_t + u u_x = u$
$u(x,0) = -2x$ jest określone dla wszystkich czasów

Mamy podobny układ charakterystyczny:

$$\theta = t, \quad \xi_1 = 0$$
$$x(\theta) = \xi_3 + \xi_2 e^{\theta}$$
$$\tilde{u}(\theta) = \xi_2 e^{\theta}$$

ale dla $\theta = 0$ $\quad x(0) = \xi_3 + \xi_2$

$$\tilde{u}(0) = \xi_2 = -2(\xi_3 + \xi_2)$$

Stąd $\xi_3 = -\frac{3}{2}\xi_2$

$$\tilde{u}(\theta) = \xi_2 e^{\theta}$$

$$x(\theta) = -\frac{3}{2}\xi_2 + \xi_2 e^{\theta}, \quad \theta = t$$

$$\frac{u}{x} = \frac{e^t}{-\frac{3}{2} + e^t} \Rightarrow u = -\frac{2xe^t}{-3+2e^t}$$

Rozwiązanie istnieje dla $t < \ln\frac{3}{2}$.