WYKŁAD 1

Note Title 11/13/2008

<u>Definicja 1.1.1</u> Niepusty zbiór H nazywamy przestrzenią unitarną jeśli jest on zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w funkcję zespoloną $\langle\, ,\, \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ spełniającą

1. $\forall_{x \in H} \quad \langle x, x \rangle \geq 0$ i $\langle x, x \rangle = 0$ wtw $x = 0$
2. $\forall_{x,y,z \in H} \quad \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\forall_{x,y \in H,\, \lambda \in \mathbb{C}} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\forall_{x,y \in H} \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Note Title 11/13/2008

Funkcję $\langle \cdot , \cdot \rangle$ nazywamy iloczynem skalarnym.

Zauważmy, że $0 \cdot x = \underline{0}$ dla dowolnego $x \in H$

więc z 3. $\langle \underline{0} y \rangle = \langle 0x, y \rangle = 0 \langle x, y \rangle = 0$

To + 4. daje $\langle x, \underline{0} \rangle = 0$ dla dowolnego x.

Możne też rozpatrywać rzeczywiste p.u. W takim przypadku 4. musi być zastąpione przez

4'. $\forall_{x,y} \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Ponieważ $\langle x, x \rangle \geq 0$ możemy wprowadzić funkcjonał

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (1.1.1)$$

Dowód 1. $\|x\| = 0$ wtw $\langle x, x\rangle = 0$ wtw $x = 0$

Ponadto, 3. daje

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|,$$

więc dwa aksjomaty normy są spełnione przez (1.1.1). Aby dowieść nierówności trójkąta, musimy udowodnić nierówności Schwarza.

<u>Lemat 1.1.2.</u> Dla dowolnych $x, y \in H$ mamy

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad (1.1.2)$$

Ponadto równość w (1.1.2) zachodzi wtw gdy x i y są liniowo zależne.

<u>Dowód</u> Jeśli $y = 0$, (1.1.2) jest oczywiste.

Załóżmy, że $y \neq 0$. Wówczas, dla dow. $\lambda \in \mathbb{C}$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

Biorąc $\lambda = -\langle x, y \rangle / \|y\|^2$ otrzymujemy

$$0 \leq \|x + \lambda y\| = \|x\|^2 + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \qquad (*)$$

czyli

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

co daje (1.1.2).

Aby dowieść drugą część, zauważmy że jeśli

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$$

to prawe strone w (*) jest 0, więc $\|x+\lambda y\|$. Udowodnimy, że to pociąga $x+\lambda y = 0 \Rightarrow x = -\lambda y$ i x, y są liniowo zależne. Jeśli $y=0$ to stwierdzenie jest oczywiste.

Z drugiej strony, jeśli $x = \mu y$, $\mu \neq 0$, $y \neq 0$, to

$$
\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle| &= |\langle \mu y, y\rangle| = |\mu| |\langle y, y\rangle| \\
&= |\mu| \|y\| \|y\| = \|\mu y\| \cdot \|y\| \quad \left(\begin{matrix}\text{war}\\ \text{2. normy}\end{matrix}\right) \\
&= \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}
$$

Jeśli x lub y są $\underline{0}$, to liniowa zależność jest natychmiastowa.

Zatem wprowadzenie normy

Note Title 11/13/2008

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

zamienia przestrzeń unitarną na przestrzeń unormowaną.

<u>Stwierdzenie 1.1.4</u> Iloczyn skalarny jest ciągłym funkcjonałem: $H \times H \to \mathbb{C}$.

<u>Dowód</u>.

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = |\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle$$

$$+\langle x, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leq$$

$$|\langle x, y-y_0\rangle| + |\langle x-x_0, y_0\rangle|$$

$$\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y-y_0\|}_{\overset{\wedge|}{\frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}}} + \|x-x_0\| \cdot \|y_0\| \leq \varepsilon$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta<1} \qquad \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)} + \frac{\varepsilon}{\|y_0\|}$$

o ile $\|y-y_0\| \leq \delta$ $\quad \|x-x_0\| \leq \delta$,

gdzie użyliśmy $\|x\| \leq \|x-x_0\| + \|x_0\| \leq \|x_0\| + \delta \leq \|x_0\| + 1$.

<u>Definicja 1.1.5</u> Przestrzeń Hilberta

jest zupełną przestrzenią unitarną.

<u>Twierdzenie 11.6</u> Każdą przestrzeń unitarną można uzupełnić do przestrzeni Hilberta. Tzn. każda przestrzeń unitarna jest izometryczna z gęstą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta.

Idea uzupełnienia przestrzeni niezupełnej

$X \quad (x_n) \subset X \quad \|x_n - x_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ciąg Cauchy

Rozpatrujemy klasę $[x]$ wszystkich ciągów Cauchyjego (x_n) takich że $(x_n), (y_n) \in [x]$ wtedy i tylko wtedy gdy $\|y_n - x_n\| \to 0$

Def. $\|[x]\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \quad (x_n) \in [x]$

Np $\left(|\sqrt{2}| = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \quad x_n \to \sqrt{2} \right)$

Naturalna definicja iloczynu skalarnego:

$$\langle [x], [y] \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle \qquad (x_n) \in [x]$$
$$(y_n) \in [y]$$

Udowodnimy, że

$$\| [x] \| = \langle [x], [x] \rangle = \lim_{n \to \infty} \| x_n \|$$

$(x_n) \in [x]$. Sprawdzamy aksjomat 1.

$$\| [x] \| = 0 \iff [x] = 0 = [\underline{0}] \qquad \underline{0} = (0, 0 \ldots)$$

$$0 = \| [x] \| = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\langle x_n, x_n \rangle} =$$

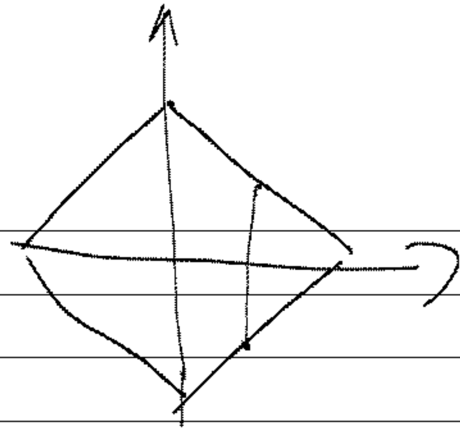
$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ to oznacza, że $x_n \to 0$

Ale $(x_n) \in [\underline{0}]$ wtw $x_n \to 0 \Rightarrow [x] = [\underline{0}]$

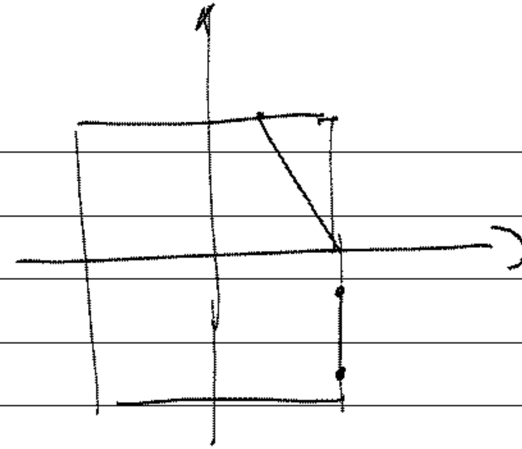
1.2 Geometria przestrzeni unitarnych

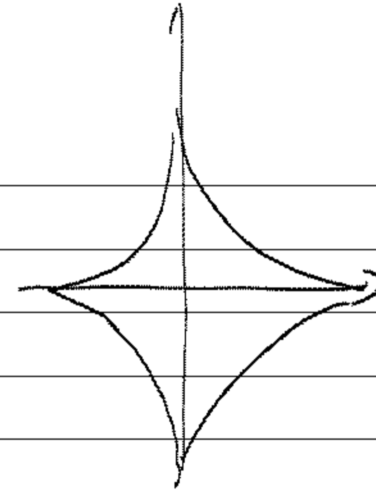
<u>Stwierdzenie 1.2</u> Kula jednostkowa w $\mathcal{H}$ jest ściśle wypukła.

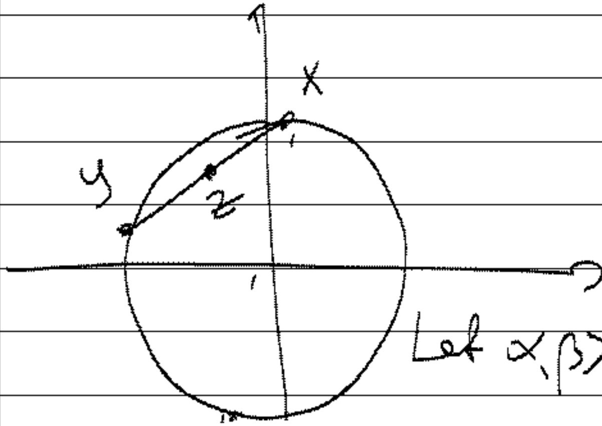
ℓ^1



ℓ^∞







$\|x\| = 1$ $\qquad \{z \,;\, z = \alpha x + \beta y\}$

$\|y\| = 1$ $\qquad 0 \leq \alpha, \beta \quad \underline{\alpha + \beta = 1}$

Let $\alpha, \beta > 0$ $\|z\|^2 = |\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle|$

$= |\alpha^2 \|x\|^2 + \beta^2 \|y\|^2 + \alpha\beta \langle x, y\rangle + \alpha\beta \langle y, x\rangle|$

$\leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta |\underline{\langle x, y\rangle}|$

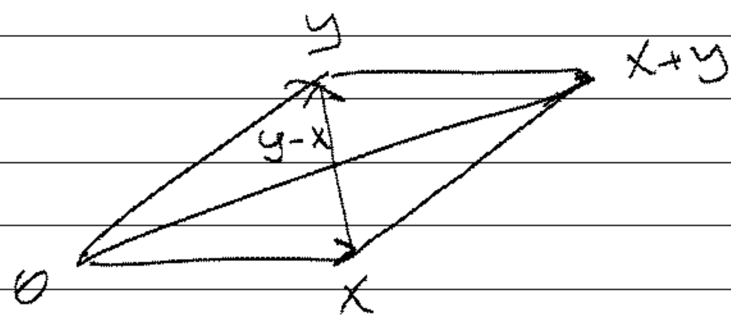
x, y – liniowo niezależne!

$$< \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \overset{=1}{\|x\|} \cdot \overset{=1}{\|y\|} = (\alpha+\beta)^2 = 1$$

$\|z\| < 1$ $\quad z \in$ wnętrze kuli

Mamy ścisłą wypukłość!

Prawo równoległoboku



(1.2.1) $$\|x+y\|^2 + \|y-x\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Twierdzenie 1.2.2 Niech H będzie zespoloną przestrzenią unormowaną z normą $\|\cdot\|$. Wówczas H jest przestrzenią unitarną wtw gdy spełniony jest warunek (1.2.1).

Dowód. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\Rightarrow$ (1.2.1) zachodzi

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$+ \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$- \cancel{\langle x,y\rangle} - \cancel{\langle y,x\rangle}$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

$\langle x, -y\rangle = \langle x, y\rangle$

Dowód wynikania w przeciwną stronę zaczyna się od obserwacji, że w przestrzeni unitarnej rzeczywistej

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

w zespolonej

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2\right)$$

Definicja 1.2.4

$x, y \in \mathcal{H}$

a) $x \perp y$ wdu $\langle x, y \rangle = 0$

$x = 0 \implies \forall_{y \in M}\, x \perp y \quad \underbrace{(0 \perp y)\ (y \perp 0)}$

b) $M \subset H$;

$\forall_{y \in M}\, x \perp y \implies x \perp M$

c) $M, N \subset H \implies \forall_{x \in N}\, x \perp M$

$\implies N \perp M \quad (M \perp N)$

d) $M^{\perp} = \{x \in H;\ x \perp M\}$

$M^{\perp}$ nazywamy dopełnieniem prostopadłym zbioru M.

Własności:

$\forall$ zbioru M $M^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową domkniętą

$$x, y \in M^{\perp} \Rightarrow \begin{array}{l} \langle x, m\rangle = 0 \\ \langle y, m\rangle = 0 \end{array} \quad \forall_{m \in M}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha x + \beta y, m\rangle = 0 \quad \forall_{m \in M}$$

$x_n \to x$ w H

$$(x_n) \subset M^{\perp} \Rightarrow \langle x_n, m \rangle = 0 \quad \forall_{m \in M}$$

(udowodniliśmy też, że iloczyn skalarny jest funkcją ciągłą swoich argumentów)

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\langle x_n, m \rangle} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\langle x, m \rangle} \Rightarrow x \in M^{\perp}$$

Czyli $M^{\perp}$ jest zbiorem domkniętym.

$$N \perp M \Rightarrow N \subset M^{\perp}$$

Stwierdzenie 1.2.5
(twierdzenie Pitagorasa)

$$\forall_{x,y\in\mathcal{H}} \quad x\perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (1.2.5)$$

Jeśli $\mathcal{H}$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną to $(1.2.5) \implies x\perp y$

Dowód

$$\|x+y\|^2 = \overset{\|x\|^2}{\overset{\shortparallel}{\langle x,x\rangle}} + \overset{\|y\|^2}{\overset{\shortparallel}{\langle y,y\rangle}}$$

$+ \; 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$

$x \perp y$

$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = 0$