

Imię i nazwisko: _____

W poniższym teście, jeśli podana odpowiedź jest poprawna (Państwa zdaniem), to zaznaczamy ją następująco: T, w przeciwnym wypadku: N. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymujemy +1 punkt, za każdą błędną odpowiedź -0.5 punktu, za brak odpowiedzi 0 punktów. Punktacja: [15,18) punktów - ocena 3, [18,21) punktów - ocena 3.5, [21,25) punktów- ocena 4, [25,28) punktów- ocena 4.5, [28,30] punktów - ocena 5. Powodzenia.

1. Niech $g : X \rightarrow X$ oznacza dyskretny układ dynamiczny, zaś $S_t, t \geq 0$ układ dynamiczny z czasem ciągłym na X .

Twierdzenie Poincare o powracaniu mówi, że każdy zbiór miary różnej od zera nie jest odwiedzany przez kolejne iteracje g prawie każdego x ;

Niech μ będzie probabilistyczną miarą niezmienniczą na X . Wybierając losowo punkt startu x i czas t możemy określić prawdopodobieństwo tego, że $S_t(x) \in A \subset X$ i jest ono równe zero;

Niech $f \in L^1(X, A, \mu)$. Miara μ jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy f jest punktem stałym operatora Frobeniusa-Perrona;

2. Niech dany będzie autonomiczny układ dynamiczny na \mathbb{R}^2 . Aby wykazać, że układ posiada orbitę okresową można wykorzystać:

Twierdzenie o bifurkacji Hopfa;

Twierdzenie Poincare-Bendixona;

Odwzorowanie Poincare;

3. Sprawdź, które z poniższych zdań są prawdziwe. Odpowiedź uzasadnij (policz z boku kartki).

AUD $x' = x, y' = y$ posiada orbitę okresową;

AUD $x' = (x - 2)(x - 3)$ posiada atraktor globalny;

AUD $x' = -x(x - 1)$ posiada zbiór niezmienniczy, jeśli tak to jaki;

4. Rozważmy układ dynamiczny, który we współrzędnych biegunowych dany jest następująco:
 $r' = r(2 - r), \theta' = -1$.

(a) Narysuj na płaszczyźnie oxy portret fazowy tego układu;

(b) Zaznacz na osobnym rysunku zbiór α -graniczny dla tego układu dynamicznego dla $\bar{B}(0, 2)$;

(c) Zaznacz na osobnym rysunku zbiór ω -graniczny dla tego układu dynamicznego dla $\bar{B}(0, 2)$;

5. Zbiór $A \subset X$ nazywamy atraktorem globalnym (dla ustalonego układu dynamicznego w X), jeśli

- A jest zwarty i spełnia warunek jednostajnego przyciągania zbiorów ograniczonych;
- A jest ograniczony, niezmienniczy i spełnia warunek jednostajnego przyciągania zbiorów ograniczonych;
- A jest niezmienniczy;

6. Niech $f \in C^r$, $r > 1$ i niech x_0 będzie hiperbolicznym punktem stałym układu $x' = f(x)$. Wówczas zawsze prawdziwe są następujące zdania:

- Istnieje otoczenie V punktu x_0 , dla którego $W^s(x_0)$ jest rozmaitością klasy C^{r-1} ;
- Istnieje otoczenie V punktu x_0 , dla którego $W_{lok}^s(x_0) = W^s(x_0) \cap V$;
- Istnieje otoczenie V punktu x_0 , dla którego $W_{lok}^u(x_0)$ jest rozmaitością klasy C^{r-1} ;

7. Rozważmy układ dynamiczny $x' = -x(x-3)(x+3)$.

- (a) Narysuj na prostej portret fazowy tego układu;
- (b) Zaznacz na osobnym rysunku atraktor globalny;
- (c) Zaznacz na osobnym rysunku atraktor Iljaszenki;

8. Rozważmy układ dynamiczny $x' = -x(x-3)(x+3)$.

- (a) Zaznacz na osobnym rysunku zbiór ω -graniczny dla tego układu dynamicznego dla $x \in (\infty, 0)$;
- (b) Zaznacz na osobnym rysunku zbiór α -graniczny dla tego układu dynamicznego dla $x \in (\infty, -3)$;
- (c) Zaznacz na osobnym rysunku zbiór α -graniczny dla tego układu dynamicznego dla $x \in (-3, 0)$;

9. Rozważmy równanie $x' = (x^2 - 9)(x^2 + \mu)$.

- Punkt $\mu = -9$ jest punktem bifurkacji;
- Punkt $\mu = -3$ jest punktem bifurkacji;
- Punkt $\mu = 0$ jest punktem bifurkacji;

10. (3 punkty) Rozważmy AUD: $x' = -5x$, $y' = -6y$. Wykaż, że zbiór $[0, 1] \times [0, 1]$ jest zbiorem dodatnio niezmienniczym.