WYKŁAD 4

Zbiory ortonormalne i szeregi Fouriera.

Zbiór M w przestrzeni Hilberta H nazywamy ortonormalnym wtw

$$\forall_{x \in M} \ \|x\| = 1 \ , \ \forall_{\substack{x, y \in M \\ x \neq y}} \ x \perp y$$

Stwierdzenie 2. Jeśli $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ jest ortonormalny i $x \in \operatorname{Lin} M$, to

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

$c_i = \langle x, e_i \rangle$ (c_i nazywają się współczynnikami Fouriera elementu x (względem bazy M)). Ponadto

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

Dowód $x \in \operatorname{Lin} M \Rightarrow$

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i \underline{e_i} \quad \text{dla pewnych } c_i$$

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i \langle e_i, e_j \rangle = c_j$$

Zbiór M jest ortonormalny $\langle e_i, e_j \rangle =$

$$= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} c_i e_i , \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \langle \underline{c_i} e_i , \underline{c_j} e_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} c_i \overline{c_j} \overbrace{\langle e_i , e_j \rangle}^{=\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \overline{c_i} = \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2$$

Po co to wszystko?

$$A = \{\underbrace{v_1, \ldots v_n}_{\subset}\}$$ liniowo niezależnych

H p. Hilberta

$x \notin A$

Znaleźć element y w $\operatorname{Lin} A$

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \operatorname{Lin} A} \|x - z\|$$

Znaleźć $(c_1, \ldots c_n)$, takie że

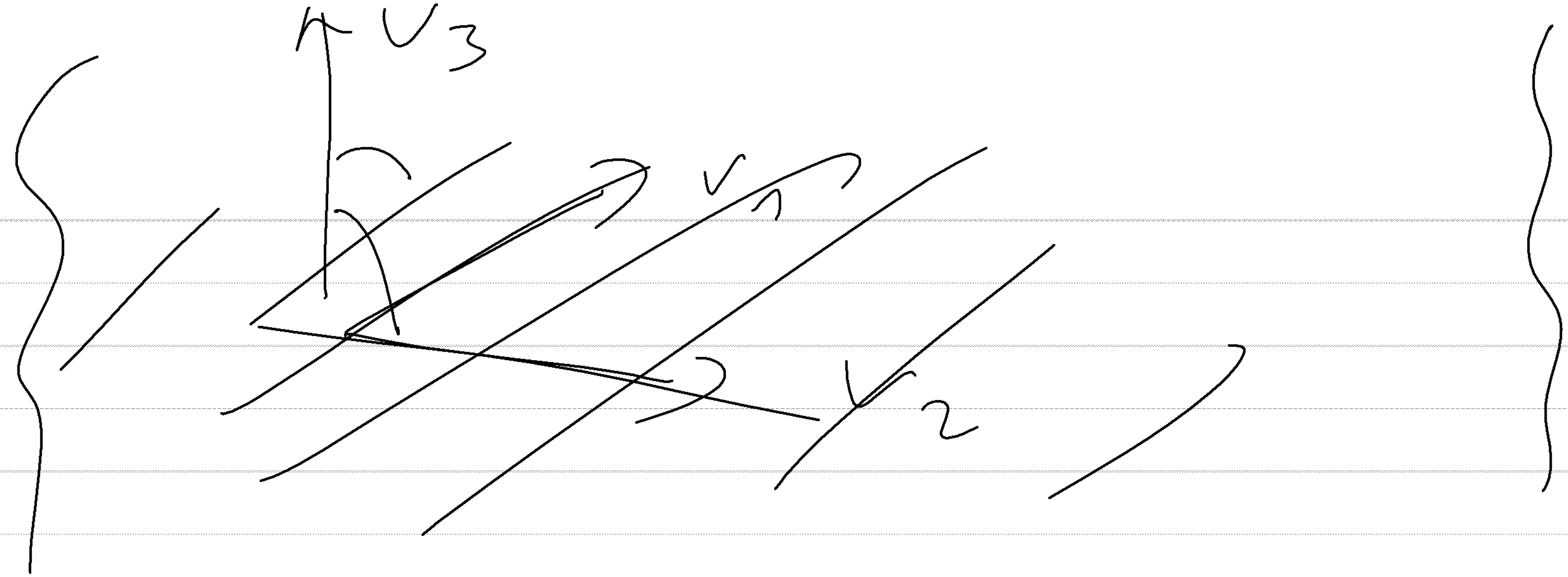
$$\| x - \overbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot v_i}^{y} \| \leq \| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \|$$

dla dowolnego układu skalarów $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Najlepszą aproksymacją jest element

$$\underline{x - y \perp \operatorname{Lin} A}$$

(na ćwiczeniach udowodnimy, że

$$e \perp \operatorname{Lin} A \iff e \perp A$$



Zatem $\forall_j \; x - y \perp v_j$

$\Big(\text{bo } A = \{ v_1, \dots, v_j \}$

$$\forall_j \; \underbrace{\Big\langle x - \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot v_i, \; v_j \Big\rangle}_{} = 0$$

$$\perp_A$$

$$\underbrace{\langle x, v_j \rangle}_{b_j} = \sum_{i=1}^{k} c_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{a_{ij}}$$

$$a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \dots + a_{1n} c_n = b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{k1} c_1 + \dots \dots \dots \quad a_{kn} c_n = b_n$$

Ponieważ wiemy, że istnieje dokładnie jeden element y takie $(c_1 \dots c_n)$ spełniające

porząsny układ, macierz $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$
jest nieosobliwa.

$$\{v_1, \dots, v_n\} \iff \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle, & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \dots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

lin. niezal.

Jeśli mamy układ $(c_1, \dots, c_n)$ ~~to~~
możemy policzyć $\delta = dist(x, Lin\, A) =$
$= \|x - y\|$

$$\delta^2 = \|x-y\|^2 = \langle x - \underset{\underset{\operatorname{Lin} A}{\in}}{y}, \overbrace{x-y}^{x-y \perp \operatorname{Lin} A} \rangle =$$

$$= \langle x, x-y \rangle =$$

$$\langle x, x - \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \overline{c_i} \underbrace{\langle x, v_i \rangle}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} c_i \langle v_i, x \rangle \qquad v_i = e_i$$

$$c_i = \langle x, e_i \rangle$$

Jeśli $A = \{e_1, \dots, e_n\}$ jest

układem elementów ortonormalnych

procedura się upraszcza bo

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ czyli macierz

$$\{e_{ij}\}_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & - & - & - \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \langle x, e_i \rangle$$

Wzór na odległość przyjmuje postać

$$\delta^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2\right) \quad (2.1.5)$$

Wniosek (nierówności Bessela)

Jeśli $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ortonormalnym w H, to

$$\forall_{x \in H} \quad \boxed{\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2}$$

1 **Dowód** z (2.1.5) wynika, że dla każdego k

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Szereg jest monotoniczny, czyli istnieje:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sup_k \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Twierdzenie 2.1.4 Niech $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie układem ortonormalnym w p. Hilberta H i niech $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem skalarów.

Szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \tag{2.1.8}$$

jest zbieżny wtw gdy

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < +\infty \qquad (2.1.9)$$

W takim przypadku

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2. \qquad (2.1.10)$$

Ponadto szereg (2.1.8) jest bezwarunkowo zbieżny, tzn. jeśli

$(\alpha_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolną permutacją ciągu $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{j_n} e_{j_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Dowód. Weźmy dowolne wskaźniki $m > n$. Wówczas

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j , \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\rangle \tag{*}$$

(2.1.9)

$$= \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_j \bar{\alpha}_k \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{= \delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2 .$$

to jest różnica sum częściowych dla szeregu skal.

Ponieważ jesteśmy w przestrzeni $\boxed{\text{Hilberta}}$ (2.1.8)
(czyli zupełnej)

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \qquad \| S_m - S_n \|^2$$

$$= \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j e_j \right\|^2$$

Szereg (2.1.8) jest zbieżny wtw (*)

zbiega do 0 gdy $n, m \to \infty$.

Aby udowodnić (2.1.10) wykorzystamy (*):

$$\forall_{\substack{n,m \\ m>n}} \quad \left\| \sum_{j=n}^{m} \alpha_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=n}^{m} |\alpha_j|^2$$

$n=1$; $m \to \infty$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 .$$

Zbieżność bezwarunkowa

Weźmy $(\alpha_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (permutacje $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$)

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{j_n} e_{j_n} \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

$$\begin{cases} s_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e_n \\ t_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_{j_n} e_{j_n} \end{cases}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{j_n}|^2}_{\|z\|^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2}_{\|x\|^2}$$

$$\|x - z\|^2 = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|^2} + \underbrace{\langle z, z\rangle}_{\|z\|^2} - \langle x, z\rangle - \langle z, x\rangle$$

z ciągł. iloczynu skalarnego

$$\langle z, x\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle t_m, s_m\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{m} \alpha_{j_n} e_{j_n}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le j_m \le m}} |\alpha_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2$$

bo $\forall_{j_m} \exists_M \; j_m \le M$.

Tak samo liczymy $\langle x, z\rangle$,

czyli $\|x-z\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$. $\blacksquare$

Twierdzenie (2.15) Niech M będzie dowolnym niepustym układem ortonormalnym w p. Hilb. H. Wówczas

1. $\forall_{x \in H}$ zbiór $M_x = \{y ;\ \langle x, y \rangle \neq 0\}$ jest co najwyżej przeliczalny.

2. Suma $Px = \sum_{y \in M_x}' \langle x, y \rangle y$

jest dobrze określone w tym sensie
że nie zależy od sposobu w jaki zostały
ponumerowane elementy M_x.

3. P_x jest rzutowaniem na $\overline{\operatorname{lin} M}$

Dowód 1) Ustalmy $x \in H$ i zdefiniujmy

$\forall_n \quad M_n = \{ y \in M ; \langle x, y \rangle \geq \frac{1}{n} \}$

Ten zbiór jest skończony (liczba
elementów nie przekracza $\|x\|^2 n^2$).
Jeśli by tak nie było, to moglibyśmy

wybieć elementy $y_1, y_2, \dots, y_k \in M_n$ $k > \|x\|^2 n^2$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} |\langle x, y_i\rangle|^2} \leq \|x\|^2$$

nierówność Bessela

$$\vee\!\!/\quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k} 1 = \frac{k}{n^2} \Longrightarrow k \leq n^2\|x\|^2$$

Sprzeczność.

$$M_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$ suma przeliczalna zbiorów skończonych

Zatem $y \in M_x \Longleftrightarrow \underline{|\langle x, y\rangle| \neq 0} \Longleftrightarrow$

istnieje n takie, że $|\langle x, y\rangle| \geq \frac{1}{n}$

Czyli M_x przeliczalny.

2) Wynika z twierdzenia poprzedniego i p. 1.

3) Wprowadzimy oznaczenie $\mathcal{M} = \overline{\mathrm{Lin}\, M}$

Czy $P_x = \sum\limits_{y \in M_x}' \underline{\langle x, y\rangle y}$ jest rzutowaniem

prost. na $\mathcal{M}$. $\quad x \perp \mathcal{M} \quad P_x = 0$?

$x \in \mathcal{M} \quad P_x = x$

$x \perp \mathcal{M} \Leftarrow\Rightarrow x \perp M$ (ukł. ortonormalny w H)

$\langle x, y\rangle = 0 \ \forall_{y \in M} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$

$\forall_{y \in M_x} \Rightarrow P_x = 0$

Jeśli $x \in M \Rightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\substack{y_1 \ldots y_n \in M \\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{C}(\mathbb{R})}}$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\|^2 < \varepsilon$$

$$\bigvee\!/$$

$$\underline{\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, y_i \rangle y_i \right\|^2}$$ (czyli to też jest mniejsze od ε)

Możemy założyć, że powyższej sumie mamy wyłącznie elementy $y_i \in M_x$

Wiemy, że M_x jest przeliczalny, więc ustawmy M_x w ciąg $(\underbrace{y_1, y_2 \dots y_n}_{\text{te elementy występują powyżej}}, y_{n+1} \dots)$ te są nowe

Wzór (2.1.6) w notatkach angielskich mówi że

$$\underline{\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, y_j \rangle y_j \right\|^2} = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, y_j \rangle|^2$$

to maleje

to rośnie z n

W związku z tym

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, y_j \rangle y_j \right\|^2 \leq \varepsilon$$

z dowolności ε

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, y_j \rangle y_j = \underline{\sum_{y \in M_x} \langle x, y \rangle y}$$

$$= P_x$$

$\blacksquare$

Definicja. Mówimy że układ ortonormalny M w p. Hilberta H jest <u>baza</u> <u>ortonormalna</u> w H

szereg Fouriera
elementu x

jeśli $\forall_{x \in H}$

$$x = \sum_{y \in M_x}' \langle x, y \rangle y$$

Twierdzenie 2.1.6 Niech M będzie ukł. ortonormalnym w H. Następujące warunki są równoważne:

a) M jest układem zupełnym (tzn $M^{\perp} = \{0\}$)

b) $H = \overline{\mathrm{Lin}\, M}$

c) M jest bazą ortonormalną

d) $\forall_{x \in H} \quad \|x\|^2 = \sum_{y \in M_x}' |\langle x, y \rangle|^2 \qquad (2.1.13)$

(tożsamości Parsevala) nie b)

a) => b) Zał. że $\overline{\mathrm{Lin}\, M} \neq H$ => z tw. o rzucie ortogonalnym dla dow. $x \notin \overline{\mathrm{Lin}\, M}$ mamy $x = \underset{\overline{\mathrm{Lin}\, M}}{y} + z \in \overline{\mathrm{Lin}\, M}^{\perp}$ czyli sprzeczność z a)

b) => c) wynika z poprzedniego twierdzenia.

c) => d) Jeśli M jest bazą ortonormalną to $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, y_j \rangle y_j$

gdzie (y_j) jest dowolnie uporządkowanym zbiorem M_x. Czyli

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{m} \underline{\langle x, y_j\rangle} \underline{y_j}, \sum_{j=1}^{m} \underline{\langle x, y_j\rangle y_j} \right\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |\langle x, y_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{|\langle x, y_j\rangle|^2}_{0}$$

d) $\Rightarrow$ a) Jeśli zachodzi wzoru Parsevala

i $x \perp \operatorname{Lin} M \Rightarrow x \perp M_x \Rightarrow$

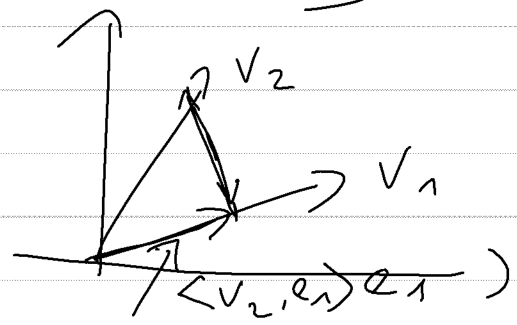
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, y_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0 = \|x\|^2$$

czyli $x = 0$.

Twierdzenie 2.1.8 Niech $H \neq \{0\}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wówczas istnieje przeliczalna bazę ortonormalną w H.

Dowód. Część 1. Załóżmy że $\dim H < +\infty$ powiedzmy n. Istnieje więc w H bazę algebraiczną $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Bazę B można przekształcić w bazę ortonormalną za pomocą tzw procedury Grama-Schmidta.

Definiujemy $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$,



$$\tilde{e}_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1$$

$$\langle \tilde{e}_2, e_1\rangle = \langle v_2, e_1\rangle - \langle v_2, e_1\rangle \overbrace{\langle e_1, e_1\rangle}^{1} = 0$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} . \qquad \operatorname{Lin}\{e_1, e_2\} = \operatorname{Lin}\{v_1, v_2\}$$

$$e_i \in \operatorname{Lin}\{v_1, v_2\} \qquad i = 1, 2$$

$$v_i \in \operatorname{Lin}\{e_1, e_2\} \implies \operatorname{Lin}\{v_1, v_2\}$$

$$\cup$$

$$\operatorname{Lin}\{e_1, e_2\}$$

Załóżmy, że skonstruowaliśmy układ

$k < n$ $\quad e_1 \ldots\ldots e_k$ elementów ortonormalnych

takich, że $\underline{\operatorname{Lin}\{e_1 \ldots\ldots e_n\}} = \underline{\operatorname{Lin}\{v_1 \ldots\ldots v_n\}}$

v_{k+1}

$$\underline{\tilde{e}_{k+1}} = v_{k+1} - \operatorname{rzut} v_{k+1} \text{ na } \operatorname{Lin}\{e_1 \ldots e_n\}$$

$$= v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_j \rangle e_j \in \mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$$

Teď jen popmedme $\langle \tilde{e}_{k+1}, e_j \rangle = 0$

Ale $j \leq k$

$$\langle \tilde{e}_{k+1}, e_i \rangle = \langle v_{k+1}, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \langle v_{k+1}, e_i \rangle - \langle v_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

$$\mathrm{Lin}\{\tilde{e}_{k+1}, e_1 \dots e_k\} = \mathrm{Lin}\{v_1 \dots v_{k+1}\}$$

$$e_k = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|} \Rightarrow \|e_k\| = 1.$$

Przypadek 2. $\dim H = \infty$

Wykorzystujemy założenie, że H jest ośrodkowa tzn. istnieje $\underline{V = (v_1, v_2, \ldots\ldots)}$ gęsty w H. Zdefiniujemy podciąg w następujący sposób

$e_1 = v_1$, $e_2 = v_{n_2}$ gdzie v_{n_2} jest pierwszym elementem zbioru V który jest lin. niezależny od v_1. Jako e_3 bierzemy element $v_{n_3} \notin \mathrm{Lin}\{v_1, v_{n_2}\}$ itd indukcyjnie konstruujemy zbiór

$\{e_1, e_2, \dots\} = \{v_1, v_{n_2}, v_{n_3}, \dots\}$

Zbiór ten jest nieskończony. Istotnie, gdyby tak nie było, to dla pewnego n_0 każdy element $v_n \in X_0 = \underline{\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_{n_{n_0}}\}}$

cyli $V \subset X_0$ ale

$$H = \overline{V} \subset \overline{X_0} = X_0$$

$$H \subset X_0$$

sprzeczność z założeniem, że $\dim H = +\infty$

Z konstrukcji $\{v_1, v_{n_2}, v_{n_3}, v_{n_4} \dots\}$ jest liniowo niezależny. Poza tym, jeśli weźmy $v_n \in V$, to

$$v_n \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_{n_2} \dots v_{n_i}\}$$

dla wszystkich $n_i \geq n$.

Do zbioru $\{v_1, v_{n_2}, v_{n_3} \dots\}$ możemy zastosować procedurę Grama-Schmidta. Zdefiniujmy zbiór $\{f_1, f_2, f_3 \dots\}$ jako zbiór otrzymany z ortonormalizacji zbioru

$\{v_1, v_{n_2}, v_{n_3} \ldots\}$. Musimy pokazać, że ten zbiór jest bazą: wykażemy, że jest on zupełny, czyli, że

$$\mathrm{Lin}\{f_1 f_2 \ldots\} = \mathcal{H}$$

Z konstrukcji Grama-Schmidta mamy że $\forall_i \quad \mathrm{Lin}\{f_1 \ldots f_i\} = \mathrm{Lin}\{v_1 \ldots v_{n_i}\}$

i wiemy, że $\forall_n \, v_n \in \mathrm{Lin}\{v_1 \ldots v_{n_i}\}$

$n_i \geq n$

$$v_n \in \mathrm{Lin}\{f_1 \dots f_i\}$$

$$\forall_n \quad v_n \in \mathrm{Lin}\{f_1 \dots f_n \dots\}$$

$$V \subset \underline{\mathrm{Lin}\{f_1, \dots f_n \dots\}}$$

$$\mathcal{H} = \overline{V} \subset \mathrm{Lin}\{f_1 \dots f_n \dots\} \subset \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}\{f_1 \dots f_n \dots\}}$$

Z poprzedniego twierdzenia oznacza to

że $\{f_1 \ldots f_n \ldots\}$ jest bazą w H. $\boxed{\text{Ta}}$

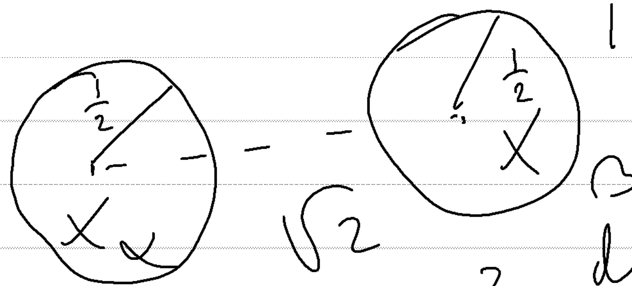
Uwagi. a) Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną. Dowód opiera się na Lemacie Zorna. Baza w nieośrodkowej przestrzeni Hilberta nie musi być przeliczalna.

Z drugiej strony, w ośrodkowej przestrzeni Hilberta każda baza ortonormalna jest przeliczalna. W istocie, jeśli $\{x_\alpha\}$

gdyby zbiór był nieprzeliczalny, to oznaczając przez B_α kulę o środku w x_α i promieniu $\frac{1}{2}$, mielibyśmy wobec

$$\alpha \neq \beta \quad \|x_\alpha - x_\beta\|^2 = \langle x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_\alpha, x_\alpha \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle x_\beta, x_\beta \rangle}_{=1} = 2$$



Wobec tego jakikolwiek ośrodek nie przecinałby się z dużą ilością kul B_α a więc nie mógłby być ośrodkiem.

Twierdzenie 2.1.10. Każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią l_2. Wobec tego wszystkie ośrodkowe p. $\mathcal{H}$ są ze sobą izometrycznie izomorficzne.

Dowód. Polega na wykorzystaniu tw. o istnieniu bazy. Dla p. H $\mathcal{H}$ mamy bazę ortonormalną $\{e_1, e_2, \ldots\}$

$$x \in \mathcal{H} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Ciąg (α_n) jest wyznaczony w sposób jednoznaczny przez x : $\underline{\alpha_n} = \langle x, e_n \rangle$

$$T_{\mathcal{H}} x = (\alpha_n)_{n\in N}$$ jest wzajemnie

jednoznaczne. Co więcej, jeśli $(\alpha_n)_{n\in N} \in \ell_2$

$$\underline{x} := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \qquad T_{\mathcal{H}}^{-1} (\alpha_n)_{n\in N} = x$$

Na mocy tożsamości Parsevala

$$\|x\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$$

$$\|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2} = \|(\alpha_n)_{n\in N}\|_{\ell_2}$$

czyli odwzorowanie $T_{\mathcal{H}}$ jest izometrią i izomorfizmem.

Jeśli mamy $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ to izometria pomiędzy nimi dana jest

$$T_{\mathcal{H}_2}^{-1} T_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

Jest to izometryczny izomorfizm. $\square$

BAZA ORTONORMALNA W $L_2([-\pi, \pi])$

$$B_1 = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

jest układem ortonormalnym w $L_2([-\pi, \pi])$

$$B_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t \dots \right\}$$

układ ortonormalny w $L_2([-\pi,\pi])$

$L_2([-\pi,\pi]) \overset{2}{=} \overline{\mathrm{Lin}\, B_1} = \overline{\mathrm{Lin}\, B_2}$ (ze wzorów Eulera

mamy $\mathrm{Lin}\, B_1 = \mathrm{Lin}\, B_2$).

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} = \underbrace{b_0 + \sum_{n=1}^{N} (b_n \cos nt + c_n \sin nt)}$$

są to wielomiany trygonometryczne

Oznaczmy $I = [-\pi, \pi]$. Wystarczy pokazać że zbiór wielomianów trygonometrycznych jest gęsty w $L_2(I)$.

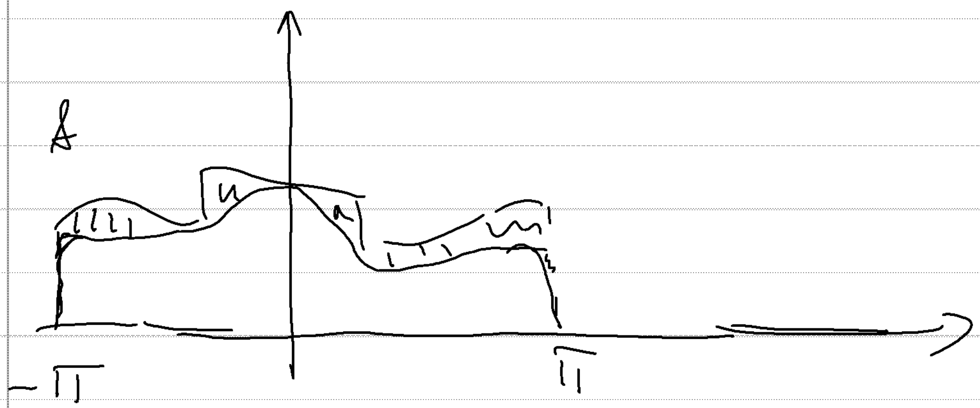
Przypomnijmy, co to jest $L_2(I)$.

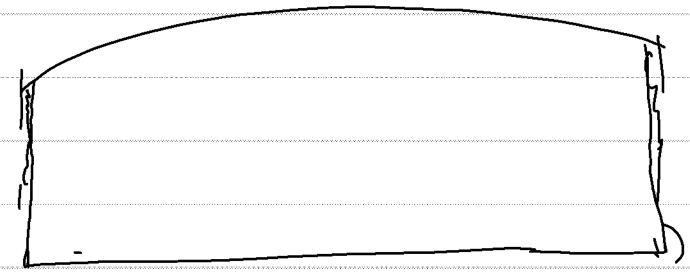
$L_2(I)$ jest uzupełnieniem zbioru funkcji ciągłych. Z tego wynika, że funkcje ciągłe są gęste w $L_2(I)$. Tzn. $\forall_{\varepsilon > 0} \ \forall_{f \in L_2(I)}$

$$\exists_{g} \ \| f - g \|_{L_2(I)} < \varepsilon$$

Możemy wziąć g spełniające warunek

$$g(-\pi) = g(\pi) = 0$$





Skonstruujemy wielomiany trygonometryczne Q_n przybliżające funkcję g sp. warunek $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ jednostajnie na $[-\pi, \pi]$

t.ż. $\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{Q \text{ wiel tryg}} \; \sup_{t \in \bar{I}} |g(t) - Q(t)| < \varepsilon$

To wystarczy i mamy dla dow $f \in L_2(\bar{I})$

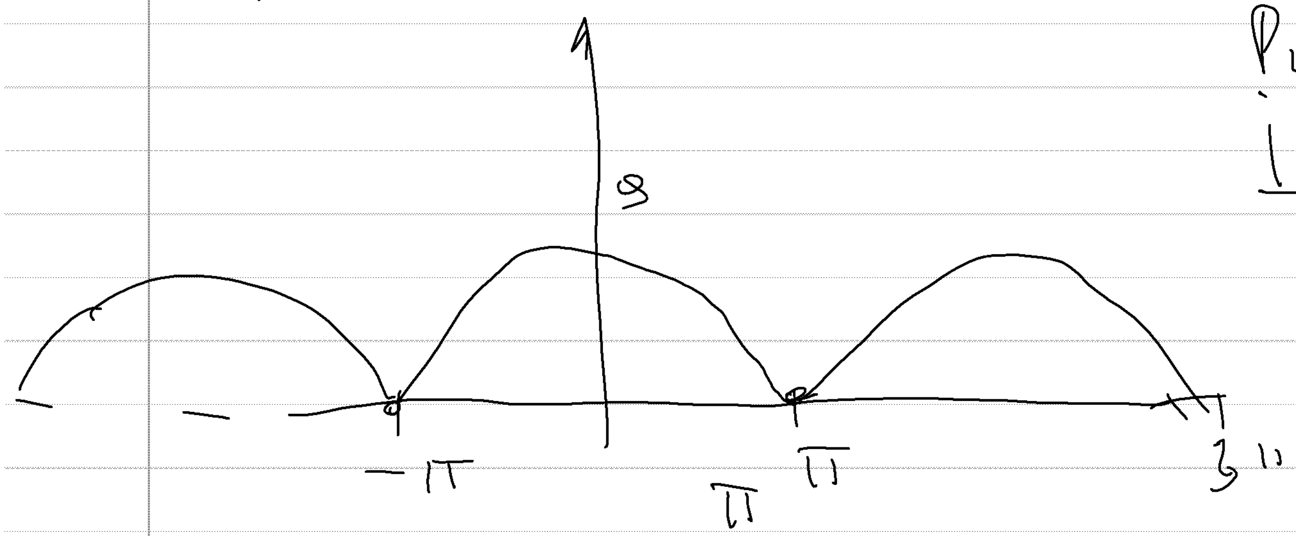
$$\|f - \underline{Q}\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - Q\|_2$$

$$\leq \varepsilon + \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - Q(t)|^2 dt}$$

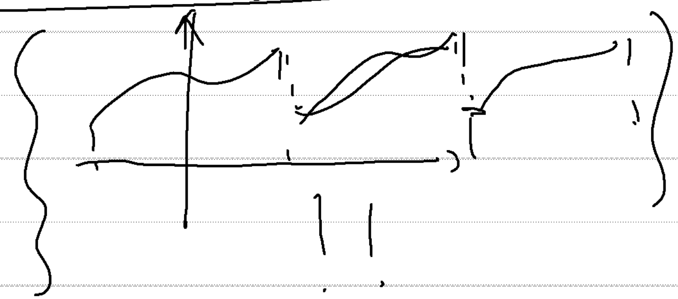
$$\leq \varepsilon + \sqrt{2\pi}\,\varepsilon = C\varepsilon$$

Weźmy naszą funkcję g i przedłużmy

jej okresowo na $\mathbb{R}$



Przedłużenie okresowe jest ciągłe



$$Q(t) = \int_{-\pi} g(t-s)\, P(s)\, ds$$

wielomian trygonometryczny

Jest $\circledast$ wielomian trygonometryczny.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)\,P(s)\,ds \overset{u=t-s}{=} -\int_{t+\pi}^{t-\pi} g(u)\,P(t-u)\,du$$

$$= \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(u)\,P(t-u)\,du$$

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N}{}' a_k e^{ikt} \Rightarrow P(t-u) = \sum_{k=-N}^{N}{}' a_k e^{ik(t-u)}$$

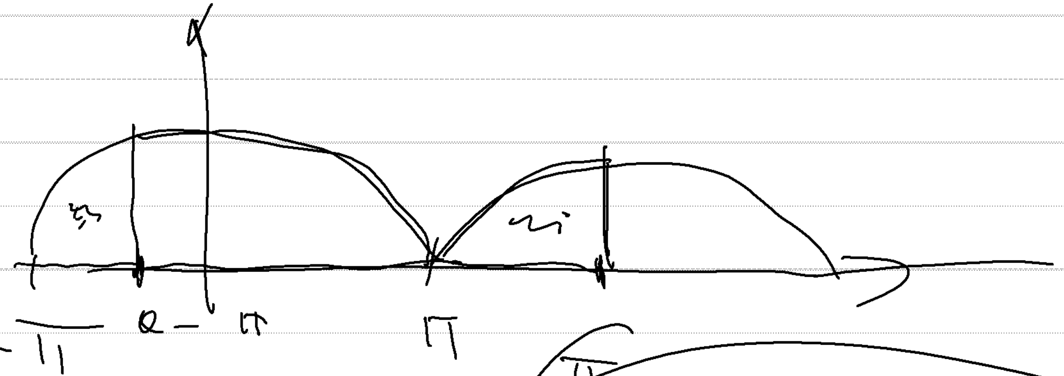
$$\sum_{k=-N}^{N}{}' a_k e^{ikt} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \underline{g(u)\,e^{-iku}}\,du$$

$g(u)e^{-iku}$ f. okres.

okresow

okresowe

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt \quad \text{okres } 2\pi \quad = \int_{a-\pi}^{a+\pi} F(t)\,dt = \int_{a-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+\pi}$$



$$= \sum_{k=-N}^{N}{}' a_k e^{ikt} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-iku}\,du$$

to jest stałe

$$= \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{ikt}$$

Funkcja

$$Q(t) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)P(s)\,ds$$

jest wielomianem trygonometrycznym.

Interesuje nas oszacowanie

$$\left| g(t) - \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)P(s)\,ds \right|$$

Załóżmy, że możesz sobie wybrać ułamkowy $P(s)$ tak by $\underline{P(s) \geq 0}$ i

$$\underline{\int_{-T_1}^{T_1} P(s)\,ds = 1}$$

$$= \left| g(t) \cdot 1 - \int_{-T_1}^{T_1} \right|$$

$$= \left| g(t) \int_{-T}^{T} P(s)\,ds - \int_{-T_1}^{T} \right|$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [g(t) - g(t-s)] P(s)\, ds \right|$$

g była ciągła na $\mathbb{R}$, okresowa $\Rightarrow$ g jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta}$ $|s| < \delta$ $\Rightarrow |g(t-s) - g(t)| < \varepsilon$

$$< \int_{-\delta}^{\delta} \big|[g(t) - g(t-s)]\big| P(s)\, ds + \underbrace{\int_{(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} \big|[g(t) - g(t-s)]\big| P(s)\, ds}_{I_2}$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} P(s)\,ds \quad + I_2$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} P(s)\,ds \quad + I_2$$

$$\varepsilon \quad + I_2$$

$$I_2 = \int_{(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} \left|\left[g(t) - g(t-s)\right]\right| P(s)\,ds \quad \leq$$

$$\leq 2\|g\|_\infty \int_{(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} P(s)\,ds$$

Można pokazać, że funkcje

$$P_k(t) = c_k\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$$

są wielomianami trygonometrycznymi.

$$|\cos t| \leq 1 \,, \quad P_k(t) \geq 0$$

c_k - stałe dobrane tak aby

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_k(t)\,dt = 1$$

$$P_k(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad \text{jednostajnie po } t$$

gdy $\pi > |t| > \delta$. Czyli

$$\int_{(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} P_n(s)\,ds \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$$

Wobec tego, dla każdego $\varepsilon > 0$ dobierzemy n tak by

$$\left| g(t) - \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s) P_n(s)\,ds \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich $t \in (-\pi, \pi)$ $\blacksquare$