WYKŁAD 2

Note Title 11/20/2008

PRZYKŁADY PRZESTRZENI HILBERTA

Przykład 1. Przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ $\underline{y}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$, $\underline{y} = (y_1 \dots y_n)$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Jest ~~*~~ przestrzeń unitarna.

(Przestrzenie unormowane skończenie wymiarowe są zupełne)

$\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ są przestrzeniami Hilberta

Przykład 2 Przestrzeń l_2

$\underline{x} \in l_2$ wtedy $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} =$

$(x_1, x_2, \ldots\ldots)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} < +\infty$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \le \|\underline{x}\|_2 \cdot \|\underline{y}\|_2 \quad !!$$

niepoprawne!

Dowód że $\langle x, y \rangle$ jest określony na $l_2 \times l_2$

$$|x_n \overline{y_n}| \le \frac{1}{2}|x_n|^2 + \frac{1}{2}|y_n|^2 \quad (*)$$

$$0 \le (|x_n| - |y_n|)^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 - 2|x_n||y_n|$$

Z $(*)$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}| \le \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y\|_2^2$$

jest zbieżny, więc szereg definiujący $\langle x, y \rangle$ jest bezwzględnie zbieżny.

Przy dowodzie 4 trzeba zauważyć, że operacja sprzężenia zespolonego jest ciągła, dzięki czemu dla dowolnego szeregu $\sum \overline{a_n} = \sum a_n$.

<u>Przestrzeń l_2 jest zupełna.</u>

$(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \underline{x}^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$

ciąg Cauchy'ego.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N}\ \forall_{n,m\geq N}\ \|\underline{x}^{(n)}-\underline{x}^{(m)}\|_2^2<\varepsilon^2$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^2<\varepsilon^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall_{\varepsilon}\ \exists_{N}\ \forall_{n,m\geq N}\ \forall_{k}\ |x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^2<\varepsilon^2$$

Są numeryczne ciągi Cauchy'ego

zatem $\forall_{k} \exists_{x_k} \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots\ x_k, \ldots)$

$\underline{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \ldots\ x_k^{(n)} \ldots)$

$n \to \infty$

$\underline{x} \in l_2$? $\quad \underline{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x}$ w l_2

$$\sum_{k=1}^{r} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \qquad \forall_r$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{m>N} \sum_{k=1}^{r} |x_k - x_k^{(m)}|^2 \le \varepsilon^2 \qquad \forall_r$$

bo $x_k^{(n)} \to x_k$ i suma jest skończona.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(m)}|^2 \le \varepsilon^2$$

$$(x_k - x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}} \in l_2$$

$$\underbrace{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}}_{\in\, \ell_2} = \underbrace{(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}}_{\in\, \ell_2} + \underbrace{(x_k - x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}}_{\in\, \ell_2}$$

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Przestrzeń ℓ_2 jest ośrodkowa

$A = \{(\delta_{kl})_{k\in\mathbb{N}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ jest liniowo gęsty w ℓ_2 ($\overline{\mathrm{lin}\, A} = \ell_2$)

(ćwiczenie).

$L_2(\Omega)$ Ω zbiór z miarą μ

$\Omega = [0,1]$, dt miara Lebesgue'a.

C zbiór funkcji ciągłych na $[0,1]$

$C([0,1]) \ni x$

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

Czy $C([0,1])$ jest przestrzenią Hilberta?

Rozważmy $x(t) = 1$, $y(t) = t$

$$\|x+y\| = \sup_{t\in[0,1]} |1+t| = 2$$

$$\|x-y\| = \sup_{t\in[0,1]} |1-t| = 1$$

$$\|x\| = \quad - - - \quad 1 = \|y\|$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \neq 4 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$C([0,1])$ nie jest przestrzenią unitarną!

$x,y \in \mathcal{C}$ $\quad \langle x,y\rangle = \begin{cases} \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt & \text{dla p. rzeczyw.} \\ \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt & \text{dla p. zesp.} \end{cases}$

$$\langle x,x\rangle = \int_0^1 |x(t)|^2\,dt = 0 \iff \forall_{t\in[0,1]}\; x(t) = 0$$

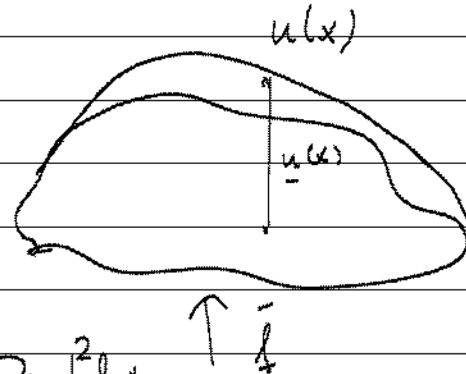
$$\langle x,y\rangle = \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt = \overline{\int_0^1 \overline{x(t)}\,y(t)\,dt}$$

$$= \overline{\int_0^1 y(t)\,\overline{x(t)}\,dt} = \overline{\langle y,x\rangle}$$

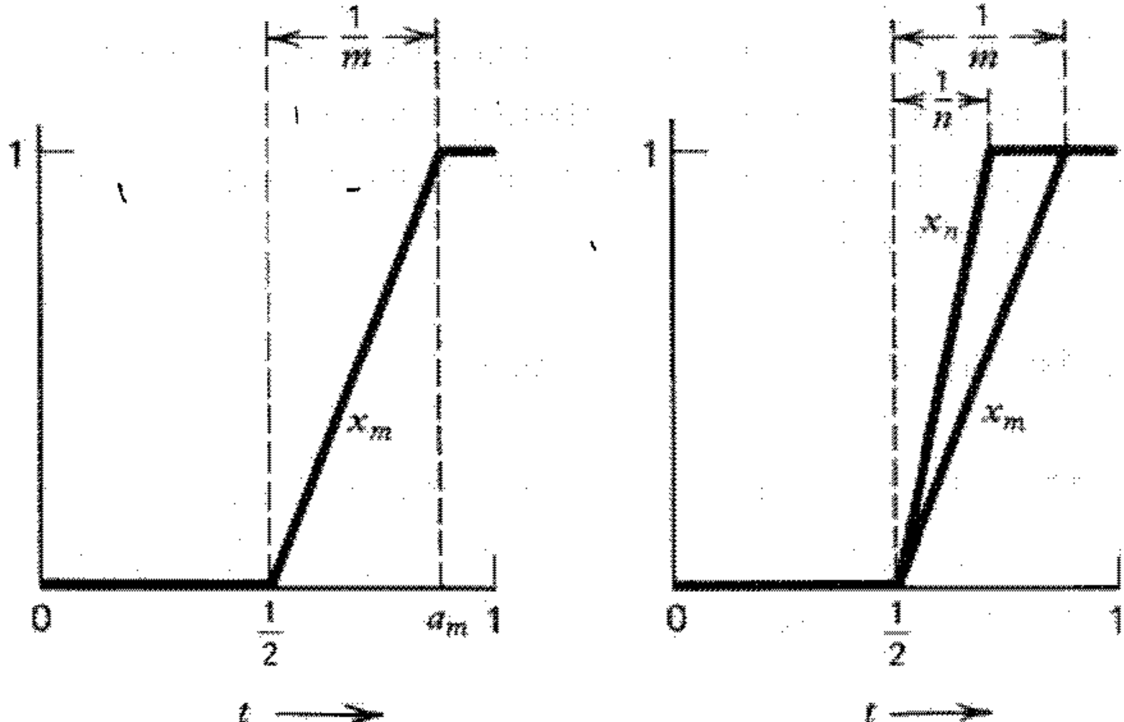
$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt}$$

$$\Delta u = f$$

$$\frac{m}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$



$$k\int |Du|^2 dx$$



$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ mt - \frac{m}{2} & \text{dla } \frac{1}{2} < t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \\ 1 & \text{dla } t > \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \end{cases}$$

$\underline{n > m}$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|^2 dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left[(n-m)t + \frac{m-n}{2}\right]^2 dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(1 - mt + \frac{m}{2}\right)^2 dt$$

$$\leq 4 \cdot \frac{1}{m} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

Jest to ciąg Cauchy'ego.

Jeśli założymy, że jest on zbieżny do funkcji ciągłej $x(t)$ to $\forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall n > N$

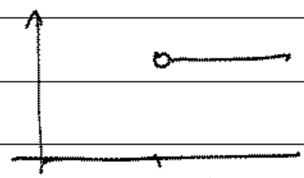
$$\varepsilon > \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |x(t) - x_n(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|^2 dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|^2 dt < \varepsilon \qquad \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - x(t)|^2 dt < \varepsilon$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|^2 dt = 0 \qquad \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |x(t) - 1|^2 = 0 \, dt$$

$x(t) = 0$ dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$

$x(t) = 1$ dla $t \in (\frac{1}{2}, 1]$



Nie ma funkcji ciągłej x dla której

$x_n \longrightarrow x$ w normie $\|\cdot\|_2$

$(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ nie jest zupełna!

Rozwiązanie problemu:

uzupełnić $\mathcal{C}([0,1])$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt}$$

Uzupełnienie oznaczmy $\tilde{L}_2([0,1])$

(x_n) ciągi Cauchy'ego funkcji

ciągłych i pogrupować je

tak by do elementu $\underset{(x_n)}{[x]} \in \tilde{L}_2$

należały wszystkie ciągi Cauchy'ego

które spełniają $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

Posłużymy się z każdej klasy

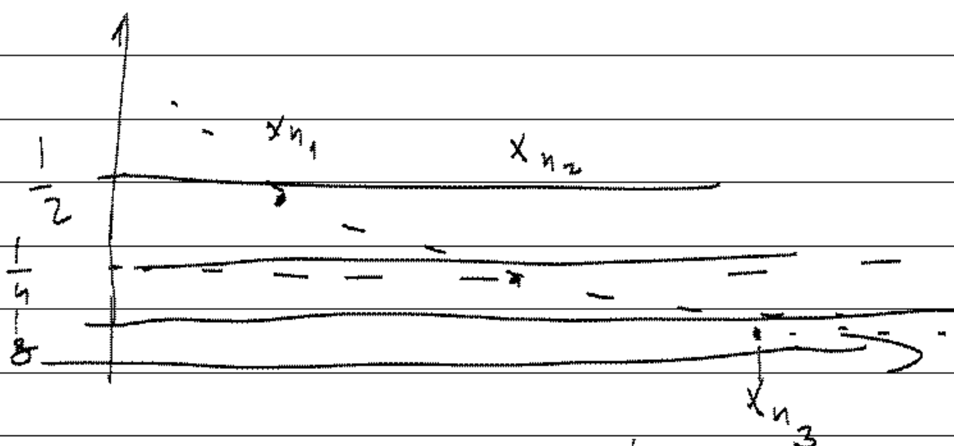
równoważności $[x]$ (składającej

się z ciągów Cauchy'ego f. ciągłych)

składającej jakąś funkcję. Weźmy

taki ciąg Cauchy'ego (x_n)

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m>N} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$



$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| \le \frac{1}{2}$$

$$X_n(t) \to x(t)$$

$$X_{n_1} + \cancel{X_{n_2}} - \cancel{X_{n_2}} + X_{n_3}$$

$$x_{n_1}(t) + x_{n_k}(t) \to x(t)$$

$$\| x_{n_2} - x_{n_3} \| \leq \frac{1}{4}$$

$$\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| \leq \frac{1}{2^k}$$

$$g_m(t) = \sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

$$\sum_{k=1}^{m} | x_{n_{k+1}} - x_{n_k} | \to \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n_{k+1}} - x_{n_k} |$$

$$\forall_t \quad \lim_{m \to \infty} g_m(t) = g(t)$$

$$\| g(t) \|_2^2 \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t) |^2 \, dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 | x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t) |^2 \, dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Stąd wynika, że $g(t)$ jest funkcją mierzalną, prawie wszędzie skończoną.

Ale

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}(t) = g(t) - x_{n_1}(t)$$

Czyli pokazaliśmy, że z każdego ciągu Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|_2$ możemy wyjąć podciąg zbieżny prawie wszędzie do funkcji mierzalnej $x(t)$, która spełnia $\int_0^1 |x(t)|^2 dt < +\infty$

$$\tilde{L}_2([0,1]) \ni [x] \ni \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

$$(y_n) \in [x] \iff \|x_n - y_n\|_2 \to 0$$

Ten warunek pozwala udowodnić, że jeśli przeprowadzimy powyższą konstrukcję dla ciągu $(y_n) \in [x] \Rightarrow$ skonstruowany podciąg będzie p.w. zbieżny do tej samej funkcji $x(t)$

Funkcja graniczna jest niezależna od wyboru reprezentanta z $[x]$

W ten sposób skonstruowaliśmy

wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie

$\tilde{L}_2([0,1])$ na $\{x(t),$ mierzalne $\int_0^1 |x(t)|^2 dt < +\infty\}$

Zbiór powyższy oznaczmy

przez $L_2([0,1])$

$$\boxed{\tilde{L}_2([0,1]) = L_2([0,1])}$$