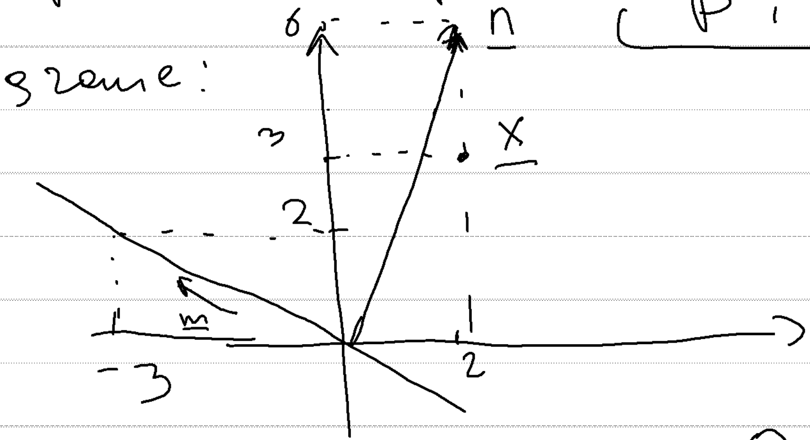
Ćwiczenia 5

Zadanie 1. Niech $H = \mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$. Znaleźć:

a) Rzut prostopadły wektora $\underline{x} = (2,3)$ na podprzestrzeń $M = \{(x_1, x_2);\ 2x_1 + 3x_2 = 0\}$

b) Dopełnienie prostopadłe $M^\perp$. Podać wzory na P i Q.

Rozwiązanie:



Kierunek prostopadły $b = (b_1, b_2)$ do $\underline{a} = (a_1, a_2)$ względem powyższego iloczynu skalarnego:

$$0 = \langle a, b \rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2$$

Czyli $(b_1, b_2) = (a_2, -2a_1)$. M jest powłoką liniową wektora $\underline{m} = (-3, 2)$, skąd kierunek prostopadły $\underline{n} = (2, 6)$. Czyli $\underline{M^\perp = \{(x_1, x_2);\ x_2 - 3x_1 = 0\}}$

Rzut prostopadły na M: Niech $\underline{x} = (x_1, x_2)$

Prosta równoległa do $M^\perp$ przechodząca przez (x_1, x_2) będzie miała wzór

$$\xi_2 - x_2 - 3(\xi_1 - x_1) = 0$$

$$\xi_2 = 3\xi_1 + x_2 - 3x_1$$

i przecina się z $2\xi_1 + 3\xi_2 = 0$ w

$$0 = 2\xi_1 + 3(3\xi_1 + x_2 - 3x_1) = 11\xi_1 + 3x_2 - 9x_1$$

$$\xi_1 = \frac{9x_1 - 3x_2}{11}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{11}(27x_1 - 9x_2) + x_2 - 3x_1$$

$$= \frac{(27-33)x_1}{11} - \frac{(9-11)x_2}{11} = -\frac{6}{11}x_1 + \frac{2}{11}x_2$$

Czyli $P(x_1, x_2) = \frac{1}{11}(9x_1 - 3x_2\,,\ -6x_1 + 2x_2)$

Sprawdzamy $\langle \underline{n}, P\underline{x} \rangle = \frac{1}{11}\left(2(18x_1 - 6x_2) - 36x_1 + 12x_2\right)$

$$= 0.$$

$$Q\underline{x} = \underline{x} - P\underline{x} = (x_1, x_2) - \left(\frac{9}{11}x_1 - \frac{3}{11}x_2\,,\ -\frac{6}{11}x_1 + \frac{2}{11}x_2\right)$$

$$= \left(\frac{2}{11}x_1 + \frac{3}{11}x_2\,,\ \frac{6}{11}x_1 + \frac{9}{11}x_2\right)$$

W szczególności $P(1,1) = \left(\frac{6}{11}, \frac{4}{11}\right)$.

Zadanie 2 Znaleźć funkcję liniową najlepiej przybliżającą w $L_2([0,1])$ funkcję $f(x) = e^x$.

Rozwiązanie. Podprzestrzeń funkcji liniowych M_1 jest rozpięta przez $\{1, x\}$. Naszym celem jest znalezienie współczynników a, b, takich, że

$$\int_0^1 |e^x - (ax+b)|^2 dx \to \min$$

Zgodnie z teorią, jest ~~t~~ rzut p. f na M_1.

Musimy mieć

$$\langle e^x - (ax+b), 1\rangle = 0$$

$$\langle e^x - (ax+b), x\rangle = 0$$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1 \qquad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \int_0^1 dx = 1$$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e-(e-1) = 1$$

Otrzymujemy układ równań

$$e-1 = \frac{1}{2}a + b \qquad \Rightarrow \qquad 2(e-1) = a + 2b \;\Big|\cdot 2$$

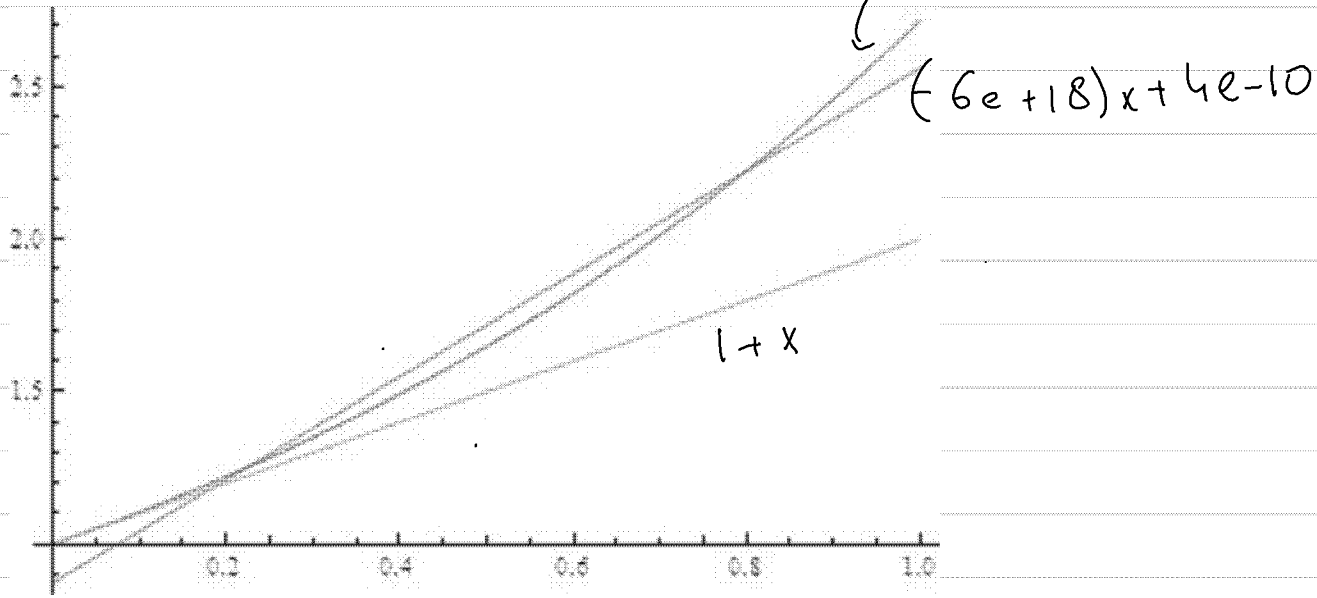
$$1 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \qquad\qquad 6 = 2a + 3b$$

$$4e-10 = b \qquad a = 2(e-1) - 8e + 20 =$$

$$= -6e + 18$$

Również najlepszego przybliżenie:

$(-6e+18)x + 4e-10$



Zadanie 3. Znaleźć funkcję postaci $a + b\sin x + \cos x$ najlepiej przybliżającą $f(x) = x$ na przedziale $(-\pi, \pi)$ w normie $L_2((-\pi,\pi))$

Rozwiązanie. Najlepsze przybliżenie jest rzutem f na podprzestrzeń $M_3 = \mathrm{Lin}\{1, \sin x, \cos x\}$

$$0 = \langle x - (a + b\sin x + c\cos x), 1\rangle \Rightarrow a \cdot 2\pi = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$0 = \langle x - (a + b\sin x + c\cos x), \sin x\rangle \Rightarrow b\pi = 2\pi \Rightarrow b = 2$$

$$0 = \langle x - (a + b\sin x + c\cos x), \cos x\rangle \Rightarrow c\pi = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0$$

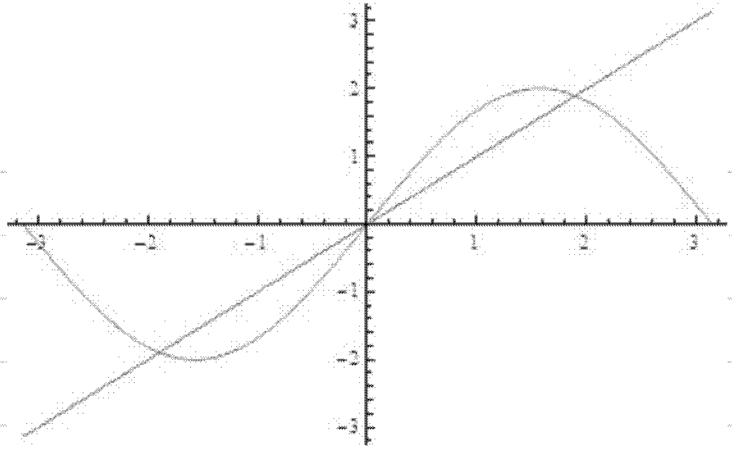
$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x \sin x\,dx = 2\left(-x\cos x\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,dx\right) = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\,dx = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \pi$$

Najlepsze przybliżenie $f(x) = x$ to $2\sin x$



Zadanie 4. Znaleźć bazę ortonormalną w $L_2([0,1])$ rozpinającą podprzestrzeń wielomianów kwadratowych.

Rozwiązanie. $M_2 = \mathrm{Lin}\{1, x, x^2\}$

$\underline{e}_1 := 1$. Rzut prostopadły x na $\underline{e}_1$

$0 = \langle x - a, 1\rangle \Rightarrow \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 dx = 1$ czyli $\frac{1}{2} - a = 0$

$a = \frac{1}{2}$, zatem dopełnienie $\tilde{e}_2 = x - \frac{1}{2}$, $\tilde{e}_2 \perp e_1$

Normalizacja $\|\tilde{e}_2\| = \sqrt{\int_0^1 |x - \frac{1}{2}|^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{12}}$

$\underline{e_2} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Rzut prostopadły x^2 na $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2\}$

$0 = \langle x^2 - a e_1(x) - b e_2(x), e_1(x) \rangle \Rightarrow a = \langle x^2, e_1(x) \rangle$

$0 = \langle x^2 - a e_1(x) - b e_2(x), e_2(x) \rangle \qquad b = \langle x^2, e_2(x) \rangle$

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)x^2\,dx = \int_0^1 \left(x^3-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\tilde{e}_3(x) = x^2 - \frac{1}{12}e_2(x) - \frac{1}{3}e_1(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{12}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}$$

$$= x^2 - \frac{1}{\sqrt{12}}x + \frac{1}{2\sqrt{12}} - \frac{1}{3} = x^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = x^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}-4}{12}$$

$$\|\tilde{e}_3(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}-4}{12}\right)^2 dx} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{5}\left(69-20\sqrt{3}\right)}.$$