Ćwiczenia 3

Note Title 11/23/2008

1. Dowieść, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów p. u. spełniający dla pewnego x $\|x_n\| \to \|x\|$, $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ zbiega do x.

Dowód. $\langle x_n - x, x_n - x\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \overline{\langle x_n, x\rangle} \to$

$\|x\|^2 + \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0 \Rightarrow$

$\|x_n - x\|^2 \to 0 \Rightarrow x_n \to x$

2. Niech $T: H \to H$ będzie operatorem liniowym ograniczonym na zespolonej p. u. H

Pokazać, że jeśli $\forall_{x \in H} \langle Tx, x \rangle = 0 \Rightarrow T \equiv 0$.

Pokazać też, że twierdzenie to nie zachodzi w przestrzeniach rzeczywistych.

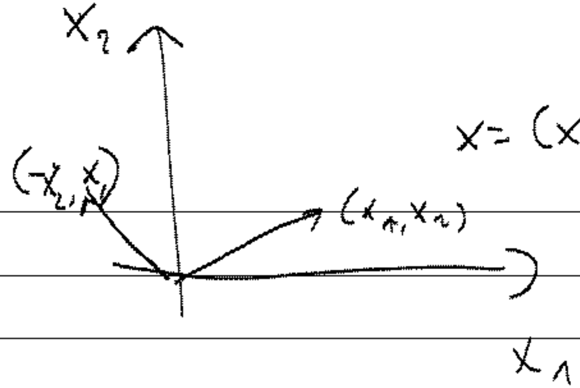
Dowód. Mamy $0 = \langle T(x+y), x+y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \langle Ty, x \rangle$
$+ \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle$

oraz

$0 = \langle T(x+iy), x+iy \rangle = i\langle Ty, x \rangle - i\langle Tx, y \rangle$

skąd $\langle Tx, y \rangle = 0$ dla dow $y \Rightarrow Tx = 0$

dla dow $x \Rightarrow T \equiv 0$



Na przykład obrót o 90°

$x = (x_1, x_2)$

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle (-x_2, x_1), (x_1, x_2) \rangle = 0$$

3. Które z poniższych funkcjonałów są iloczynami skalarnymi w rz. przestrzeni liniowej funkcji ciągłych $\mathcal{C}([0,2])$

a) $$S(x,y) = \int_0^2 |x(t)y(t)|\, dt$$

Nie - S nie jest liniowy ze względu na 1 wsp.

b) $$S(x,y) = \int_0^2 w(t)x(t)y(t)\, dt$$

Tak. Jest dobrze określony (iloczyn funkcji ciągłych)

$0 = \int_0^2 \omega(t) x^2(t)\,dt \Rightarrow \omega(t) x^2(t) \equiv 0$ bo $\omega(t) > 0$

ale to również pociąga $x(t) \equiv 0$. Pozostałe

aksjomaty są oczywiste.

c) $S(x,y) = \int_0^1 x(t) y(t)\,dt$.

Nie $0 = \int_0^1 x^2(t)\,dt \Rightarrow x(t) \equiv 0$ ale

tylko na $[0,1] \Rightarrow$ dowolne na $(1,2]$.

4. Udowodnić, że na $C([0,1])$ norma

$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |x(t)|$ jest mocniejsza niż $\|x\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

Dowód. $\|x\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{t\in[-1;1]} |x(t)| \left(\int_{-1}^{1} dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$

5. Niech $w(t)$ będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$ spełniającą $0 < w_0 \leq w(t) \leq w_1$, $t\in[0,1]$ w_0, w_1 - stałe. Pokazać, że $\|x\|_w = \left(\int_0^1 w(t)|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ jest równoważna z $\|x\|_2$.

Dowód. Mamy

$$\|x\|_w = \left(\int_0^1 w(t)\,|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{w_1}\underbrace{\left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_2} \leq$$

$$\sqrt{\frac{w_1}{w_0}}\left(\int_0^1 w_0(t)\,|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{w_1}{w_0}}\,\|x\|_w$$

6. Które z poniższych zbiorów B są ortogonalne w odpowiednich przestrzeniach unitarnych

a) $B = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, rzecz. $H = L_2([-\ ,\ ])$

$$\langle t^k, t^m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} t^{k+m}\,dt = \frac{1}{k+m+1} t^{k+m+1}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{k+m+1}\left(\pi^{k+m+1} - (-1)^{k+m+1}\pi^{k+m+1}\right) = \frac{1}{k+m+1}\pi^{k+m+1}\left(1-(-1)^{k+m+1}\right)$$

Elementy są prostopadłe tylko gdy $k+m+1$ są parzyste czyli gdy k jest parz., m nieparz. lub odwrotnie

b) $B = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad H = l_2$ rzecz.

$$e_{2n} = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{2n-1},1,-1,0,\dots), \quad e_{2n-1} = (\overbrace{0,0,\dots,0}^{2n-1},1,1,0,\dots)$$

$$e_{2k} \cdot e_{2l} = e_{2k-1} e_{2l-1} = 0$$

$k \neq l$

bzo $l < k$ $\quad k = l+1 \Rightarrow 2k-1 = 2l+2-1 = 2l+1$

$$(0,0,\ldots,\underset{2l-1}{0},\underset{2l}{1},\underset{2l+1}{1},0\ldots) \cdot (\underbrace{0,0,0\ldots 0}_{2l+1},1,1,0\ldots) = 0$$

$e_{2k} \cdot e_{2k-1} = 1 - 1 = 0$ Pozostałe również zero.

c) $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ zesp. $L_2([-\pi,\pi])$

$n \neq m$
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{imt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)t\,dt$$

$$= \frac{1}{n-m}\sin(n-m)t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n-m}\cos(n-m)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

7. Niech $M \subset H$. Pokazać, że $M^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{Lin}\, M}\right)^{\perp}$. Zmaleźć

$\overline{\mathrm{Lin}\left\{ (\delta_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}, (\delta_{3,n})_{n\in\mathbb{N}} \right\}}^{\perp}$

Dowód

$$M \subset \overline{\mathrm{Lin}\, M} \Rightarrow \left(\overline{\mathrm{Lin}\, M}\right)^{\perp} \subset M^{\perp}$$

Niech $x \in M^{\perp} \Rightarrow \underset{y\in M}{\forall} \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \rangle = 0$

dla dow n, $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ i $\{y_1, \dots y_n\} \subset M$. Z ciągłości

iloczynu sk. $z \in \overline{\mathrm{Lin}\, M} \Rightarrow z = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n y_i^n \Rightarrow$

$\langle x, z\rangle = 0$.

Żeby znaleźć dopełnienie

$\overline{\operatorname{Lin}\{(\delta_{2,n})_{n\in\mathbb{N}},(\delta_{3,n})_{n\in\mathbb{N}}\}}^{\perp}$ skorzystamy z poprzedniej

części. Wystarczy znaleźć $\{(\delta_{2,n})_{n\in\mathbb{N}},(\delta_{3,n})_{n\in\mathbb{N}}\}^{\perp}$

czyli wszystkie wektory prostopadłe do

$(0,1,0,\ldots\ldots)$ i $(0,0,1,0,\ldots\ldots)$

Będą to wszystkie wektory postaci

$(x_1,0,0,x_4,x_5,\ldots) \in \ell^2$.