Podstawowe modele

Opis w czasie dyskretnym → rośliny monokarpiczne (wiązą to semel parity)

Opis w czasie ciągłym

populacje ludzkie, bakterie

Modelowanie pojedynczej populacji w niezmiennym środowisku

N_k – liczba osobników w chwili k

1. to jest jednostka czasu odp. danej populacji

=0 dla pop. monokarpicznych

$$N_{k+1} = N_k - \text{zmarłe} + \text{urodzone}$$

$$= N_k - \mu(N_k) N_k + \beta(N_k) N_k$$

μ – prawd. że osobnik umrze w jedn. czasu

β – przeciętna liczba potomków na osobnika

Najprostsze równanie μ, β – stałe

$$N_{k+1} = \underbrace{(1-\mu+\beta)}_{r \,=\, \text{wsp. rozrodczości netto}} N_k$$

– równanie Malthusa

W czasie ciągłym

Δt – krótki odcinek czasu w którym zakładamy że nic się nie zmienia

$N(t)$ – liczba osobników w czasie t

$$N(t+\Delta t) = N(t) - \Delta t \mu N(t) + \Delta t \beta N(t)$$

Zakładamy, że N jest funkcją różniczkowalną ⇒

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (-\mu + \beta) N(t) \underset{\Delta t \to 0}{\Longrightarrow} N' = (\beta - \mu) N$$

Rozwiązanie

$N(k) = N_0 r^k$ — cz. dyskr.

$N(t) = N_0 e^{(\beta-\mu)t}$ — czas ciągły.

$\underbrace{r < 1 \qquad \qquad \beta - \mu < 0}_{\text{populacja wymiera}}$

Modyfikacje

Równanie czas dyskretny

$$N_{k+1} = S(N_k)\beta N_k = F(N_k)N_k = f(N_k)$$

współczynnik konkurencji wewnątrzgatunkowej

Brak konkurencji $\Rightarrow S(N) = 1$

Konkurencja (przetrwanie najsilniejszych)

Redystrybucja (równy podział)

Są ~~to~~ oczywiście modele idealne. W praktyce klasyfikacje modeli odbywa się poprzez analizę zachowania się S dla dużych N. Mówimy wówczas o

a) dokładnej kompensacji

$$S(N) \sim \frac{c}{N} \quad \text{dla dużych } N$$

c - stała

odpowiada to z grubsza modelowi konkurencji

b) podkompensacja

$$S(N) \sim \frac{c}{N^b} \quad 0 < b < 1$$

c) nadkompensacja

$$S(N) \sim \frac{c}{N^b} \quad b > 1$$

odpowiada z grubsza redystrybucji

Podstawowe modele nieliniowe

a) Bevertona - Holta - Hassella

$$N_{k+1} = \; ? \; N_k$$

kompensacja $\quad S(N) \sim 1 \quad$ małe n

$\qquad\qquad\quad\;\; S(N) \sim \frac{1}{N} \quad$ duże n

Jedną z najprostszych funkcji jest

$$S(N) = \frac{\beta}{1 + aN} \qquad a \text{ - stała}$$

$$N_{k+1} = \frac{\beta N_k}{1 + a N_k}$$

Ważnym parametrem w ekologii jest pojemność środowiska, powiedzmy K.

$$K = N = \frac{\beta N}{1 + aN} \implies a = \frac{\beta - 1}{K}$$

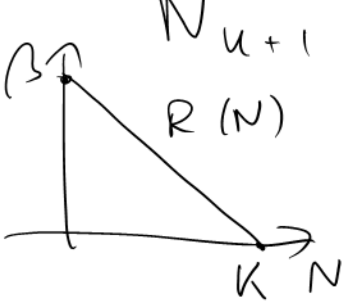
$$\boxed{N_{k+1} = \frac{\beta N_k}{1 + \frac{\beta - 1}{K} N_k}}$$

Uogólnienie

$$N_{k+1} = \frac{\beta N_k}{\left(1 + \frac{\beta - 1}{K}\right)^{b}}$$

Model logistyczny (bez śmierci)

$$N_{k+1} = N_k + R(N_k) N_k$$



Populacja powinna dawać wzrost wykładniczy dla małych N i nie wzrastać dla N bliskich K

$$R(N) = -\frac{\beta}{K} N + \beta$$

$$\boxed{N_{k+1} = N_k + \beta N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right)}$$ model logistyczny

Model logistyczny dla celów matematycznych upraszcza się zakładając, że populacje nie zachodzą na siebie:

$$N_{k+1} = \beta N_k \left(1 - \frac{N_k}{N}\right)$$

i podstawiając $x_k = \frac{1}{1+\beta} \frac{N_k}{K}$, co daje

$$\boxed{x_{k+1} = \gamma x_k (1 - x_k)}$$

Modele typu Allee

$$N_{k+1} = N_k + F(N_k) N_k$$

$$\frac{N_{k+1} - N_k}{N_k} = F(N_k)$$

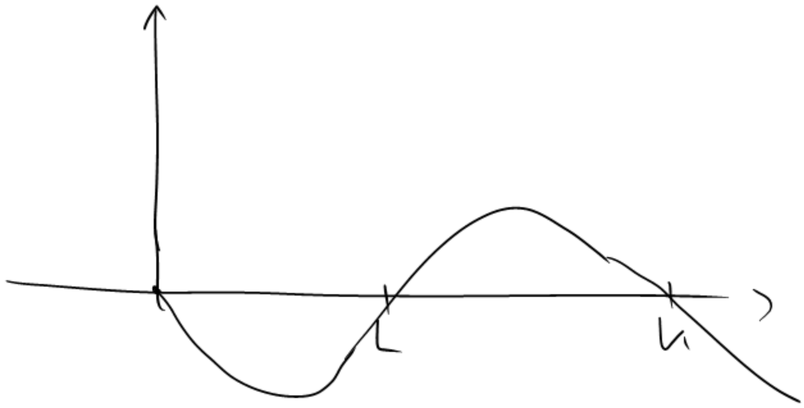
$$\frac{\Delta N}{N} = F(N)$$

$\Delta N \leq 0 \quad 0 \leq N \leq L$ pierwsze wartości progowe

$\overset{\shortparallel}{F}(N)$

$\Delta N \geq 0 \quad L \leq N \leq K$

$\Delta N \leq 0 \quad N \geq K$



Prostym równaniem tego typu jest

$$N_{n+1} = N_n\left(1+(L-N_n)(N_n-K)\right)$$

Modele w czasie ciągłym

Model logistyczny:

$$N' = \beta N\left(1-\frac{N}{K}\right), \quad N(0)=N_0$$

Rozwiązanie

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K-N_0)e^{-rt}}$$

Od modeli dyskretnych do ciągłych i z powrotem.

1. Dyskretyzacje modeli ciągłych

$$y' = f(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = f(y(t))$$

$$y(t+\underbrace{\Delta t}) = y(t) + \Delta t\, f(y(t))$$

$\Delta t = 1$ (jednostka czasu, ustalona)

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n)$$

2. Rozwiązanie równań różniczkowych (autonomicznych) mają tw. własności półgrupowej. Oznaczmy przez $y(t, y_0)$ potok równania, czyli rozwiązanie zag. Cauchy'ego

$$y' = f(y) \qquad y(0) = y_0$$

Wówczas

$$y(t_1 + t_2, y_0) = y(t_1, y(t_2, y_0))$$

$$y(t + \Delta t, y_0) = y(\Delta t, y(t, y_0))$$

lub $$y((n+1)\Delta t, y_0) = y(\Delta t, y(n\Delta t, y_0))$$

czyli $$y_{n+1} = f_{\Delta t}(y_n)$$

gdzie $f_{\Delta t}$ jest operatorem przyporządkowującym wartości y_n wartość rozwiązania zaczynającego się w y_n po upływie Δt (time-one map)

Załóżmy dalej $\Delta t = 1$

Model Malthusa

$$N' = \rho N \qquad \Rightarrow \qquad N(t) = N_0 e^{\rho t}$$
$$N(0) = N_0$$

Dyskretyzacja Eulera

$$\tilde{N}_{k+1} - \tilde{N}_k = \rho \tilde{N}_k \quad \Rightarrow \quad \tilde{N}(k) = N_0 (1+\rho)^k$$

$t = 1, 2, \ldots \qquad N(k) = \tilde{N}(k)$

$$(e^{s})^{n} = e^{sn} = (1+s)^{n} \quad ?$$

Możliwe, gdy zmienimy typ współczynnika wzrostu w czasie dyskretnym => zamiast s weźmiemy

$$s' = e^{s} - 1$$

Stabilność – przypadek równania różniczkowego (skalarnego)

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(\underline{0}) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

zakładamy, że f spełnia warunek Lipschitza (lokalnie) na $\mathbb{R}$

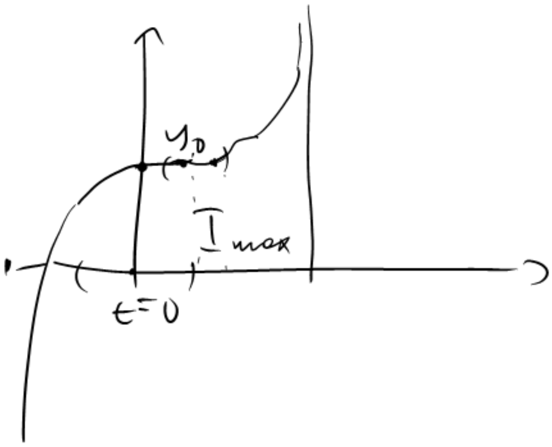
$$\forall_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}} \ \exists_{L} \quad |f(y_1) - f(y_2)| \le L\,\underbrace{|y_1 - y_2|}$$

Np $\quad y' = \overbrace{1+y^2}^{f(y)}$, $y(0) = 0$ $\Rightarrow$ $y(t) = \operatorname{tg} t$ tylko dla $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

Warunek Lipsch.

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = (y_1 + y_2)\underbrace{|y_1 - y_2|}$$

Przy tych założeniach, tw Picarda daje istnienie dokładnie jednego rozwiązania $(*)$ określonego na pewnym obszarze $(-\alpha, \alpha)$. Na ogół rozwiązanie to można przedłużyć poza $(-\alpha, \alpha)$. Przez I_{max} oznaczymy maksymalny przedział istnienia rozwiązania problemu $(*)$ (tzn takiego, że rozwiązanie nie daje się przedłużyć poza ten przedział



Na I_{max} określony potok

$\varphi(t, y_0)$

$$\begin{cases} \varphi_t'(t, y_0) = f(\varphi(t, y_0)) \\ \varphi(0, y_0) = y_0 \end{cases}$$

$t, s > 0$

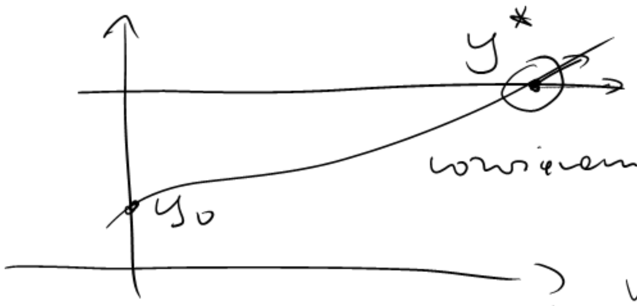
$$\underbrace{\varphi(t+s, y_0) = \varphi(t, \varphi(s, y_0))}$$

o ile $t+s \in I_{max}$.

Rozwiązanie stacjonarne

$f(y) = 0 \quad \{ y' = 0 \}$

Jeśli y_0 nie jest rozwiązaniem stacjonarnym to $\varphi(t, y_0)$ nie przechodzi przez żadne rozwiązanie stacjonarne



<u>Twierdzenie</u>. Rozwiązanie $\underbrace{}_{\text{niestacjonarne}}$ (*) są albo ściśle rosnące albo ściśle malejące. Niech $I_{max} = (a, b)$ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Wówczas, dla $t \to \pm a$ to $x(t)$ zbiega albo do punktu stacjonarnego albo do $\pm\infty$

Dowód. Załóżmy, że $x(t)$ nie jest monotoniczne ponieważ jest ciągłe, musi osiągać albo max albo minimum dla jakiegoś t_0. Ponieważ rozwiązanie musi być klasy C^1, to $x'(t_0) = 0 \Rightarrow$ to oznacza, że

$$0 = x'(t_0) = f(x(t_0))$$

czyli $x(t_0)$ jest rozwiązaniem stacjonarnym

To jest niemożliwe, bo $t \to x(t)$ jest z założenia rozw. niestacjonarnym, czyli nie może dochodzić w skończonym czasie do rozw. stacjonarnego.

$x(t)$ jest albo rosnące albo malejące na $I_{max} = (a, b)$

Załóżmy, że jest rosnące.

$\lim_{t \to b} x(t)$ istnieje

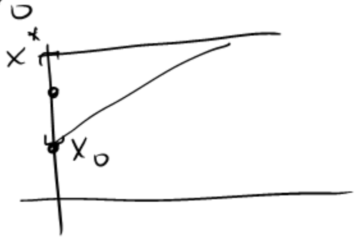
Jeśli $\lim_{t \to b} x(t) = +\infty$, to dowód jest zakończony

Jeśli $\lim_{t \to b} x(t) = x^* \Rightarrow b = +\infty$

Musimy udowodnić, że x^* jest p. stacjonarnym czyli $f(x^*) = 0$. Wróćmy do równania

$$x' = f(x) \qquad x(0) = y_0$$

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{f(s)}$$

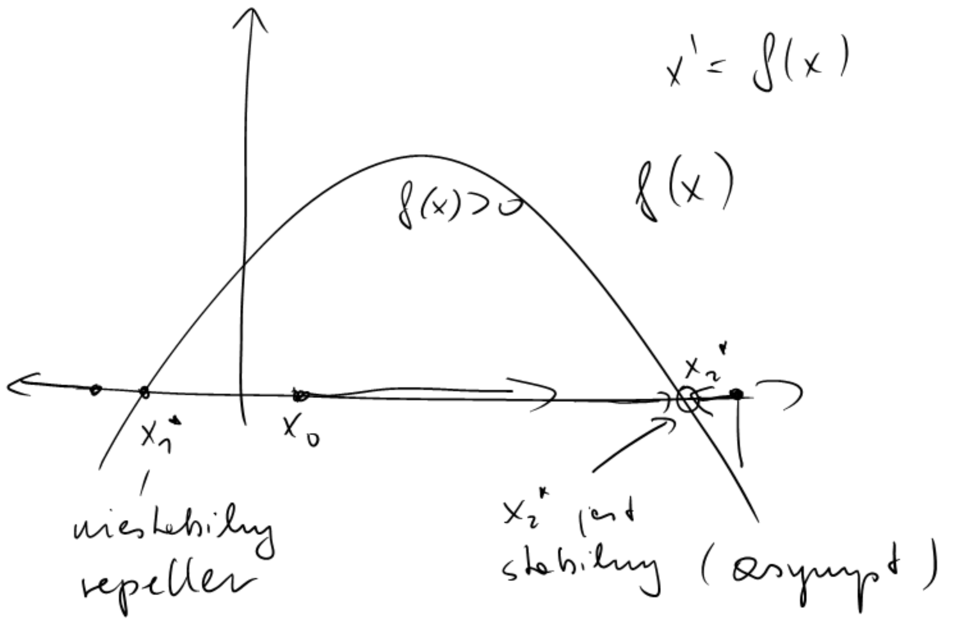


Przechodząc z $t \to \infty$

$$\infty = \int_{x_0}^{x^*} \frac{ds}{f(s)}$$

Na $[x_0, x^*)$ nie ma wartości stacjonarnych

zatem $f(x^*) = 0$.



$$x' = f(x) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{f(s)}$$

Czy $x(t) \to +\infty$ dla $t \to t_{max} < +\infty$?

$$t_{max} - t_0 = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

$t_{max} < +\infty$ wtw $\frac{1}{f(s)}$ całkowalne w ∞

$f(s) = 1 + s^2$ $\Big\{$ $x' = 1 + x$

Stabilność punktów stacjonarnych równań różnicowych

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (**)$$

Punktem stacjonarnym $^{(**)}$ nazywamy rozwiązanie

$x = f(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y_{n+1} = f(y_n) \\ y_{n+1} - y_n = f(y_n) - y_n \end{array} \right.$$

Definicje. Punkt stacjonarny x^*

a) nazywamy stabilnym jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{n} |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$$

b) przyciągającym

$$\exists_{\delta>0} \forall_{x_0} |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x^*$$

c) asymptotycznie stabilnym jeśli jest stabilny i przyciągający.

Przykład. Równanie

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

dla

$$G(x) = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$x^* = 0$ jest stacjonarny

Jeśli $x_0 \geq 1$, $\forall_n x_n = 0$

$$x_0 < 1$$

$x_n = (-2)^n x_0$ o ile $(-2)^n x_0 < 1$

potem $x_n = 0$

Czyli $x^* = 0$ jest punktem przyciągającym

Natomiast nie jest stabilnym punktem stacjonarnym. $x_0 = \frac{1}{2^k}$ k - dowolne

Stąd zawsze dojdzie do 1 lub -1

$x_n = (-2)^n \frac{1}{2^k}$ tak długo jak

$-\frac{2^n}{2^k} < 1$ $\left\{ \frac{1}{2^k} \quad -\frac{1}{2^{k-1}} \quad \frac{1}{2^{k-2}} \ldots \right.$ dla $n = k$, $x_n = (-1)^n$

Jeśli n jest parzyste to $x_n = 1$

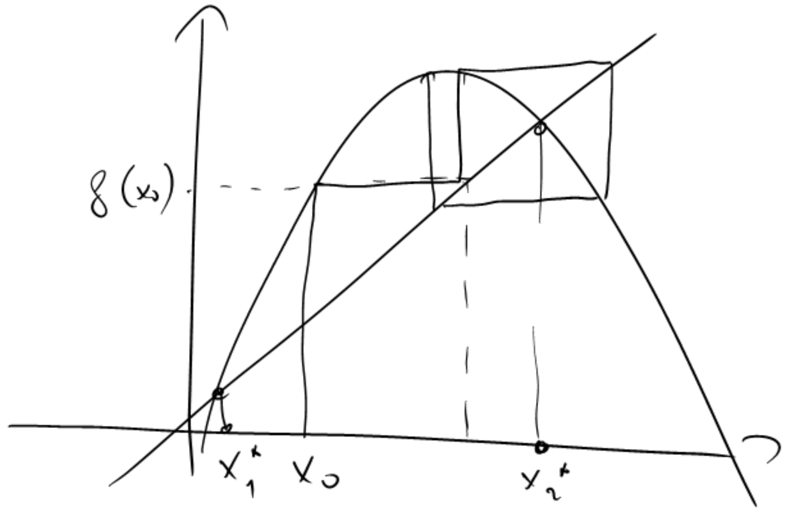
$x_{n+1} = 0$

Jeśli n jest nieparzyste, to

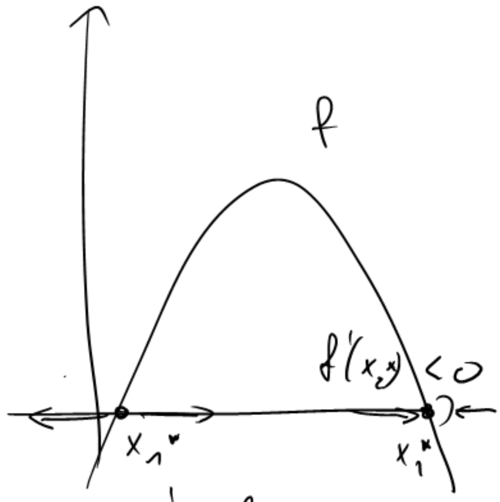
$x_n = -1$

$x_{n+1} = 2$

$x_{n+2} = 0$



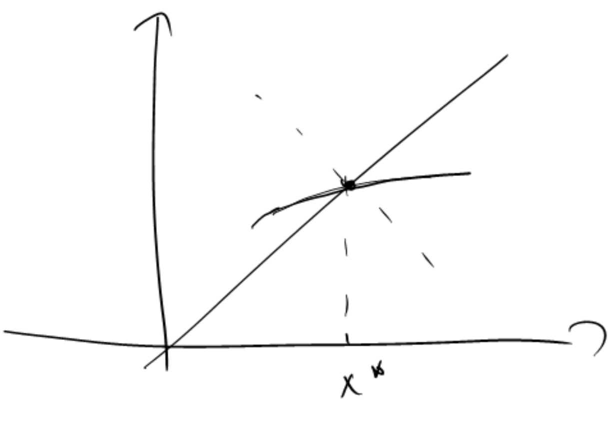
$x_{n+1} = f(x_n)$



$x' = f(x)$

<u>Twierdzenie</u>. Niech x^* będzie punktem stacjonarnym $x_{n+1} = f(x_n)$ gdzie f jest różniczkowalna w sposób ciągły w x^*.

Wówczas
(i) Jeśli $|f'(x^*)| < 1$, to x^* jest asymp. stab.
(ii) Jeśli $|f'(x^*)| > 1$, to x^* jest niestabilny.



Dowód $|f'(x^*)| < 1$, ponieważ f' jest ciągła w x^*, to z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku, istnieje przedział

$$J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$$

na którym $|f'(x)| \leq M < 1$

Weźmy $x_0 \in J$ $\quad x_1 = f(x_0)$

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| \leq M|x_0 - x^*|$$

założenie indukcyjne

$$|x_n - x^*| \leq M^n |x_0 - x^*|$$

Rozważmy

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| <$$
$$M|x_n - x^*| < M^{n+1}|x_0 - x^*|$$

Stąd, po pierwsze x^* jest punktem stabilnym bo dla dowolnego $n \geq 1$

$$|x_n - x^*| \leq |x_0 - x^*| \quad \Big(\underset{\varepsilon = \delta}{\text{możemy}} \text{ wziąć}\Big)$$

i jest przyciągający, gdyż

$$|x_n - x^*| \leq M^{n+1}|x_0 - x^*| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(ii) niestabilność. Musimy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon_0 > 0}{\exists} \ \underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{n_\delta}{\exists} \ |x_0 - x^*| < \delta_\delta \ \wedge \ |f^{n_\delta}(x_0) - x^*| \geq \varepsilon_0$$

Podobnie jak w (i), znajdziemy przedział

$$J = (x^* - \eta, x^* + \eta)$$

taki, że $|f'(x)| \geq M > 1$ dla $x \in J$

Ustalmy $\varepsilon_0 = \eta$ i $|x_0 - x^*| < \delta$, δ dowolne

$x_1 = f(x_0)$, jeśli $x_1 \notin J$, to dowód jest zakończony

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| =$$

$$= |f'(\xi)||x_0 - x^*| \quad \text{gdzie} \quad \xi \in (x_0, x^*)$$

(założyliśmy, że $x_0 < x^*$)

$$\geq M|x_0 - x^*|$$

x_1 jest dalej od x^* niż x^0.

Powtarzamy to odpowiednią ilość razy

$$|x_n - x^*| \geq M^n |x_0 - x^*|$$

tak długo, że $M^n |x_0 - x^*| > \eta$

co dowodzi niestabilności

Załóżmy, że mamy punkt stabilny $|f'(x^*)| < 1$

Są dwie możliwości: $0 < f'(x^*) < 1$, to

$$x_n - x_{n-1} = f'(\xi)(x_{n-1} - x_{n-2})$$

Ciąg iteracji jest monotoniczny, czyli

$$x_n \nearrow x^* \qquad x_n \searrow x^*$$

Natomiast jeśli $-1 < f'(x^*) < 0$

$$x_n - x^* = f'(\xi)(x_{n-1} - x^*)$$