Ćwiczenie z Równań Różniczkowych Cząstkowych

Note Title 2/26/2009

Ćwiczenie 1. (Przypomnienie)

Załóżmy, że f, φ i ψ są funkcjami klasy $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Rozważmy funkcję

$$g(x,y) = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$$

Znaleźć $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ w zal. od pochodnych f, φ i ψ

Rozwiązanie: Mamy

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f_{,1}(\varphi(x,y), \psi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_{,2}(\varphi(x,y), \psi(x,y))\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f_{,1}(\varphi(x,y), \psi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_{,2}(\varphi(x,y), \psi(x,y))\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Zatem

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = f_{,11}(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + f_{,12}(\varphi,\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + f_{,1}(\varphi,\psi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$+ f_{,21}(\varphi,\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f_{,22}(\varphi,\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + f_{,2}(\varphi,\psi)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$= f_{,11}(\varphi,\psi)(\varphi_x)^2 + 2f_{,21}(\varphi,\psi)\varphi_x\psi_x + f_{,22}(\varphi,\psi)(\psi_x)^2$$

$$+ f_{,1}(\varphi,\psi)\varphi_{xx} + f_{,2}(\varphi,\psi)\psi_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = f_{,11}(\varphi,\psi)\varphi_x\varphi_y + f_{,12}(\varphi,\psi)\varphi_x\psi_y + f_{,1}(\varphi,\psi)\varphi_{xy}$$

$$+ f_{,21}(\varphi,\psi)\varphi_y\psi_x + f_{,22}(\varphi,\psi)\psi_x\psi_y + f_{,2}(\varphi,\psi)\psi_{xy}$$

$$= f_{,11}(\varphi,\psi)\varphi_x\varphi_y + f_{,12}(\varphi,\psi)(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + f_{,22}(\varphi,\psi)\psi_x\psi_y$$

$$+ f_{,1}(\varphi,\psi)\varphi_{xy} + f_{,2}(\varphi,\psi)\psi_{xy}$$

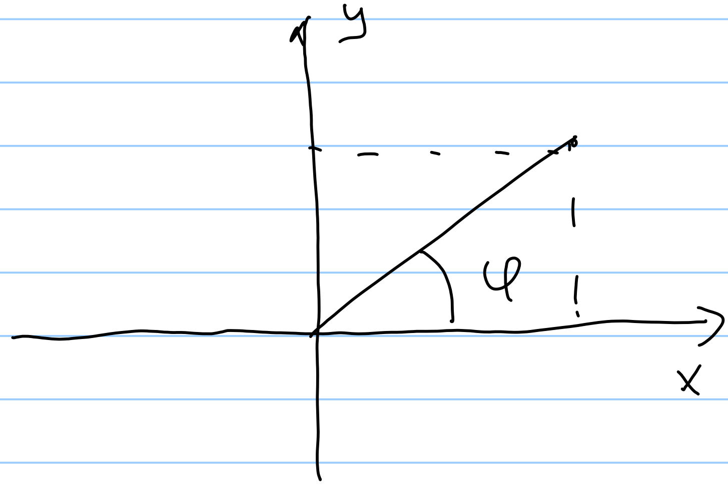
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f_{,11}(\varphi,\psi)(\varphi_y)^2 + f_{,12}(\varphi,\psi)\varphi_y\psi_y + f_{,1}(\varphi,\psi)\varphi_{yy}$$

$$+ f_{,21}(\varphi,\psi)\varphi_y\psi_y + f_{,22}(\varphi,\psi)(\psi_y)^2 + f_{,2}(\varphi,\psi)\psi_{yy}$$

$$= f_{,11}(\varphi,\psi)(\varphi_y)^2 + 2f_{,12}(\varphi,\psi)\varphi_y\psi_y + f_{,22}(\varphi,\psi)(\psi_y)^2$$

$$+ f_{,1}(\varphi,\psi)\varphi_{yy} + f_{,2}(\varphi,\psi)\psi_{yy}$$

Ćwiczenie 2. Biegunowa zamiana zmiennych



$$x = r\cos\varphi = x(r,\varphi)$$
$$y = r\sin\varphi = y(r,\varphi)$$

$(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

i jest funkcją klasy C^∞

Jakobian $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \Rightarrow$ funkcje lokalnie odwracalne dla $r \neq 0$

Odwzorowanie odwrotne: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad r \geq 0$ ale dla $(x,y)=0$

$r(x,y)$ jest nieróżniczkowalne. Zatem

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

i para $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (o ile $(x,y) \neq (0,0)$)

jednoznacznie określa kąt $\varphi \in [0, 2\pi)$

Jeśli $y > 0 \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow 0 < \varphi < \pi$

i $\varphi = \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Jeśli $y<0 \Rightarrow \pi < \varphi < 2\pi$

i $\varphi = 2\pi - \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

A co z $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$? Przez ciągłości gdy $y \to 0$ i $x > 0 \Rightarrow \varphi \to 0$

$y \to 0^{\pm}$ i $x < 0 \Rightarrow \varphi \to \pi$ i oba

wzory się rozjadą.

Pochodne:

$x_r = \cos\varphi \qquad y_r = \sin\varphi$

$x_\varphi = -r\sin\varphi \qquad y_\varphi = r\cos\varphi$

Albo
$$x_r = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad y_r = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$x_\varphi = -y \qquad y_\varphi = x$$

Odwrotnie $r_x, r_y, \varphi_x, \varphi_y$

Metoda 1.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi$$

Różniczkowanie φ jest pracochłonne więc użyjemy metody funkcji uwikłanej

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = r_x\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi_x \\ 0 = r_x\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi_x \end{array}$$

Wyznacznik $\quad W = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$

$$r_x = \begin{vmatrix} 1 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} \Big/ r = \cos\varphi$$

$$\varphi_x = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \Big/ r = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

Dalej

$$\begin{aligned} 0 &= r_y \cos\varphi - r\sin\varphi\, \varphi_y \\ 1 &= r_y \sin\varphi + r\cos\varphi\, \varphi_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad W = r$$

$$r_y = \begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 1 & r\cos\varphi \end{vmatrix} \Big/ r = \sin\varphi$$

$$\varphi_y = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} \Big/ r = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Ćwiczenie 3. Znaleźć postać Laplasjanu we współrzędnych biegunowych.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Mamy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$u(x,y) = u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) =: V(r,\varphi) = V(r(x,y), \varphi(x,y))$$

$$u_x = V_r r_x + V_\varphi \varphi_x$$

$$u_y = V_r r_y + V_\varphi \varphi_y$$

$$u_{xx} = V_{rr}(r_x)^2 + 2V_{r\varphi} r_x \varphi_x + V_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + V_r r_{xx} + V_\varphi \varphi_{xx}$$

$$u_{yy} = V_{rr}(r_y)^2 + 2V_{r\varphi} r_y \varphi_y + V_{\varphi\varphi}(\varphi_y)^2 + V_r r_{yy} + V_\varphi \varphi_{yy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr}\left[(r_x)^2 + (r_y)^2\right] + 2v_{r\varphi}(r_x\varphi_x + r_y\varphi_y)$$
$$+ v_{\varphi\varphi}\left[(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2\right] + v_r \Delta r + v_\varphi \Delta\varphi$$

Wiemy, że $r_x = \cos\varphi$, $r_y = \sin\varphi$ $\varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r}$, $\varphi_y = \frac{\cos\varphi}{r}$

Czyli $r_{xx} = -\sin\varphi\,\varphi_x = \frac{\sin^2\varphi}{r}$

$r_{yy} = \cos\varphi\,\varphi_y = \frac{\cos^2\varphi}{r}$ $\Rightarrow \Delta r = \frac{1}{r}$

$$\varphi_{xx} = -\frac{\cos\varphi\,\varphi_x}{r} + \frac{\sin\varphi\, r_x}{r^2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}$$

$$\varphi_{yy} = -\frac{\sin\varphi\,\varphi_y}{r} - \frac{\cos\varphi\, r_y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}$$

$\Delta\varphi = 0$ $\quad r \neq 0$

Zatem $u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} v_r$.

Ćwiczenie 4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\Delta u = x^2 + y^2$$
$$u\big|_{x^2+y^2=1} = 0$$

Zapisując we współrzędnych biegunowych i zakładając, że rozwiązanie nie zależy od φ otrzymujemy

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = r^2$$
$$v\big|_{r=1} = 0$$

Czyli $(r v_r)_r = r^3 \implies r v_r = \frac{1}{4} r^4 + C_1$

$v_r = \frac{1}{4} r^3 + C_1/r \implies v = \frac{1}{12} r^4 + C_1 \ln r + C_2$

u musi być różniczkowalne w $(0,0)$ czyli

$C_1 = 0 \Rightarrow v(r) = \frac{1}{12} r^4 + C_2$

$0 = v(1) = \frac{1}{12} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{12}$

$u(x,y) = \frac{1}{12}(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{12}.$