Ćwiczenia 6

Zadanie 1. Udowodnić, że

$$\overline{\mathrm{Lin}\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}} = \overline{\mathrm{Lin}\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots\}}$$

Dowód. Oznaczmy $B_1 = PS$, $B_2 = LS$

Wystarczy pokazać, że $\forall_n \; e^{int} \in B_2$ i

$\forall_n \; 1, \sin nt, \cos nt \in B_1$

$$e^{int} = \frac{1}{2}\sin nt + \frac{i}{2}\cos nt \in B_2$$

$$e^{i0t} = 1 = \cos 0 \cdot t$$

$$\sin nt = \frac{1}{2i}e^{int} - \frac{1}{2i}e^{-int}$$

$$\cos nt = \frac{1}{2}e^{int} + \frac{1}{2}e^{int}$$

Domknięcia równych zbiorów są sobie równe.

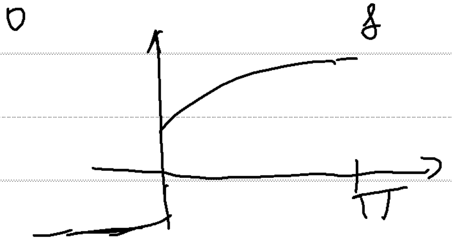
Zadanie 2. Wiemy, że $\{1, \sin t, \cos t, \dots\}$ jest bazą ortogonalną w $L_2(-\pi,\pi)$.

a) Pokazać, że $\{\sin t, \sin 2t, \dots\}$, oraz $\{1, \cos t, \cos 2t, \dots\}$ są bazami w $L_2(0,\pi)$. Zortonormalizować te bazy.

b) Pokazać, że $\{\cos t, \cos 2t, \dots\}$ nie jest bazą w $L_2(0,\pi)$

ad a) Musimy pokazać, że jeśli $f \in L_2(0,\pi)$ spełnia

$$\forall_{n \geq 1} \int_0^\pi f(t)\sin nt\, dt = 0 \implies f = 0 \text{ w } L_2(0,\pi)$$



Przedłużamy f w sposób nieparzysty na $(-\pi,\pi)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,\pi) \\ -f(-x) & x \in (-\pi,0) \end{cases}$$

Odwzorujemy $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin nx\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \int_{-\pi}^{0} (-f(-x))\sin nx\,dx$

$\left\{ \begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right\}$ $= 0 + \int_0^{\pi} f(t)\sin(-nt)\,dt = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx\,dx = 0$ bo $\tilde{f}\cos$ jest funkcją nieparzystą,

$n = 0, 1, \ldots$

czyli $\tilde{f}(x) \perp$ bazy w $L_2((-\pi,\pi))$ zatem

$\tilde{f}(x) = 0$ p.w na $(-\pi,\pi) \Rightarrow f(x) = 0$ p.w

na $(0,\pi) \Rightarrow \{\sin nx\}_{n\geq 1}$ jest bazą na $(0,\pi)$

$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2}$

Gdy mamy $\{1, \cos x, \cos 2x \ldots\}$ otrzymujemy przedłużenie parzyste funkcji f !

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,\pi) \\ f(-x) & x \in (-\pi,0) \end{cases}$$

Wówczas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x)\cos nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$n = 0,1,\dots$ $\quad = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x)\sin nx\,dx = 0$$ bo $\hat{f}\sin$ jest funkcją nieparzystą.

$n = 1,2\dots$

$\int_0^{\pi} 1\,dx = \pi$ $\quad \int_0^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \dots\right\}$ jest bazą ortonormalną

b) Rozważmy $f(t) = 1$ na $(0,\pi)$

Wówczas $$\int_0^{\pi} 1\cdot\cos nt\,dt = \frac{1}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin \pi n - \sin 0) = 0$$

$n \geq 1$

czyli $0 \neq 1 \perp \{\cos t, \cos 2t, \dots\}$ - zbiór ten nie może być bazą bo istnieje niezerowy element prostopadły.

__Zadanie__ a) Znaleźć rozwinięcie $f(t) = t$ w szereg sinusów na $[0, \pi]$

b) Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 6\pi^2$

__Rozwiązanie.__ Z zadania poprzedniego wiemy, że

$$x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{w } L_2([0,\pi])$$

gdzie a_n są współczynnikami Fouriera względem bazy ortonormalnej $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots\right\}$

Czyli

$$a_n = \left\langle x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x \sin nx \, dx$$

$$\int_0^\pi \underset{u}{x} \, \underset{v'}{\sin nx} \, dx = -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx =$$

$$= -\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^\pi = -\pi \frac{(-1)^n}{n}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right)$$

b) $$\int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{1}{3} \pi^3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \frac{1}{3} \pi^{\cancel{3}\,2} = 2\cancel{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\pi^2 = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$