Ćwiczenia 13/11/08

Note Title 11/12/2008

Zadanie 1. Niech X będzie p.u. X jest ośrodkowa wtw gdy istnieje przeliczalny zbiór $A \subset X$ taki że $\overline{\operatorname{Lin} A} = X$, gdzie $\operatorname{Lin} A$ jest powłoką liniową zbioru A:

$$\operatorname{Lin} A := \{x \in X;\ \exists_{n \in \mathbb{N}}\ \exists_{a_1, \dots, a_n \in A}\ \exists_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}}\ x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n\}$$

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli X jest ośrodkowa, to $\exists$ przeliczalny A t.ż $\overline{A} = X$. $A \subseteq X \supseteq \operatorname{Lin} A \supseteq A$, skąd $X = \overline{A} \subseteq \overline{\operatorname{Lin} A} \subseteq \overline{X} = X \Rightarrow \overline{\operatorname{Lin} A} = X$.

$\Leftarrow$ Przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny i gęsty w $\mathbb{R}$. Niech $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ będzie przeliczalny. Oznaczmy $B_n = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n\}$ dla ustalonego n. Odwzorowanie

$$\mathbb{Q}^n \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \to \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

jest surjekcją, zatem B_n jest przeliczalny.

Niech B będzie zbiorem wszystkich kombinacji liniowych elementów A o współczynnikach

wymiernych. Wówczas $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ i B jest przeliczalny. Niech $x \in \mathrm{Lin}\, A \Rightarrow$
$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ dla pewnych $\alpha_k \in \mathbb{R}$ i $a_k \in A$. Z gęstości $\mathbb{Q}^n$ w $\mathbb{R}^n$ możemy dobrać $(\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}) \to (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
Ponieważ w skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej zbieżność po współrzędnych pociąga zbieżność w normie, mamy

$$x^{(k)} = \alpha_1^{(k)} a_1 + \dots + \alpha_n^{(k)} a_n \to \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = x$$

Oznacza to, że $x \in \overline{B}$, czyli

$$\mathrm{Lin}\, A \subseteq \overline{B}$$

To pociąga za sobą

$$X = \overline{\mathrm{Lin}\, A} \subseteq \overline{\overline{B}} = \overline{B}$$

czyli $\overline{B} = X$ a zatem X jest ośrodkowa.

Zadanie 2.

Wyprowadzić z poprzedniego zadania, że przestrzenie c_0, c, l_p $(p \geq 1)$, $C([0,1])$ i dowolne przestrzenie unormowane skończenie wymiarowe są ośrodkowe

a) $X = c_0$: Rozważmy $A = \{e_n := (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}\}$

tzn $\{ \overbrace{(1,0,0 \dots)}^{e_1}, \overbrace{(0,1,0 \dots)}^{e_2}, \dots \}$

Niech $x \in c_0 \Rightarrow x = (a_1, a_2, \dots a_n \dots)$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Oznaczając $x_n = (a_1 \dots, a_n, 0 \dots)$.

mamy $\|x - x_n\| = \sup\limits_{k > n} |a_k| \to 0$ (!)

$x_n \in \operatorname{Lin} A$ gdyż $x_n = a_1(1,0 \dots) + a_2(0,1 \dots)$

$\dots + a_n(0,0,\dots,\underset{\nearrow n\text{-te miejsce}}{1},0 \dots)$

Zatem $X = \overline{\operatorname{Lin} A}$

b) $X = c$: Wówczas $x \in c \Rightarrow x = (a_1, a_2, \dots)$

i $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Możemy więc zapisać

$x = (a_1 - a, a_2 - a, \dots) + (a, a, a \dots)$

Podobnie jak poprzednio x jest granicą x_n postaci

$$x_n = (a_1 - a)e_1 + \dots (a_n - a)e_n + a e_0$$

gdzie $e_0 = (1, 1, \dots 1 \dots)$

Zbiór $\tilde{A} = A \cup \{e_0\}$ jest przeliczalny i dowolny $x \in X$ można przybliżać elementami z $\mathrm{Lin}\,\tilde{A}$ zatem $X = \overline{\mathrm{Lin}\,\tilde{A}}$.

$X = \ell^p$: praca domowa

$X = C([0,1])$ z tw. Weierstrassa wiadomo, że wielomiany są gęste w $C([0,1])$ zaś każdy wielomian to kombinacja liniowa el. zbioru $A = \{1, x, x^2, \dots\}$ który jest przeliczalny.

Zadanie 3. Niech $(X, \|\cdot\|_1)$ i $(X, \|\cdot\|_2)$ przy czym norma $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza niż $\|\cdot\|_2$. Wykazać, że jeśli $(X, \|\cdot\|_1)$ jest ośrodkowa, to $(X, \|\cdot\|_2)$ jest ośrodkowa.

Dowód. Niech A będzie ośrodkiem w $(X, \|\cdot\|_1)$ tzn $\forall_{x \in X} \exists_{(x_n) \subset A} \|x_n - x\|_1 \to 0$

Ponieważ $\|\cdot\|_1$ jest mocniejsza, to również $\|x_n - x\|_2 \to 0$ a zatem A jest ośrodkiem w $(X, \|\cdot\|_2)$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_1)$ ośrodkowa i że przy pewnej słabszej normie $\|\cdot\|_2$, $Y = \overline{X}^{\|\cdot\|_2}$. Dowieść, że Y jest ośrodkowa.

Dowód. Niech A będzie ośrodkiem w X. $A \subset Y$ gdyż ciągi stałe są zbieżne. Niech $y \in Y$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $x \in X$ i $a \in A$ t.ż

$\|y - x\|_2 < \varepsilon$ $\|x - a\|_1 < \varepsilon \Rightarrow \|y - a\|_2 \leq \|y - x\|_2 + \|x - a\|_2 \leq \varepsilon + c\|x - a\|_1 = \varepsilon(1 + c)$.

<u>Bazy Schaudera.</u> Niech X będzie p.u. i $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą Schaudera w X jeśli dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

<u>Zadanie 5</u> Wykazać, że baza Schaudera jest zbiorem liniowo niezależnym.

<u>Dowód.</u> Załóżmy, że tak nie jest, tzn.

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{dla pewnego } n$$

i (α_i) nie wszystkich równych zeru.

Wówczas

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

gdzie $\alpha_i = 0$ $i > n$. Ponieważ nie wszystkie $\alpha_i = 0$, nie ma jednoznaczności.

Zadanie 6 Wykazać, że c_0 ma bazę Schaudera.

Dowód. Rozważmy $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\}_{k\in\mathbb{N}}$

Dla $x \in c_0$, $x = (x_1, x_2, \dots)$. Wykażemy, że

$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Oznaczmy $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$

tzn $s_m = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$

$$y_m = \|x - s_m\| = \|(0, \dots 0, x_{m+1}, \dots)\| = \sup_{n>m} |x_n|$$

Ciąg $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący. Ponieważ $x_n \to 0$, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie że $|x_n| < \varepsilon$ dla $n > N$ a zatem $|y_m| < \varepsilon$ dla $m > N-1$.

Oznacza to, że $\|x - s_m\| \to 0$ i $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Załóżmy, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' e_n$ i dla pewnego k $x_k' \neq x_k$. Wówczas

$$0 = \|x - x\| = \sup_n |x_n' - x_n|$$

$$\geq |x_k' - x_k| > 0$$

Sprzeczność.

<u>Zadanie 7</u> Załóżmy, że X jest p.u. posiadającą bazę Schaudera. Wówczas X jest ośrodkowa.

<u>Dowód</u>. Jeśli $x \in X$, to $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ gdzie $\mathcal{E} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest bazą Schaudera.

Oznacza to, że

$$x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} x_n e_n$$

gdzie $\sum_{n=1}^{k} x_n e_n \in \operatorname{Lin} \mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ jest przeliczalna, $x \in \overline{\operatorname{Lin} \mathcal{E}}$

więc teza wynika z zadania 1.