Ćwiczenie z Równań Różniczkowych Cząstkowych

Note Title 3/4/2009

Ćwiczenie 2.

Zadanie 1. Znaleźć całki pierwsze układów:

a) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \dfrac{z}{(z-y)^2} \\ z' = \dfrac{y}{(z-y)^2} \end{cases}$

a) Mnożąc pierwsze równanie przez x_1 i drugie przez x_2 i dodając, otrzymujemy

$$x_1 x_1' + x_2 x_2' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x_1^2)' + \frac{1}{2}(x_2^2)' = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = C \Rightarrow \psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

b) Poszukujemy dwóch całek pierwszych.

Układ się rozprzęga

$z \neq y$ $\quad \frac{1}{2}(y^2)' - \frac{1}{2}(z^2)' = 0 \Rightarrow$

$$\psi_1(x, y, z) = y^2 - z^2$$

Aby znaleźć drugą całkę pierwszą, odejmujemy (2) od (3). Otrzymamy

$$(z-y)' = \frac{y-z}{(z-y)^2} = -\frac{1}{z-y}$$

Czyli $1 = -(z-y)(z-y)' = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z-y)^2$

oraz $1 = \frac{d}{dt}x$

Zatem $\frac{d}{dt}\left(x + \frac{1}{2}(z-y)^2\right) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi_2(x,y,z) = x + \frac{1}{2}(z-y)^2$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie rozwiązanie równań

a) $(z-y)u_x + (x-z)u_y + (y-x)u_z = 0$

b) $xu_x + 2yu_y + 3zu_z = 0$

c) $u_x - (y+2z)u_y + (3y+4z)u_z = 0$

ze pomocą całek pierwszych lub metody parametrycznej

a) Układ charakterystyczny

$x' = z-y, \quad y' = x-z, \quad z' = y-x$

Otrzymujemy $(x+y+z)' = 0 \Rightarrow \psi_1(x,y,z) = x+y+z$

oraz $xx' + yy' + zz' = 0 \Rightarrow \psi_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$x,y,z \neq 0$

Zatem rozwiązanie ogólne $u(x,y,z) = F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$

$F \in C^1$. Uwaga! Układ $\psi_1(x,y,z) = x+y+z$, $\psi_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ nie jest niezależny na prostej $x=y=z$.

b) Układ charakterystyczny

$$x' = x, \quad y' = 2y, \quad z' = 3z$$

b1) Całki pierwsze

$$\frac{d}{dt}\ln|x| = \frac{d}{dt}\ln|y|^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln|x|/|y|^{\frac{1}{2}} = C \Rightarrow x^2 y^{-1} = C'$$

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_1(x,y,z) = x^{-2}y & x \neq 0 \\ \text{Podobnie } x^{-3}z = \psi_2(x,y,z), & x \neq 0 \end{array}\right\} \text{bo } \begin{array}{l} \psi_1' \neq 0 \\ \psi_2' \neq 0 \end{array}$$

b2) Metoda parametryczna

$x(t) = C_1 e^{t} \quad y(t) = C_2 e^{2t}, \quad z(t) = C_3 e^{3t}$

$\Rightarrow \quad y = C_2 x^2 \quad z = C_3 x^3$

Tak samo $\quad \psi_1(x,y,z) = x^{-2} y$

$\psi_2(x,y,z) = x^{-3} z$

Rozwiązanie ogólne

$$u(x,y,z) = F\left(x^{-2} y, \ x^{-3} z\right) \quad x \neq 0$$

c) Układ charakterystyczny

$x' = 1, \quad y' = -y - 2z, \quad z' = 3y + 4z$

c1) Całki pierwsze: Mnożymy (2) przez 3 i (3) przez 2

i dodajemy: $\quad x' = 1 \quad (3y+2z)' = 3y + 2z$

$3y+2z \neq 0$

cyli $\frac{d}{dt}\left(x - \ln|3y+2z|\right) = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{e^{x}}{3y+2z}\right| = C_1$

$(3y+2z)e^{-x} = C_1'$ $\Leftarrow$ określone wszędzie

Podobnie, dodając (2) i (3)

$(y+z)' = 2(y+z) \Rightarrow$

$(y+z)e^{-2x} = C_2$

Cyli rozwiązanie ogólne

$u(x,y,z) = F\left((3y+2z)e^{-x}, (y+z)e^{-2x}\right)$

Metoda parametryczna. Równania (2) i (3) nie zależą od x $\Rightarrow$ można je rozwiązać

$$\begin{aligned} y' &= -y-2z \\ z' &= 3y+4z \end{aligned} \Rightarrow \quad y'' = -y' - 2z' = -y' - 2(3y+4z) =$$

$$= -y' - 6y - 4(-y'-y) =$$

$= 3y' - 2y \implies y'' - 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 2, 1$

$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t}$

$z(t) = -\frac{1}{2}(y' + y) = -\frac{3}{2} C_1 e^{2t} - C_2 e^{t}$

skąd $\quad C_1 = 2(y+z)e^{-2t} = 2(y+z)e^{-2x}$

$\qquad\quad C_2 = (3y+2z)e^{-t} = (3y+2z)e^{-x}$

i rozwiązanie ogólne

$$u(x,y,z) = F\left(..(y+z)e^{-2x}, (3y+2z)e^{-x} \right)$$

Zadanie 3 a) Znaleźć rozwiązanie następującego zagadnienia początkowo brzegowego:

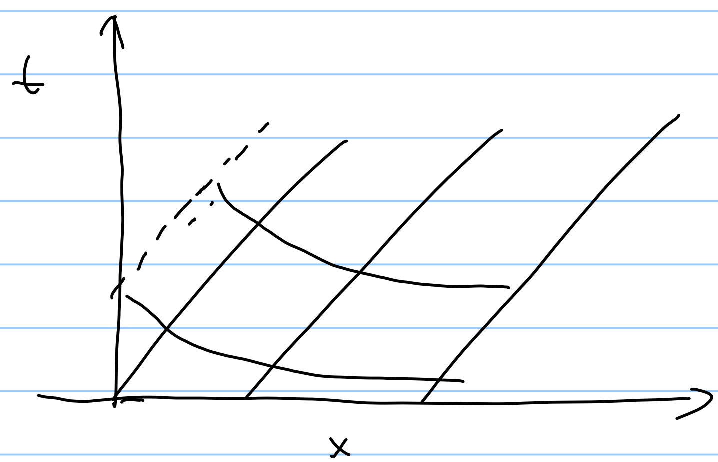
$u_t + 3u_x = 0 \qquad x>0 \quad t>0$

$u(x,0) = e^{-x} \qquad x>0$

$u(0,t) = \sin t + 1.$

Wyznaczyć wzór rozwiązanie dla $x=1$

Rozwiązanie ogólne $\quad u(x,t) = F(3t-x)$



$t = \frac{1}{3}x + C$

$u(x,0) = F(-x) = e^{-x}$

Podstawmy $-x = s$

$F(s) = e^{s} \quad$ dla $x>0$

czyli dla $s<0$. Zatem

$$u(x,t) = F(s) = F(3t-x) = e^{3t-x}$$

dla $3t-x<0 \Rightarrow x>3t$

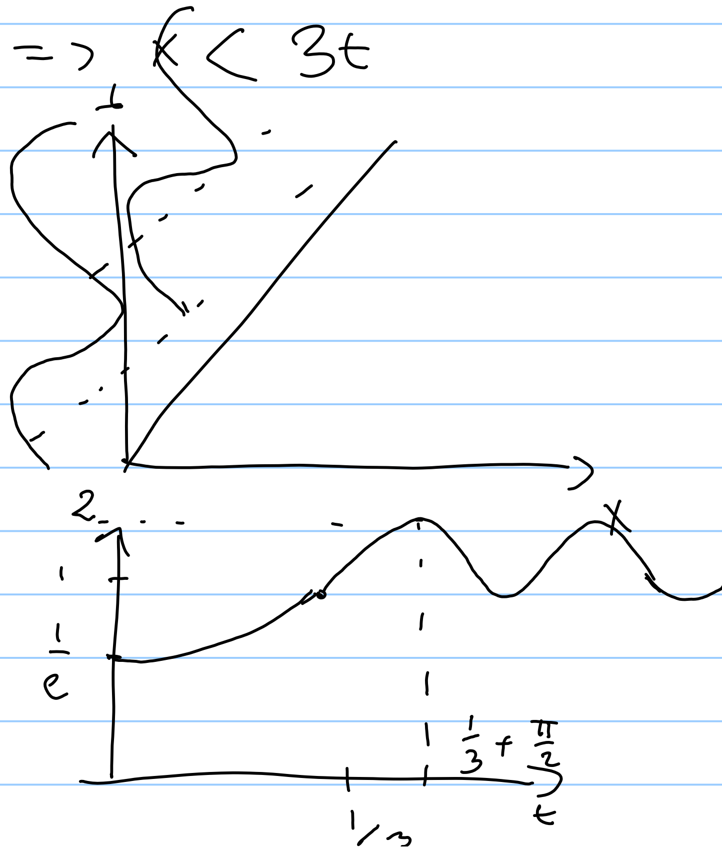
$t > 0$

$u(0,t) = F(3t) = \sin t \Rightarrow s = 3t$

$F(s) = 1 + \sin\frac{s}{3} \qquad s > 0$

$u(x,t) = 1 + \sin\frac{3t-x}{3} = 1 + \sin\left(t - \frac{x}{3}\right) \qquad t - \frac{x}{3} > 0$

$\Rightarrow x < 3t$

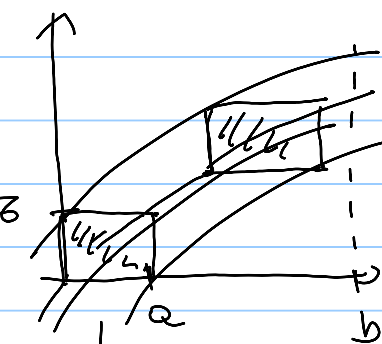


$x = 1$

$$u(1,t) = \begin{cases} e^{3t-1} & 0 \le t < \frac{1}{3} \\ 1 + \sin\left(t - \frac{1}{3}\right) & t > \end{cases}$$

Zadanie 4. Al-Kaida zaatakowała ładunek z gazem trującym na obszarze $(0, a)$. Czas trwania explozji był $(0, T)$. Nasz punkt obserwacyjny jest oddalony o b od O. Zakładając, że wiatr wieje od O w kierunku b z prędkością c, dodatkowo gaz wchodzi się dzieli eksplozji z prędkością e^{-x} i zaniedbujemy rozpraszanie się chmury gazowej, a) napisać równanie na stężenie gazu w punkcie x i chwili t.

b) Nie rozwiązując równania, określić kiedy gaz dotrze do naszego punktu i kiedy tlen gazu przesunie się poza punkt.



a) $$u_t + (c + e^{-x}) u_x = 0$$

b) Czas po którym gaz dotrze do b:

$$\int_a^b \frac{dx}{c+e^{-x}} = \int_0^{t_1} dt \Rightarrow t_1 = \frac{1}{c} \ln \frac{ce^b+1}{ce^a+1}$$

Czas po którym gaz znajdzie się poza

b: $\int_0^b \frac{dx}{c+e^{-x}} = \int_{\tau}^{t_2} dt \Rightarrow t_2 = \tau + \frac{1}{c}\ln\frac{ce^b+1}{c+1}$

Zadanie 5. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} u_x + u_y + u_z = u \\ u(x,y,0) = x^2+y^2 \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne

$$\begin{aligned} &\tilde{u}' = \tilde{u} \\ &x' = 1 \\ &y' = 1 \\ &z' = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x - t &= \bar{\xi}_1 \\ y - t &= \bar{\xi}_2 \\ z - t &= \bar{\xi}_3 \end{aligned} \Rightarrow$$

(charakterystyki zadane w sposób param.)

$t=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \bar{\xi}_3 = 0$

Powierzchnia początkowa $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, 0)$

$\tilde{u}(t) = Ce^{t} \qquad u(0) = Ce^{0} = C = \bar{\xi}_1^{2} + \bar{\xi}_2^{2}$

$\tilde{u}(t) = (\bar{\xi}_1^{2} + \bar{\xi}_2^{2})\, e^{t}$

$t = z \qquad x - z = \bar{\xi}_1, \; y - z = \bar{\xi}_2$

$u(x, y, z) = \left((x-z)^2 + (y-z)^2\right) e^{z}$

Cechy proste $\xi_1 = y - x$ $\xi_2 = z - x$

$u = C(\xi_1, \xi_2)e^x$

Rozwiązanie ogólne

$$u(x,y,z) = C(y-x, z-x)e^x$$

$$u(x,y,0) = C(y-x,-x)e^{-x} = x^2+y^2$$

$$C(y-x,-x) = e^x(x^2+y^2)$$

$s_1 = y-x$ $\Rightarrow$ $y = s_1 + x = s_1 - s_2$

$s_2 = -x$ $\qquad$ $x = -s_2$

Czyli $C(s_1, s_2) = e^{s_2}\left(s_2^2 + (s_1-s_2)^2\right)$

Zatem rozwiązanie równanie jest dane wzorem

$$u(x,y,z) = C(\underbrace{y-x}_{s_1}, \underbrace{z-x}_{s_2})e^x = e^{z-x}\left((z-x)^2 + (y-x-z+x)^2\right)e^x$$

$$= e^{z}\left((z-x)^2+(y-z)^2\right)$$