Ćwiczenia 4

Note Title 11/30/2008

Zadanie 1. Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną i niech A będzie niepustym zbiorem wypukłym. Udowodnić, że $y \in A$ jest najlepszym przybliżeniem punktu $x \in H$ w zbiorze A wtw gdy

$$\forall_{z \in A} \quad \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$$

(jeśli H jest przestrzenią rzeczywistą, to nierówność ta przyjmuje postać

$$\forall_{z \in} \langle x-y, z-y\rangle \leq 0.$$

Podać interpretację geometryczną w $\mathbb{R}^2$.

Mamy $\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 +$

$$2\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle + \|y-z\|^2 \qquad (*)$$

Jeśli $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \quad \forall z$, to

$$\|x-z\| \geq \|x-y\|$$

a więc, skoro $y \in A$, to y jest najlepszym przybliżeniem x w A. Z drugiej strony, jeśli $\|x-y\|$ jest rzeczywiście najmniejszą z odległości, to z $(*)$ wynika

$$2\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle + \|y-z\|^2 \geq 0 \qquad (**)$$

Popatrzmy odcinek przez y i z: $z_t = tz + (1-t)y$
$t \in (0,1)$. Wówczas $z_t \in A$ i stosując $(**)$
do punktu z_t mamy (skoro $y - z_t = t(y-z)$)

$$2\,\mathrm{Re}\langle x-y, t(y-z)\rangle + t^2\|y-z\|^2 \geq 0$$

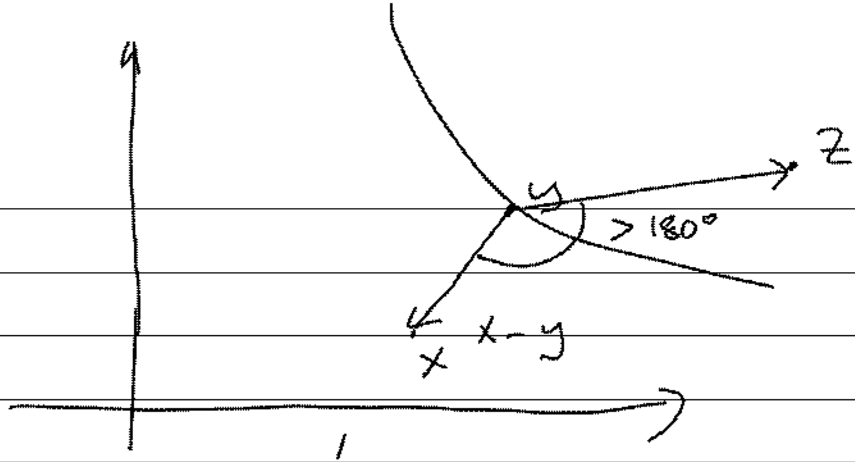
t jest nieujemne, więc dzieląc przez t otrzymujemy

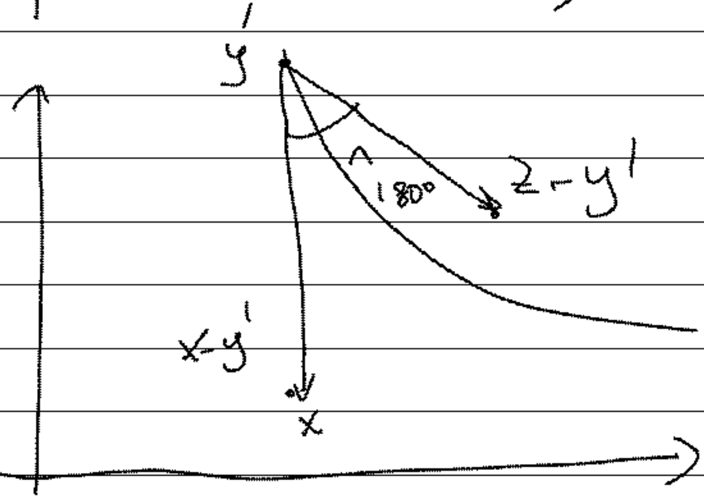
$$2\,\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle + t\|y-z\|^2 \geq 0 \qquad \forall\, t \in (0,1)$$

i z dowolności t

$$\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$$

Interpretacja:

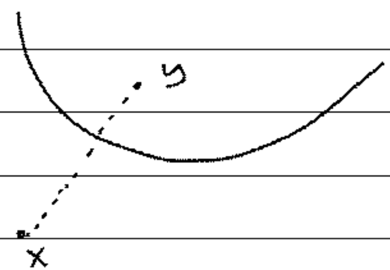




Zadanie 2. Niech A będzie domkniętym wypukłym podzb. przestrzeni Hilberta H, $x \notin A$, i y będzie

najlepszym przybliżeniem x w A. Pokazać, że $y \in \partial A$.

Przypomnijmy, że $\partial A = \bar{A} - \operatorname{Int} A = A - \operatorname{Int} A$ (skoro A jest domknięty). Jeśli $y \notin \partial A$ $\Rightarrow y \notin A$ lub $y \in \operatorname{Int} A$, a skoro $y \in A$, to $y \in \operatorname{Int} A$.



Rozważmy funkcję

$\gamma(t) = y + t(x-y)$

$\gamma : \mathbb{R} \to H$. Jest to funkcja ciągła. Jeśli $y \in \operatorname{Int} A$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie że

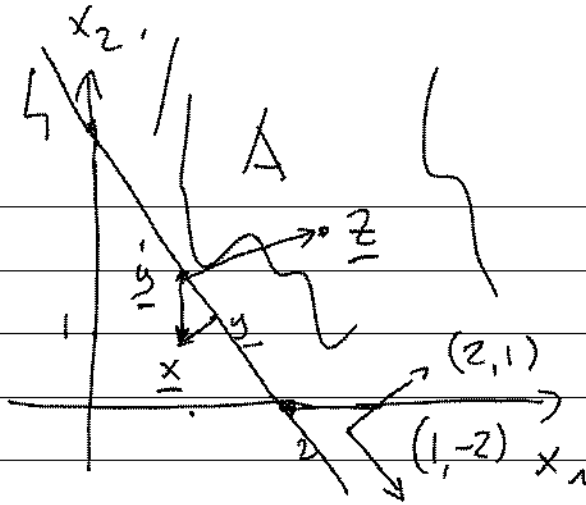
$B(y,\varepsilon) \subset A$. Ponieważ $f(0)=y$, istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $t \in (-\delta,\delta)$ $\|f(t)-y\| < \varepsilon$, czyli $f(t) \in A$ dla $t \in (-\delta,\delta)$. Weźmy $0 < t_1 < \delta$. Mamy

$$\langle x-y,\ y+t_1(x-y)-y \rangle = t_1 \|x-y\|^2 > 0$$

Sprzeczność z poprzednim zdaniem.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x_1,x_2);\ x_2 \geq -2x_1+4\}$ $\underline{x} = (1,1)$. Znaleźć $\underline{y} \in A$ spełniające

$$\|\underline{x}-\underline{y}\| = \inf_{\underline{z} \in A} \|\underline{x}-\underline{z}\|$$



Zgodnie z poprzednim zadaniem $\underline{y} \in \partial A$ czyli do prostej

$$x_2 = -2x_1 + 4$$

Z geometrii, punktem $\underline{y} \in \partial A$ takim że wszystkie wektory $\underline{z}-\underline{y}$, $z \in$ półpłaszczyzny A, tworzą kąt rozwarty z $\underline{x}-\underline{y}$ jest punkt $\underline{y}$ taki że $\underline{x}-\underline{y} \perp \partial A$.

Wektor prostopadły do ∂A to $(2,1)$, prosta o tym wektorze kierunkowym przechodząca przez $(1,1)$ to $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + b$ gdzie $1 = \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

czyli $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$. Punkt przecięcia to

$$-x_1 + 2x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{6}{5}$$
$$2x_1 + x_2 = 4 \qquad\qquad x_1 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}$$

Czyli $\underline{y} = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

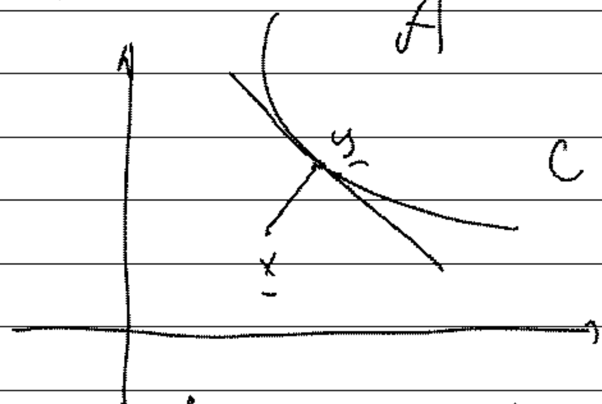
Sprawdzimy, czy tak jest rzeczywiście

$$\underline{x} - \underline{y} = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) \qquad \underline{z} - \underline{y} = \left(z_1 - \frac{7}{5}, z_2 - \frac{6}{5}\right)$$

$$\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{z} - \underline{y} \rangle = -\frac{2}{5}\left(z_1 - \frac{7}{5}\right) - \frac{1}{5}\left(z_2 - \frac{6}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(2z_1 + z_2 + 4\right) \leq 0 \quad \text{wtw} \quad (z_1, z_2) \in A.$$

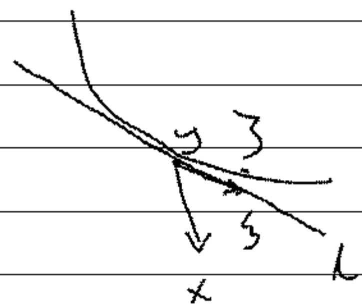
Zadanie 4 Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie podzbiorem wypukłym ograniczonym różniczkowalną krzywą zamkniętą $C: (x(t), y(t))$ $t \in (t_0, t_1)$. Pokazać, że $\underline{y} \in A$ (czyli $\underline{y} \in C$) jest najlepszym przybliżeniem $x \notin A$ wtw gdy $\underline{x}-\underline{y}$ jest normalną zewnętrzną do A w punkcie $\underline{y}$

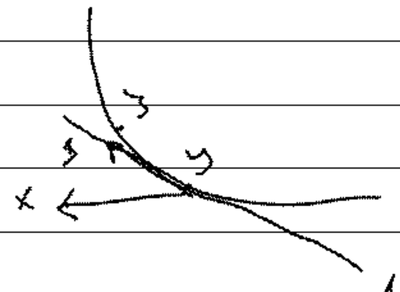


Niech $\underline{x}-\underline{y}$ będzie normalną zew.
$\Rightarrow$ Rozważmy prostą l styczną do A w $\underline{y}$. Z wypukłości A leży po jednej stronie l, przeciwnej do $\underline{x}$. Jeśli tak

to $\underline{y}$ jest najbliższym przybliżeniem x w całej półpłaszczyźnie, a tym bardziej w A.

$\Leftarrow$ Niech $\underline{x}-\underline{y}$ nie będzie prostopadłe do stycznej l w $\underline{y}$. Tzn. będzie istniał $\xi \in l$ taki że $\langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{\xi}-\underline{y}\rangle = c > 0$



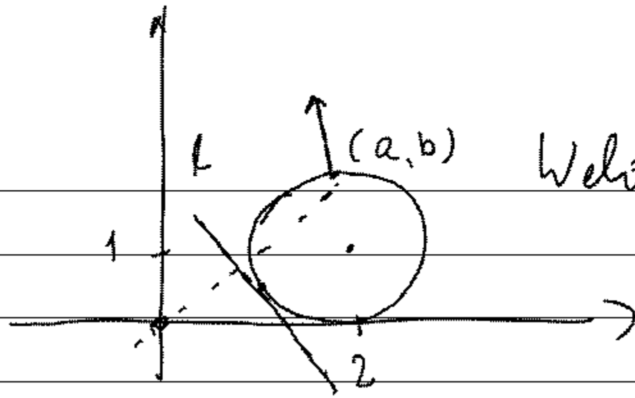


Z definicji stycznej, będzie istniał $\underline{\zeta} \in C \cap A$ taki, że

$$\left|\langle \underline{\zeta}-\underline{y}, \underline{\xi}-\underline{y}\rangle\right| < \frac{c}{2}$$

Stąd $\langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{\zeta}-\underline{y}\rangle > 0$. Sprzeczność.

Zadanie 5. Znaleźć punkt w kole $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1$ najbliższy początkowi układu $(0,0)$



Wektor normalny w $(a,b) \in$ okręgu ma współrzędne

$$(a-2,\ b-1)$$

Czyli musimy mieć

$$\lambda(a,b) = (a-2,\ b-1)$$

dla pewnej stałej λ. Stąd

$$a(1-\lambda) = 2 \qquad \lambda \neq 1$$
$$b(1-\lambda) = 1$$

Tak więc $a = \dfrac{2}{1-\lambda}$ $\quad b = \dfrac{1}{1-\lambda}$

Ale (a,b) musi leżeć na okręgu, czyli

$$1 = (a-2)^2 + (b-1)^2 = \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2$$

$$5\lambda^2 = (1-\lambda)^2 \Rightarrow 1-\lambda = \pm\sqrt{5}\lambda \Rightarrow 1 = \lambda(1\pm\sqrt{5})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1\pm\sqrt{5}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \Rightarrow a = 2\frac{4}{5\mp\sqrt{5}} = \frac{8(5\pm\sqrt{5})}{20}$$

$$b = \frac{4}{5\mp\sqrt{5}} = \frac{4(5\pm\sqrt{5})}{20}$$

Wybieramy $\left(\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)$.

Zadanie 6. W przestrzeni Hilberta ℓ_2 znaleźć odległość $\operatorname{dist}(x, A)$ punktu $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ od prostej $A = \{(t, t, 0, \ldots); t \in \mathbb{R}\}$

A jest rozpięte na wektorze $\underline{e} = (1, 1, 0, \ldots)$

dist $(\underline{x}, A)$ to długości dopełnienia prostopadłego
(najmniejsze odległości pomiędzy $\underline{x}$ a prostą A)

Znajdźmy rzut prostopadły $\underline{y}$ elementu $\underline{x}$ na A:

$$\underline{x} = \underline{y} + \alpha \underline{e}$$

$$\langle \underline{x}, \underline{e} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{e} \rangle + \alpha \langle \underline{e}, \underline{e} \rangle = \alpha \langle \underline{e}, \underline{e} \rangle$$

bo $\underline{y} \perp \underline{e}$ z założenia

$$\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{e} \rangle}{\langle \underline{e}, \underline{e} \rangle}$$

$$\langle \underline{x}, \underline{e} \rangle = \langle (x_1, \dots x_n \dots), (1, 1, 0, 0 \dots) \rangle = x_1 + x_2$$

$$\langle \underline{e}, \underline{e} \rangle = \langle (1, 1, 0 \dots), (1, 1, 0 \dots) \rangle = 2$$

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{y} + \frac{x_1 + x_2}{2}(1, 1, 0 \dots)$$

$$\underline{y} = (x_1, x_2 \dots) - \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, 0, \dots\right)$$

$$= \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}, x_3 \dots\right)$$

$$\mathrm{dist}(\underline{x}, A) = \|\underline{y}\| = \sqrt{\left\langle \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}, x_3 \dots\right), \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}, x_3 \dots\right)\right\rangle}$$

$$= \left(\frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + \frac{x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2}{4} + x_3^2 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} x_k^2}$$