Ćwiczenia 2

Note Title 11/16/2008

1. Które z poniższych funkcjonałów są iloczynami skalarnymi w przestrzeni $\mathbb{R}^2$

a) $S((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \to x_1+x_2+y_1+y_2$

b) $S((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \to x_1y_1+x_2y_2+3$

c) $S((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \to 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$

---

a) $S(\underline{x},\underline{x}) = 2x_1+2x_2 \Rightarrow S(\underline{x},\underline{x})=0$ dla $x_1=-x_2 \; (\neq 0)$

b) $S(\underline{0},\underline{0}) = 3 \neq 0$

a) i b) <u>nie</u> są iloczynami skalarnymi

c) $S(\underline{x},\underline{x}) = 3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2 = (x_1-x_2)^2+2x_1^2+2x_2^2 = 0$

wtw gdy $x_1=x_2=0$.

Liniowość ze względu na pierwszą współrzędną i symetrie są oczywiste.

2. Które z poniższych funkcjonałów są iloczynami skalarnymi w $\mathbb{C}^2$

a) $s((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = \mathrm{Re}(z_1 w_1) + \mathrm{Im}(z_2 w_2)$

b) $s((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 w_1 + 5 z_2 w_2$

c) $s((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = 2 z_1 \overline{w_1} - z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2}$

- -

a) $s(\underline{z}, \underline{z}) = \mathrm{Re}\, z_1^2 + \mathrm{Im}\, z_2^2$. Taking $z = (i, 0)$

$s((0,i),(0,i)) = \mathrm{Re}\, i^2 + \mathrm{Im}\, 0^2 = -1 < 0$

nie jest ~~to~~ iloczyn skalarny.

b) $S(\underline{z},\underline{z}) = z_1^2 + 5z_2^2$. Dla $z_1 = i$, $z_2 = 0$ mamy $S((i,0),(i,0)) = i^2 = -1 < 0$

Również nie ma skośnej symetrii

$S(w,z) = \overline{S(z,w)}$ (np dla $z = (1,0)$, $w = (i,0)$ mamy $S(w,z) = i = S(z,w)$) więc nie jest spełniony warunek skośnej symetrii.

c) Mamy

$$S(\underline{z},\underline{z}) = 2|z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) + |z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1|^2 = 0 \quad \text{wtw } z_1 = z_2 = 0$$

Liniowość ze względu na pierwszą współrzędną jest oczywista. Skośna symetria również, gdyż sprzężenie jest stosowane tylko na drugim argumencie.

3. Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ i $\underline{X} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$

Czy norma $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ może być generowana przez iloczyn skalarny?

Niech $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = i$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 0$, $\underline{x} = (\xi_1, \xi_2)$

$\underline{y} = (\eta_1, \eta_2)$ $\quad \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|(2, i)\|^2$

$= (2+1)^2 = 9$, $\quad \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|(-2, i)\|^2 = (2+1)^2 = 9$

$\|\underline{x}\|^2 = 1^2 = 1$, $\quad \|\underline{y}\|^2 = 2^2 = 4$

$$9 + 9 \neq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4$$

Prawo równoległoboku nie jest spełnione.

4. Pokazać, że $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \overline{z_2}$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}$ generującym zwykłą normę. Podaj interpretację ortogonalności w tym przypadku.

$\langle z, z \rangle = |z|^2 = 0$ wtw $z = 0$. Pozostałe aksjomaty są oczywiste.

Rozważmy $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} = 0$, skąd

$0 = |z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2| \Rightarrow z_1 = 0$ lub $z_2 = 0$.

Czyli w $\mathbb{C}$ nie ma niezerowych par wektorów prostopadłych.

Wynika to również z faktu, że $\mathbb{C}$ jest jednowymiarową przestrzenią unitarną i Zadania 8 (gdyż wektory prostopadłe muszą być liniowo niezależne).

5. Podaj przykład, że w zespolonej przestrzeni unitarnej twierdzenie Pitagorasa zachodzi dla nieortogonalnych elementów.

Rozważmy $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}$$

Niech $z = 1$, $w = i$, wówczas

$$\|z+w\|^2 = \|1+i\|^2 = \langle 1+i, 1+i \rangle = |1+i|^2 = 2$$

$$\|z\|^2 = \|1\|^2 = |1|^2 = 1, \quad \|i\|^2 = |i|^2 = 1$$

Zatem $\|z+w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$. Jednak

$$\langle 1, i \rangle = -i \neq 0$$

6. Udowodnić, że w zespolonej przestrzeni unitarnej $x \perp y$ wtw gdy $\|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Wiemy, że $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Również $\|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle y, x \rangle$

$-i\langle x,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2.$

W drugą stronę $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 \Rightarrow Re\langle x,y\rangle = 0$

zaś $0 = \|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = -i2\, Im\langle x,y\rangle.$

Czyli $Re\langle x,y\rangle = Im\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0.$

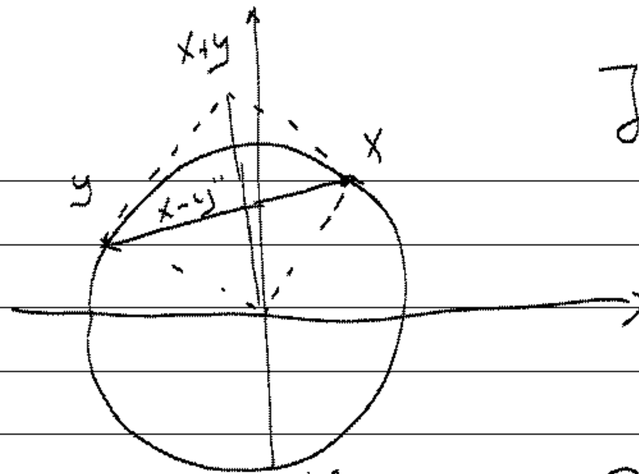
7. Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Wykazać, że $\|x\| = \|y\|$ pociąga

$$\langle x+y, x-y\rangle = 0.$$

Podać interpretację geometryczną w $\mathbb{R}^2$.

$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 - \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 0$

gdyż w p. rzeczywistej iloczyn skalarny jest sym.



Jeśli $\|x\| = \|y\|$, to $x+y$ i $x-y$ są przekątnymi rombu a więc są prostopadłe.

8. Niech $x, y \in H$, $x, y \neq 0$. Pokazać, że jeśli $x \perp y$, to x, y są liniowo niezależne. Uogólnić ten wynik na przypadek większej liczby wektorów ortogonalnych.

Jeśli $x = \lambda y \Rightarrow \langle x, x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = 0$, co pociąga ze sobą $x = 0$.

Ogólnie, jeśli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest zbiorem niezerowych wekt. wzajemnie ortogonalnych: $x_i \perp x_j$ $i,j=1,\dots,n$, $i\neq j$ to jest to zbiór liniowo niezależny. Założmy, że tak nie jest, to istnieje układ $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ skalarów z których przynajmniej jeden, powiedzmy α_r, jest różny od zera. Tzn

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n = 0 \Rightarrow x_r = \frac{1}{\alpha_r}\left(-\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{r-1}x_{r-1} + \alpha_{r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_n x_n\right)$$

$$\langle x_r, x_r\rangle = -\frac{1}{\alpha_r}\left(-\alpha_1\langle x_1, x_r\rangle + \dots + \alpha_n\langle x_n, x_r\rangle\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $x_r = 0$, sprzeczność.

9. Pokazać, że jeśli $\langle x,u\rangle = \langle y,u\rangle$ dla dowolnego $u\in H$, to $x=y$.

Zapisując $\langle x-y,u\rangle = 0$ i biorąc $u=x-y$ otrzymujemy tezę.

10. Załóżmy, że M_1, M_2 są niepustymi podzbiorami przestrzeni unitarnej H. Dowieść, że $(M_1 \cup M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$.

$x \in (M_1 \cup M_2)^{\perp} \iff \langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_1 \cup M_2} \implies$

$\langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_1}$ i $\langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_2}$

$\implies x \in M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$

Odwrotnie $x \in M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp} \implies \langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_1}$

oraz $\langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_2} \implies \langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M_1 \cup M_2}$

$\implies x \in (M_1 \cup M_2)^{\perp}$

11. Pokazać bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego, że

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = -\frac{1}{4}\left(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2\right).$$

Mamy $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$

$$= 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$

Drugą równość wykazujemy analogicznie.

12. Niech H będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią unitarną, $x,y \in H$. Dowieść, że następujące warunki

są równoważne:

a) $x \perp y$

b) $\|x\| \leq \|x+ty\| \quad \forall t \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

c) $\|x+ty\| = \|x-ty\| \quad \forall_{t \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})}$

- -

Niech $x \perp y$. Wówczas również $x \perp ty$, $t \in \mathbb{K}$ [!]

Twierdzenie Pitagorasa daje

$$\|x \pm ty\| = \|x\|^2 + |t|^2 \|y\|^2$$

skąd $\quad \|x\|^2 \leq \|x+ty\|^2$ dla dowolnego $t \in \mathbb{K}$

oraz $\quad \|x+ty\| = \|x-ty\|$.

Załóżmy teraz, że zachodzi b) i $y \neq 0$ (w przeciwnym przypadku $x \perp y$ od razu). Wykluczając uchamel jak przy dowodzie nierówności Schwarza mamy

$$\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \quad \text{dla} \quad t = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$

Założenie b) daje więc $|\langle x,y\rangle|^2 \leq 0$ czyli $x \perp y$.

Załóżmy teraz, że spełnione jest c). Ponownie wykorzystując wzorki z nierówności Schwarza mamy

$$\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + |t|^2\|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\{\bar{t}\langle x,y\rangle\}$$

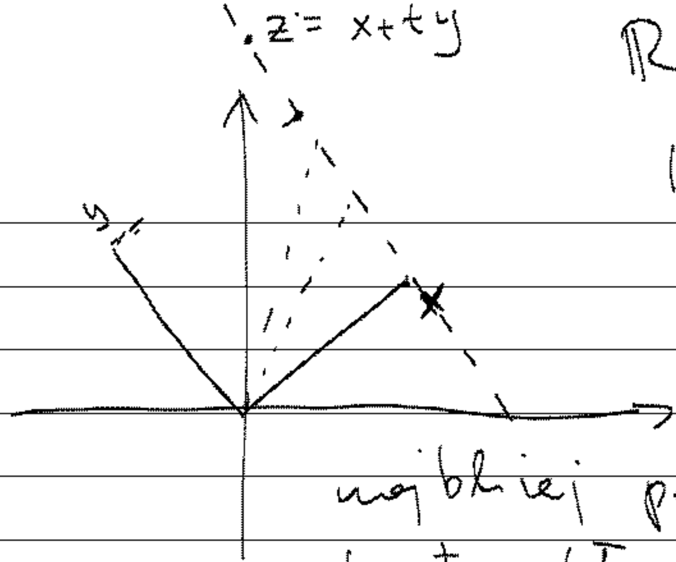
$$\|x-ty\|^2 = \|x\|^2 + |t|^2\|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\{\bar{t}\langle x,y\rangle\}$$

Czyli $\mathrm{Re}\{\bar{t}\langle x,y\rangle\} = 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{C}$

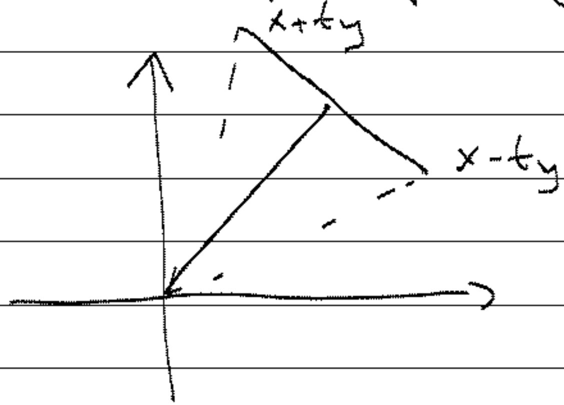
Przyjmując $t = \langle x,y\rangle$ otrzymujemy $|\langle x,y\rangle|^2 = 0$

skąd $x \perp y$.

$\mathbb{R}^2$



$\|x\| \le \|x+ty\|$ mówi na prostej $x+ty$, x ma najmniejszą normę, czyli na dowolnej prostej równoległej do y najbliżej początku układu jest element prostopadły do y.



Warunek c) pokazuje, że $x \perp y$ jest równoważny temu, że trójkąt o wierzchołkach 0, $x+ty$, $x-ty$ jest równoramienny.