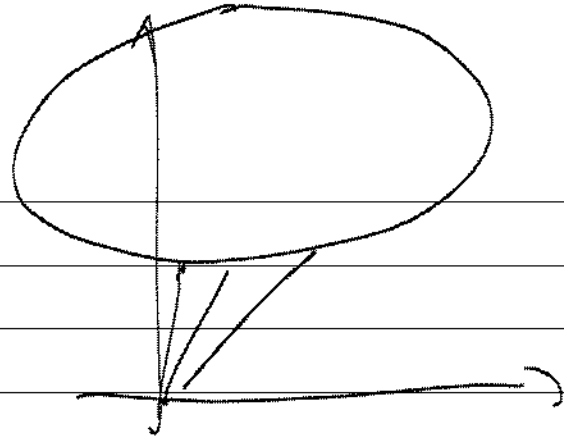
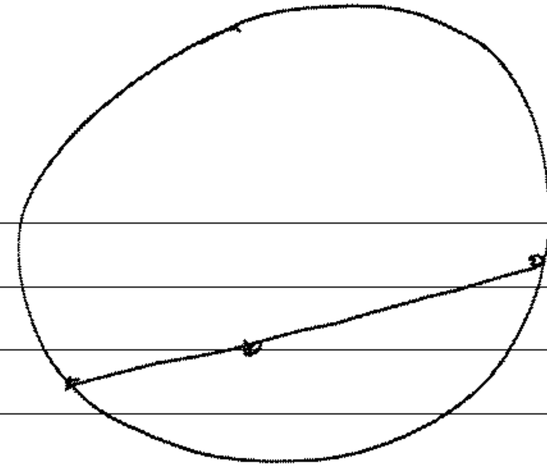
WYKŁAD 3

Note Title 11/27/2008

Rzutowania i przybliżenia

Twierdzenie 1. Jeśli $A \neq \emptyset$, domknięty i wypukły podzbiorem przestrzeni Hilberta H, to istnieje dokładnie jeden element $x \in A$ taki że

$$\|x\| = \inf_{y \in A} \|y\|$$

A jest wypukły gdy $\forall_{x,y\in A}\ \forall_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+\\ \alpha+\beta=1}}$

$\alpha x+\beta y\in A$

<u>Dowód</u> $\delta=\inf\limits_{y\in A}\|y\|$ istnieje, bo $\|y\|\geq 0$

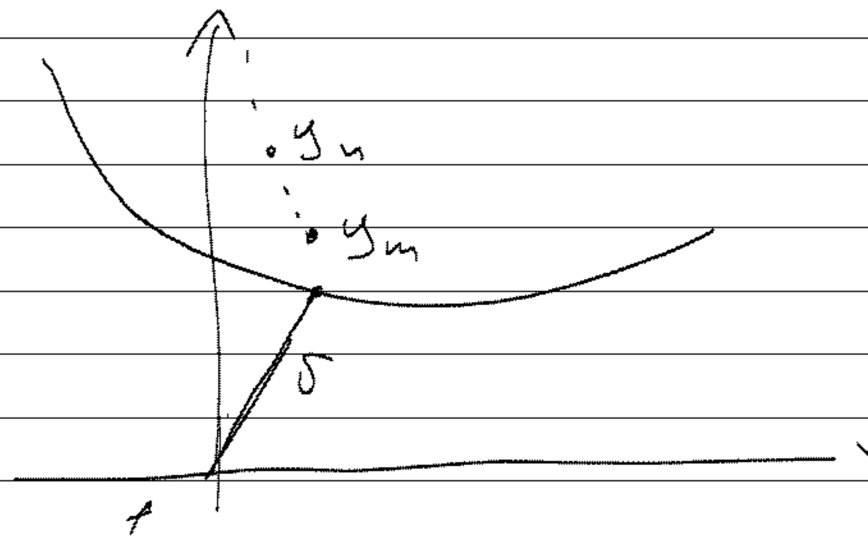
Z definicji inf, istnieje $y_n \in A$

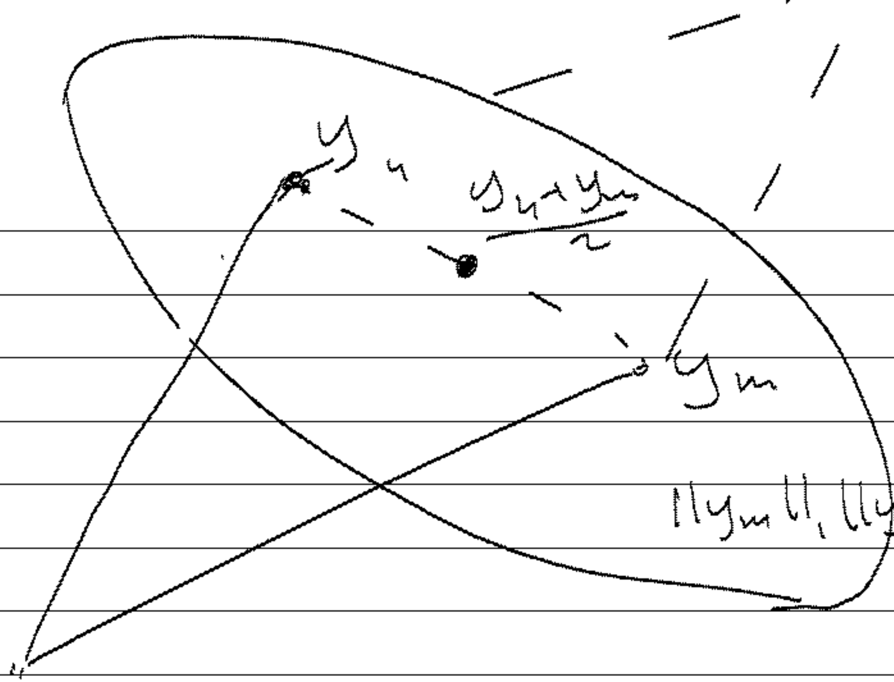
$$\delta = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|$$

Musimy udowodnić, że istnieje

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in A$$

$$\|y_n - y_m\|^2$$





$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - \|y_n + y_m\|^2$$

$\|y_m\|, \|y_n\| \to \delta$

$\frac{y_n+y_m}{2} \in A$

$\delta \le \left\|\frac{y_n+y_m}{2}\right\|$

$$\frac{y_n+y_m}{2} \in A$$

$$\left\|\frac{y_n}{2} - \frac{y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \left\|\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$$

$$? < \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \delta^2$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{y_n}{2} - \frac{y_m}{2} \right\| \le 0 \qquad \overset{\shortparallel}{0}$$

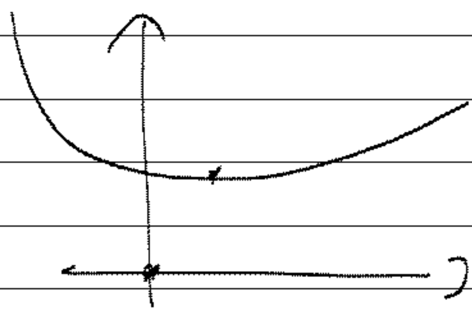
Czyli $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w H

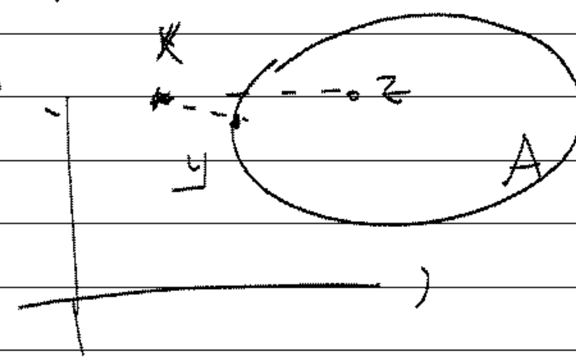
$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in H$ ale ponieważ A jest domknięty, $y \in A$ i z ciągłości normy

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \delta = \inf_{z\in A} \|z\|.$$

<u>Wniosek</u>. Jeśli A jest niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta H i $x \in H$, to istnieje dokładnie jeden element $y \in A$ dla którego

$$\|y - x\| = \inf_{z \in A} \|z - x\|$$





Dowód. Chcemy zminimalizować

$\|x-z\| = \|z-x\|$ gdzie $z \in A$. Oznaczmy

$z' = z - x$ wtedy $z' \in -x+A$

$\{z : z = -x + a,\ a \in A\}$

Czyli mamy zminimalizować

$\|z'\|$ gdzie $z' \in -x+A$

Ale $-x+A$ jest domknięty i wypukły

$x_n \to x_0 \in \mathcal{H}$ $\quad x_n \in -x+A \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x_n} = -x + x_n'$

$x_n + x \to x_0 + x$ czyli x_n' zbiega do $x_0 + x$ ponieważ $x_n' \in A$, A domknięty

$x_0 + x \in A \Rightarrow x_0 \in -x + A$

Wypukłość: $u, v \in -x + A \Rightarrow$

$u = -x + u'$, $v = -x + v'$, $u', v' \in A$

$$\alpha u + \beta v = -\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} x + \alpha u' + \beta v' =$$

$$= -x + \underbrace{\alpha u' + \beta v'}_{\in A} \in -x + A$$

Show that istnieje w $-x+A$ element ξ

$$\|\xi\| = \inf_{z' \in -x+A} \|z'\|$$

$\xi \in -x+A \Rightarrow$ istnieje dokładnie jeden element $y \in A$ $\xi = y - x$ $(z' = -x + \eta)$ $\eta \in A$

$$\underbrace{\|y - x\| = \inf_{\eta \in A} \|\eta - x\|}$$

Twierdzenie. Jeśli M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to dowolny element $x \in \mathcal{H}$ można zapisać jako

$$x = y + z$$

gdzie $y \in M$, $z \in M^{\perp}$, przy czym y i z są jednoznacznie określone przez x.

Dowód. | Uwaga. M jest podprzestrzenią liniową, zatem M jest zbiorem wypukłym.

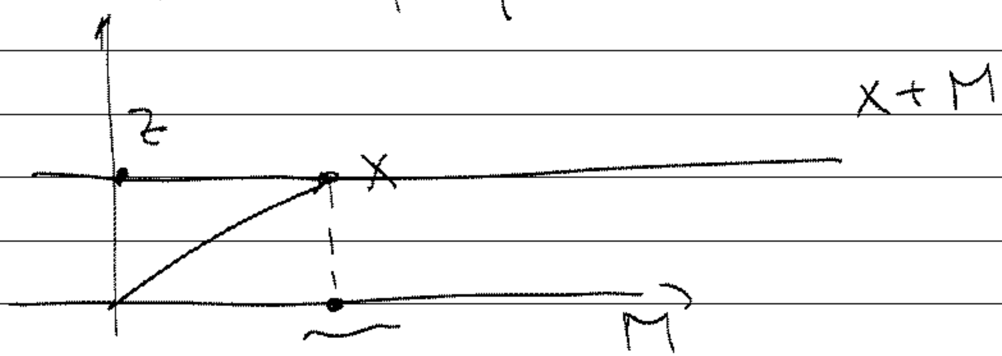
a). Jeśli $x \in M$, $x = \overset{y}{\overset{\shortparallel}{x}} + \overset{z}{\overset{\shortparallel}{0}}$ $Px = x$

$0 \in M^{\perp}$ $(M \cap M^{\perp} = \{0\})$ $Qx = 0$

b) Możemy założyć, że $x \notin M$

Rozważmy zbiór $x + M$ → zbiór wypukły domknięty.

Wobec powyższego istnieje element $z \in x + M$ o najmniejszej normie



Ponieważ M jest podprzestrzenią liniową istnieje dokładnie jeden element $y \in M$

$$z = \underline{x - y} \qquad \left\{ z \in x + M \Rightarrow z = x + \underset{M}{\overset{\uparrow}{m}} = x - (-m) \right\}$$

$$\begin{cases} \|z\| = \inf\limits_{\xi \in x+M} \|\xi\| \\ \|x - y\| = \inf\limits_{\eta \in M} \|x - \eta\| \end{cases} \qquad \left\{ \xi = x + \bar{\eta} = x - \underbrace{(-\bar{\eta})}_{\eta \in M} \right.$$

Mamy pewien rozkład ?

$$x = y + z \quad , \quad y \in M \quad , \quad z \in x + M$$

$z \perp y$ $\quad (z \perp M)$? $\qquad y \in M$, $-\alpha y \in M$

$z \in x+M$

$$\|z\|^2 = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ x+M}}{z}, z \rangle \le \langle \underbrace{z-\alpha y}_{\substack{\uparrow \\ x+M}}, z-\alpha y \rangle$$

bo $z-\alpha y \in x+M$ a z jest elementem o najmniejszej normie!

$$\cancel{\langle z, z\rangle} \le \cancel{\langle z, z\rangle} - \bar{\alpha}\langle z, y\rangle - \alpha\langle y, z\rangle + |\alpha|^2\langle y, y\rangle$$

Weźmy $\|y\| = 1$

$$0 \leq -\overline{\alpha}\langle z, y\rangle - \alpha\langle y, z\rangle + |\alpha|^2$$

Wiech $\alpha = \langle z, y\rangle \qquad \overline{\alpha} = \overline{\langle z, y\rangle}$

$$0 \leq -|\langle z, y\rangle|^2 - |\langle z, y\rangle|^2 + |\langle z, y\rangle|^2$$

$$-|\langle z, y\rangle|^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle z, y\rangle = 0$$

$$z \perp y$$

Pokażmy, że $z \in M^{\perp}$

Czyli $$\underset{\substack{\cap \\ M}}{x = y} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{z}$$

Musimy teraz pokazać, że jest to rozkład jedyny. Załóżmy, że

$$x = \underset{\substack{\cap \\ M}}{y} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{z} \text{ i } x = \underset{\substack{\cap \\ M}}{y'} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{z'} \Rightarrow 0 = y - y' + z - z'$$

Czyli $y - y' = z' - z$

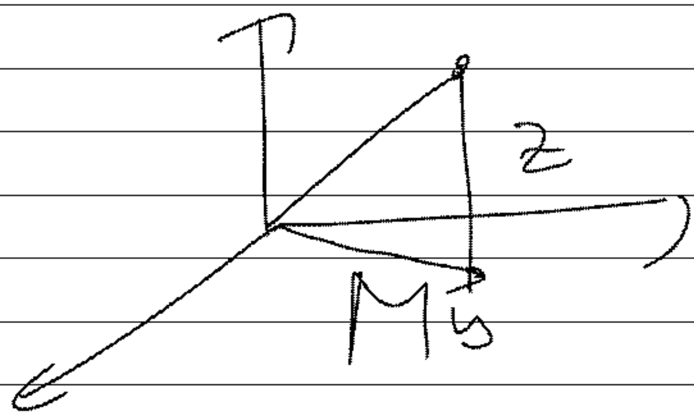
Ale $y - y' \in M$, $z' - z \in M^{\perp}$

i $\underbrace{M \cap M^{\perp}}_{\Downarrow} = \{0\}$

$y - y' = 0 = z' - z$

$y = y'$ i $z = z'$

I koniec.



$$H = M \oplus M^{\perp}$$

dopełnienie prostopadłe

$$M \cap M^{\perp} = \{0\}$$

$$x = y + z$$

z jednoznaczności rozkładu możemy zdefiniować operatory P, Q

$$Px = y \in M \qquad Qx = z \in M^{\perp}$$

$$x = Px + Qx$$

Wniosek 2.0.5 Operatory P i Q mają następujące własności:

1. Jeśli $x \in M \Rightarrow Px = x \quad Qx = 0$

   Jeśli $x \in M^{\perp} \Rightarrow Px = 0 \quad Qx = x$

2. $\|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$

$\|Px\|^2 \le \|x\|^2$

3. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$

$\|Px\| \le \|x\|$

$\|Qx\| \le \|x\|$

4. P i Q są operatorami liniowymi

Dowód Stwierdzenie 1 wynika z dowodu poprzedniego twierdzenia

Stwierdzenie 2. wynika z konstrukcji rozkładu

Stwierdzenie 3 z (Δ)

$$\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 =$$

$$= \langle Px + Qx, Px + Qx \rangle =$$

$$= \langle Px, Px \rangle + \langle Qx, Qx \rangle$$

$$\overbrace{\langle Px, Qx\rangle} + \overbrace{\langle Qx, Px\rangle}$$

$$= \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 + 0 + 0$$

Stwierdzenie 4.

$x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$x = Px + Qx \quad | \cdot \alpha$$

$$y = Py + Qy \quad | \cdot \beta$$

$$\underline{\alpha x + \beta y} = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y)$$

$$\alpha x + \beta y - (\alpha x + \beta y) = \underline{0} = (\alpha Px + \beta Py - P(\alpha x + \beta y))$$

$$+\left(\alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x+\beta y)\right)$$

$$-\underbrace{\big(\underbrace{\alpha Px}_{M} + \underbrace{\beta Py}_{M} - \underbrace{P(\alpha x+\beta y)}_{M}\big)}_{M} = \underbrace{\alpha Qx+\beta Qy - Q(\alpha x+\beta y)}_{M^{\perp}}$$

$$= 0 \qquad\qquad = 0$$

Mamy element z M równy elementowi z $M^{\perp}$ ale $M \cap M^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow$

Czyli $P(\alpha x+\beta y) = \alpha Px + \beta Py$

$$Q(\alpha x+\beta y) = \alpha Qx + \beta Qy$$

Operatory P i Q są liniowe, ciągłe, obraz P ~~to~~ jest M

jądro P to jest $M^{\perp}$

obraz Q ~~to~~ $M^{\perp}$

jądro Q to M $\quad \left(\begin{matrix} x \in M \\ Qx = 0 \end{matrix} \right)$

$$P(\underset{\substack{\uparrow \\ M}}{Px}) \stackrel{?}{=} Px \qquad P^2 = P$$

$$Q^2 = Q$$

Operatory o tych własnościach nazywamy rzutowaniami prostopadłymi.

Twierdzenie Riesza o reprezentacji

Jeśli ustalimy $y \in H$, to

$$x \to \langle x, y \rangle = Lx$$

jest funkcjonał liniowy ciągły

Twierdzenie 2.0.6 (Riesz).

Jeśli L jest ciągłym funkcjonałem liniowym w przestrzeni Hilberta H, to istnieje dokładnie jeden element $y \in H$, taki że

$$Lx = \langle x, y \rangle$$

<u>Dowód</u> Jeśli $L \equiv 0$ $\left(Lx = 0 \ \forall_{x \in H} \right)$ $\Rightarrow$ $y = 0$. To, że jest możliwość jedyną wynika z dalszej części dowodu.

Założymy więc, że $L \neq 0$ czyli, że istnieje element $x \in H$ $Lx \neq 0$. Rozważmy jądro tego funkcjonału

$$M = \{x;\ Lx = 0\}$$

M jest podprzestrzenią liniową:

$$x, y \in M \Rightarrow L(\alpha x + \beta y) =$$

$$= \alpha L x + \beta L y = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$$

M jest podprzestrzenią domkniętą $(x_n) \subset M$

$x_n \to x$ w H

$\forall_n \; Lx_n = 0$ $\qquad$ $Lx_n \xrightarrow{\text{ciągłość}} Lx$

$Lx_n \downarrow 0$ $\quad //$

$Lx = 0 \Rightarrow x \in M$

$M \neq H \Rightarrow M^{\perp} \neq \{0\}$

Przykład $H = \mathbb{R}^3$ $\quad Lx = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

$x = (x_1, x_2, x_3) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

$M = \{x; \; \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\}$

M jest płaszczyzna $\Rightarrow \dim M^{\perp} = 1$

Jest ~~t~~ prawdziwe o przypadku opóźnym

$x_1, x_2 \in M^\perp$ Załóżmy, że x_1, x_2

są liniowo niezależne, czyli

$$\underset{\alpha, \beta \neq 0}{\forall} \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \neq 0$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in M^\perp$$

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) \neq 0$$

$$\parallel$$

$$\alpha L x_1 + \beta L x_2$$

$\alpha = Lx_2 \qquad \beta = -Lx_1$

$$Lx_2 Lx_1 - Lx_1 Lx_2 = 0$$

Odwrotnie spełnione

Skoro $M^\perp$ jest jednowymiarowe

Istnieje zatem dokładnie jeden element $z \in M^\perp$ t.ż. $\|z\| = 1$

Dowolny element $x \in H$ ma zatem rozkład

$$x = \underset{\in M}{y} + \alpha \underline{z} \quad | \cdot \underline{z}$$

$$Lx = Ly + \alpha Lz =$$

$$= \alpha Lz \qquad \alpha = \frac{Lx}{Lz}$$

$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle + \alpha \|z\|^2$$

$$= \alpha$$

$$\langle x, z\rangle = \frac{Lx}{Lz} \qquad = y$$

$$Lx = \langle x, z\overline{Lz}\rangle$$

Stąd istnieje $y \; (= z \cdot \overline{Lz})$

takie że

$$Lx = \langle x, y \rangle$$

Musimy udowodnić jednoznaczność.

Załóżmy, że dla innego y' $Lx = \langle x, y' \rangle$

$$\forall_{x \in H} \; 0 = Lx - Lx = \langle x, \underline{y - y'} \rangle$$

W szczególności dla $x = y - y'$ $\Rightarrow$

$\|y - y'\|^2 = 0 \Rightarrow y = y'$.