Stochastyczne równania różniczkowe, studia II stopnia

Niech W_t (ewentualnie W, $W(t)$), $t \geqslant 0$ oznacza proces Wienera oraz niech $W_0 = 0$. Niech $\mathbf{W} = (W^1, W^2, ..., W^n)$ oznacza n-wymiarowy proces Wienera.

1. Pokazać, że dla ustalonego $t \geqslant 0$ znienna losowa W_t ma rozkład $N(0,t)$ oraz, dla ustalonych $s, t \geqslant 0$, $\text{cov}(W_s, W_t) = \min\{s,t\}$.

2. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa X_n przyjmuje wartosci $n^{\alpha/2}$ i 0 z prawdopodobieństwami odpowiednio $1/n$ i $1 - 1/n$, gdzie $\alpha > 1$. Wykaż, że X_n zbiega do 0 według prawdopodobieństwa, a nie zbiega do 0 w przestrzeni L^2.

3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa X_n przyjmuje wartosci $1/n$ i $(-1/n)$, obie z prawdopodobienstwem równym $\frac{1}{2}$. Zbadaj zbieżność ciagu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ według prawdopodobieństwa, prawie wszędzie i w przestrzeni L^2.

4. Zbadaj zbieżność według prawdopodobieństwa, prawie wszędzie, w L^2 ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $(1 - 1/n, 1 + 1/n)$.

5. Dane sa ciagi (X_n) i (Y_n) zbiezne wgedług prawdopodobieństwa do X i Y odpowiednio. Wykazać, ze $(X_n Y_n)$ zbiega wgedług prawdopodobienstwa do XY .

6. Pokazać, że proces Wienera jest średniokwadratowo ciągły i nie jest średniokwadratowo różniczkowalny.

7. Ustalmy $b > 0$. Dla dowolnej stałej rzeczywistej a wyznaczyć $\int_0^b a\, dW_t$.

8. Ustalmy $b > 0$. Pokazać, że całka Itô: $\int_0^b \exp(W_t)\, dW_t$ istnieje.

9. Ustalmy $T > 0$. Skonstruować kontrprzykład pokazujący, że calka Itô nie posiada następującej własności:
$$\left| \int_0^T g\, dW_t \right| \leqslant \int_0^T |g|\ dW_t.$$

10. Ustalmy $b > 0$. Dla dowolnej stałej rzeczywistej a wyznaczyć $\int_0^b (W_t + a)\, dW_t$.

11. Korzystając ze wzoru Itô, obliczyć różniczke stochastyczną procesu:
$$A_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin W_t.$$
Sprawdzić, czy proces A_t, $t \geqslant 0$ jest martyngałem.

12. Niech $\beta_k(t) = \mathbb{E}[W_t^k]$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$. Wykorzystując wzór Ito pokaż, że
$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geqslant 2.$$
Następnie pokaż, że $\mathbb{E}[W_t^4] = 3t^2$ i znajdź $\mathbb{E}[W_t^6]$.

13. Niech $X(t) := \int_0^t W(s) ds$. Pokaż, że
$$\forall_{t>0} \quad \mathbb{E}(X^2(t)) = \frac{t^3}{3}.$$

14. Niech $X(t) := \int_0^t W(s)ds$. Pokaż, że

$$\forall_{t>0} \quad \mathbb{E}(\exp(\lambda X(t))) = \exp \frac{\lambda^2 t^3}{6}.$$

15. Niech $X(t) := e^{-t} W(e^{2t})$. Pokaż, że

$$\forall_{-\infty<s,t<+\infty} \quad \mathbb{E}(X(t)X(s)) = e^{-|t-s|}.$$

16. Wykaż, że jeśli $G, H \in L^2(0,T)$, to

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T G\, dW \int_0^T H\, dW\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T GH\, dt\right).$$

17. Pokaż, że

$$\int_0^T W^2 dW = \frac{1}{3} W^3(T) - \int_0^T W\, dt.$$

18. Znaleźć różniczkę stochastyczną procesu W_t^n.

19. Znaleźć różniczkę stochastyczną procesu $\exp(W_t)$.Jakie SRR spełnia ten proces?

20. Znajdź rózniczkę stochastyczną sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

21. Wykaż, że proces

$$Y := \exp\left[\int_0^t g\, dW - 1/2 \int_0^t g^2\, ds\right]$$

spełnia równanie

$$dY = gY dW.$$

Wykorzystj ten fakt i pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T g\, dW\right)\right] = \exp\left[1/2 \int_0^T g^2\, ds\right].$$

22. Niech $u := u(x,t)$ będzie rozwiązaniem równania

$$u_t + \frac{1}{2} u_{xx} = 0.$$

Wykaż, że

$$\mathbb{E}\left[u(W(t),t)\right] = u(0,0).$$

23. Niech $X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s)ds + \int_{t_0}^t b(s)dW_s$. Znaleźć różniczkę stochastyczną procesu Y_t, gdzie $Y_t = \exp(X_t)$. Jakie SRR spełnia proces Y_t, jeśli założymy, że $2a(t) = -b^2(t)$? Jakie jest rozwiązanie SRR $dY_t = Y_t dW_t$, $Y_0 = 1$.

24. Rozwiązać stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad t \geqslant 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Znajdź $\mathbb{E}X_t$, Var X_t.

25. Znaleźć $d(\cos W_t)$ oraz $d(\sin W_t)$. Jaki układ SRR i jakie wektorowe SRR spełnia proces Y_t, gdzie $Y_t = (\cos W_t, \sin W_t)^T$, zwany procesem Wienera na okręgu jednostkowym?

26. Jakie wektorowe SRR spełnia proces Y_t, gdzie $Y_t = (\cos W_t, \sin W_t)^T$?

27. Niech $dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$. Podastawiając $Z_t = F(t, X_t)$ możemy zamienić postać równania na $dZ_t = m_1(t, Z_t)dt + \sigma_1(t, Z_t)dW_t$ (zakładamy, ze f jest ściśle monotoniczna wzgledem x, ciagła, o ciagłych pochodnych czastkowych f_x, f_{xx} oraz f_t). Znaleźć postać m_1 oraz σ_1. Dla jkiej funkcji f równanie redukuje się do: $\sigma_1 := 1$, $m_1 := 0$.

28. Przypuśćmy, że X_t spełnia równanie:

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \sigma(s) dW_s.$$

Rozpatrując $f(X_t) = \ln X_t$ i korzystając z reguły Itô wykazać, że X_t dany jest wzorem

$$X_t = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - 1/2 \int_0^t \sigma^2(s)ds).$$

29. Niech X_t spełnia SRR

$$dX_t = X_t(m(t) + \sigma(t)dW_t), \quad t > 0,$$

gdzie m i σ sa nielosowe. Pokazać, że X_t ma postać

$$X_t = X_0 \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s + \int_0^t g(s)ds),$$

i znaleźć postać funkcji g.

30. Pokazać, że ogólną postacią rozwiązania SRR

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + b(t)dW_t$$

jest

$$X_t = \exp(\int_{t_0}^t a_1(s)ds) \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \frac{a_2(s)}{\exp(\int_{t_0}^t a_1(s)ds)} ds + \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{\int_{t_0}^t \exp(a_1(s)ds)} dW_s) \right).$$

31. Rozwiązać równanie Langevina z szumem addytywnym

$$dX_t = -aX_t dt + bdW_t, \quad t_0 = 0.$$

32. Rozwiązać równanie liniowe z szumem addytywnym

$$dX_t = \left\langle \frac{2}{t+1} X_t + b(1+t)^2 \right\rangle dt + b(1+t)^2 dW_t, \quad X_0 = 1.$$

33. Rozwiązać SRR równanie liniowe z szumem addytywnym

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t, \quad ,0 \leqslant t < T \quad X_0 = 1.$$

34. Rozwiązać równanie Langevina z szumem multiplikatywnym

$$dX_t = -aX_t dt + bX_t dW_t, \quad t_0 = 0.$$

35. Znaleźć rozwiązania SRR

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b(t)X_t + b_2(t))dW_t.$$

36. Stosując podstawienie $X = u(W)$ rozwiąż SRR

$$\begin{cases} dX = -\frac{1}{2}e^{-2X}dt + e^{-X}dW \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

37. Rozwiąż SRR: $dX = -Xdt + e^{-t}dW$

38. Rozwiązać liniowe SRR z szumem multiplikatywnym

$$dX_t = (aX_t + c)dt + (bX_t + d)dW_t.$$

39. Niech σ będzie dodatnią, gładką funkcją. Rozwiąż

$$\begin{cases} dX = \frac{1}{2}\sigma'(X)\sigma(X)dt + \sigma(X)dW \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

40. (Linear Boltzmann Machines) Rozwiąż $dX = \theta(\gamma - X)dt + \sqrt{2\tau}dW$. Wyznacz $\mathbb{E}X$, Var X.

41. (Harmonic Oscillator) Niech $\mathbf{X} = (X^1, X^2)$ oznacza odpowiednio położenie i prędkość oscylatora. Rozwiąż równanie:

$$d\mathbf{X} = a\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} dW.$$

42. Rozwiąż równania:

- Stock Prices: Exponential Brownian Motion with Drift

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t;$$

- Vasiceck(1977) Interest rate model: OU Process

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t;$$

- Cox-ingersol-Ross (1985) Interest rate model

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t;$$

- Logistic Growth

$$dX_t = aX_t(1 - X_t/k)dt + bX_t dW_t;$$

- Logistic Growth II

$$dX_t = aX_t(1 - X_t/k)dt + bX_t(1 - X_t/k)dW_t;$$

- Logistic Growth III

$$dX_t = rX_t(1 - X_t/k)dt - srX_t^2 dW_t;$$

- Gompertz Growth

$$dX_t = \left[\alpha X_t + rX_t \log\left(\frac{k}{X_t}\right)\right] dt + bX_t dW_t;$$

43. Wykorzystując wzór Itô zapisać następujące procesy X w standardowej formie:

$$dX_t = u(t;\omega)dt + v(t;\omega)dW_t.$$

- $X_t = (x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}W_t)^3$, $x > 0$ jest ustalona liczbą;
- $X_t = (W_t)^2$;
- $X = (W^1 + W^2 + W^3, (W^2)^2 - W^1W^3)$;

44. Niech $c, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Niech

$$X_t := \exp\left[ct + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (W_t^i)\right].$$

Znajdź dX_t.

45. Niech $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Rozwiąż SRR (This is a model for exponential growth with several independent white noise sources in the relative growth rate)

$$dX_t := rX_t dt + X_t \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dW_t^i\right].$$

Znajdź dX_t.

46. Niech

$$R := |\mathbf{W}| = \left(\sum_{i=1}^{n} (W^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wykaż, że R jest rozwiązaniem stochastycznego równania Bessela

$$dR = \sum_{i=1}^{n} \frac{W^i}{R} dW^i + \frac{n-1}{2R} dt.$$

47. Pokaż, że $\mathbf{X} = (\cos W, \sin W)$ jest rozwiązaniem układu SRR

$$\begin{cases} dX^1 = -\frac{1}{2}X^1 dt - X^2 dW \\ dX^2 = -\frac{1}{2}X^2 dt - X^1 dW. \end{cases}$$

Pokaż, że jeśli $\mathbf{X} = (X^1, X^2)$ jest jakimkolwiek innym rozwiązaniem, to $|\mathbf{X}|$ jest stały.

48. Rozwiąż

$$\begin{cases} dX^1 = dt + dW^1 \\ dX^2 = X^1 dW^2. \end{cases}$$

49. Rozwiąż

$$\begin{cases} dX^1 = X^2 dt + dW^1 \\ dX^2 = X^1 dt + dW^2. \end{cases}$$

50. Rozwiąż

$$\begin{cases} dX^1 = X^2 dt + \alpha dW^1 \\ dX^2 = -X^1 dt + \beta dW^2. \end{cases}$$

(This is a model for a vibrating string subject to a stochastic force).

51. Rozwiąż

$$\begin{bmatrix} dX^1 \\ dX^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW^1 \\ dW^2 \end{bmatrix}.$$