Szymon Głąb

O pewnych problemach deskryptywnej teorii mnogości w analizie rzeczywistej

Praca doktorska

Pracę nad rozprawą finansowano
z grantu promotorskiego nr 1 P03A 02330

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Promotor:
prof. dr hab. Marek Balcerzak

WARSZAWA 2007

Spis treści

Wstęp

Odkrycie zbiorów analitycznych przypisuje się Suslinowi [27], który podał definicję zbioru analitycznego z użyciem operacji (A), ale również scharakteryzował zbiory analityczne na prostej jako rzuty podzbiorów borelowskich (lub podzbiorów typu G_δ) płaszczyzny. Wykazał on również kluczowe twierdzenie o tym, że istnieją zbiory analityczne nieborelowskie. W latach międzywojennych XX wieku opublikowano kilka interesujących wyników pokazujących przykłady zbiorów analitycznych lub koanalitycznych nieborelowskich występujących w analizie rzeczywistej. Wśród nich znane jest twierdzenie Mazurkiewicza [19] o tym, że rodzina wszystkich funkcji ciągłych na $[0, 1]$ różniczkowalnych w każdym punkcie jest zbiorem koanalitycznym nieborelowskim. Zainteresowanie takimi zbiorami wzmogło się począwszy od lat 80-tych XX wieku, gdy odnotowano znaczny postęp badań opisowej teorii mnogości (por. [21], [14], [26]). Pojawiły się techniki dowodowe, za pomocą których podano nowe dowody znanych twierdzeń oraz uzyskano nowe ważne rezultaty dotyczące zbiorów analitycznych i koanalitycznych nieborelowskich występujących w analizie, topologii i teorii miary. Wśród tych technik dowodowych bardzo użyteczna okazała się metoda redukcji do znanych zbiorów Π^1_1–zupełnych za pomocą funkcji ciągłej (borelowskiej). W wielu przykładach jako standardowy zbiór Π^1_1–zupełny występuje zbiór WF drzew dobrze ufundowanych na $\mathbb{N}$.

W niniejszej rozprawie (rozdziały 2–4) zbadano deskryptywną złożoność pewnych naturalnych zbiorów występujących w analizie rzeczywistej. W rozdziale 2 rozważane są zbiory zwarte należące do hiperprzestrzeni $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ opisane przez zachowanie się operatorów porowatości i gęstości Lebesgue'a. Pewne zbiory okazują się być borelowskie odpowiedniego poziomu, a inne Π^1_1–zupełne. Zastosowano metodę redukcji do standardowych zbiorów borelowskich odpowiedniego poziomu oraz do pewnej rodziny $\widetilde{WF}$ drzew dobrze ufundowanych (która jest Π^1_1–zupełna). Największą trudnością w tych dowodach jest konstrukcja stosownego odwzorowania redukującego (ciągłego lub borelowskiego). W rozdziale 4 przedstawiono odpowiednią konstrukcję pokazującą, że zbiór $SS\mathbb{H}^+$ wszystkich autohomeomorfizmów przedziału $[0, 1]$ bez dodatniej i skończonej pochodnej prawostronnej w każdym punkcie $x \in [0, 1)$ jest Π^1_1–zupełny (Twierdzenie 3.5). Zmodyfikowana konstrukcja (Twierdzenie 3.1) potwierdza hipotezę Grafa, Mauldina i Williamsa [11] o tym, że zbiór ściśle singularnych autohomeomorfizmów przedziału $[0, 1]$ jest Π^1_1–zupełny. Wyniki rozdziału 4 nawiązują do klasycznego twierdzenia Mazurkiewicza [19] i jego uogólnienia uzyskanego ostatnio przez Sofronidisa [25]. Modyfikując metodę dowodu z monografii Kechrisa [14], uzyskano istotne uogólnienie obu twierdzeń. Zaproponowano też alternatywną metodę z wykorzystaniem specjalnych drzew dobrze ufundowanych.

Rozdział 5 jest poświęcony zachowaniu się ciągów zbiorów analitycznych w przestrzeni polskiej ze względu na operacje przecięcia i granicy górnej. Laczkovich [17] i Halmos [12] zastanawiali się, czy z faktu, że granica górna $\limsup_{n\in H} A^n$ ciągu zbiorów (A^n) w $\mathbb{R}$ jest zbiorem „dużym" dla każdego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ wynika, że przecięcie $\bigcap_{n\in G} A^n$ jest „duże" dla pewnego $G \in [\mathbb{N}]^\omega$. Halmos znalazł naturalny kontrprzykład, gdy zbiór „duży" oznacza zbiór miary dodatniej, zaś Laczkovich udowodnił prawdziwość powyższej implikacji, gdy (A^n) jest ciągiem zbiorów borelowskich, zaś zbiór „duży" oznacza zbiór nieprzeliczalny. Twierdzenie Laczkovicha uogólnił potem Komjáth [15] na przypadek zbiorów analitycznych. Uwzględniając jego rezultat i przykład Halmosa, naturalne było wprowadzenie własności (nazwanej własnością (K) Komjátha) dla σ–ideału $\mathcal{J}$, który determinuje pojęcia: zbiór „duży" lub zbiór „mały". Głównym wynikiem rozdziału 5 jest rozszerzenie twierdzenia Komjátha na przypadek σ–ideału generowanego przez podział X/E dla relacji równoważności $E \subset X \times X$ typu F_σ na przestrzeni polskiej X (Twierdzenie 5.7). Wzmocnieniem tego twierdzenia jest jego wersja parametryczna (Wniosek 5.13).

Rezultaty rozdziału 2 weszły w skład artykułu [10] przyjętego do druku, zaś odpowiednie wyniki rozdziałów 3 i 4 znalazły się w pracach wysłanych do druku. Praca doktorska została przygotowana w ramach grantu promotorskiego nr 1P03A02330.

Rozdział 1

Podstawowe fakty, oznaczenia i terminologia

1.1 Oznaczenia

Większość stosowanych w rozprawie oznaczeń jest standardowa i zgodna z oznaczeniami używanymi w monografii Kechrisa [14]. Niech $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$. Podobnie jak w [14] symbol $|\cdot|$ w zależności od sytuacji będzie oznaczać wartość bezwzględną liczby rzeczywistej, długość przedziału, liczbę wyrazów ciągu lub moc zbioru. Ta wieloznaczność nie powinna jednak prowadzić do nieporozumień. Dla nieskończonego zbioru A przez $[A]^\omega$ oznaczmy rodzinę nieskończonych i przeliczalnych podzbiorów A, a przez $[A]^{<\omega}$ rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów A. Przestrzeń topologiczną X nazywamy przestrzenią polską, gdy jest ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny. Znanymi przykładami przestrzeni polskich są $\{0,1\}^\mathbb{N}$ (przestrzeń Cantora), $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (przestrzeń Baire'a), $\mathbb{R}$. Ustalmy nieprzeliczalną przestrzeń polską X. Dla liczby porządkowej α takiej, że $1 \le \alpha < \omega_1$, definiujemy hierarchię zbiorów borelowskich w X w następujący sposób: $\Sigma^0_1(X)$ – zbiory otwarte, $\Pi^0_1(X)$ – zbiory domknięte; dla $1 < \alpha < \omega_1$, $\Sigma^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^0_\beta)\}$ oraz $\Pi^0_\alpha(X) = \{X \setminus A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$. W dalszym ciągu zamiast $\Sigma^0_\alpha(X)$, $\Pi^0_\alpha(X)$ będziemy pisać krótko Σ^0_α, Π^0_α. Zbiór $A \subset X$ nazywa się analityczny, gdy jest on rzutem zbioru borelowskiego $B \subset X \times X$ (równoważne definicje zbioru analitycznego można znaleźć w [14, 14.A]). Zbiór $C \subset X$ nazywa się koanalityczny, gdy $X \setminus C$ jest zbiorem analitycznym. Klasy zbiorów analitycznych i koanalitycznych oznaczamy odpowiednio Σ^1_1 oraz Π^1_1.

Przez $\mathcal{K}(X)$ oznaczamy hiperprzestrzeń wszystkich niepustych podzbiorów zwartych przestrzeni X, wyposażoną w topologię Vietorisa, tj. najmniejszą topologię, w której zbiory postaci $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$ oraz $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U\}$ są otwarte, dla dowolnego zbioru U otwartego w X; równoważnie jest to topologia generowana przez metrykę Hausdorffa zadaną wzorem $\rho_H(K, L) = \max(\max_{x\in K} \rho(x, L), \max_{x\in L} \rho(x, K))$, gdzie $\rho(x, A)$ oznacza odległość punktu x od zbioru A w sensie metryki przestrzeni X.

Dla zbioru $A \subset X \times Y$ i punktu $x \in X$ oznaczmy $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$ – jest to cięcie zbioru A generowane przez x.

Niech X będzie przestrzenią polską. Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest zbiorem Γ–hard (gdzie Γ oznacza klasę zbiorów w hierarchii borelowskiej lub rzutowej, tzn. $\Gamma = \Pi^0_\alpha$, Σ^0_α, Π^1_n, Σ^1_n itp.), gdy dla każdej przestrzeni polskiej Y i zbioru $B \in \Gamma(Y)$ istnieje funkcja ciągła $f : Y \to X$ taka, że $f^{-1}(A) = B$. Jeśli dodatkowo $A \in \Gamma(X)$, to zbiór A nazywa się Γ–zupełny. Jeśli w powyższej definicji zastąpimy warunek istnienia funkcji ciągłej przez warunek istnienia funkcji borelowskiej, to otrzymamy tzw. zbiory borelowsko Γ–zupełne. Zbiory Γ–zupełne są „najbardziej skomplikowane" w klasie Γ, co znaczy, że w hierarchii borelowskiej lub rzutowej znajdują się dokładnie w klasie Γ, a nie poniżej; np. zbiór Σ^0_3–zupełny nie jest zbiorem Π^0_3, a zbiór Π^1_1–zupełny nie jest Σ^1_1 (w szczególności nie jest borelowski). Wprost z definicji wnioskujemy, że pojęcie Γ–zupełności jest niezmiennikiem homeomorfizmów. Liczne przykłady zbiorów Γ–zupełnych można znaleźć w [14] - są wśród nich przykłady zbiorów w naturalny sposób pojawiających się w analizie matematycznej oraz zbiory w pewnym sensie „kanoniczne". Te właśnie kanoniczne przykłady będą dla nas miały duże znaczenie, gdyż, po pierwsze, mają one przejrzystą budowę kombinatoryczną, a po drugie, dają się one stosunkowo prosto wykorzystać do pokazania Γ–zupełności innych zbiorów – jeśli $B \in \Gamma(Y)$ oraz istnieją: zbiór $A \subset X$, który jest Γ–zupełny i ciągła funkcja $f : X \to Y$ o tej własności, że $f^{-1}(B) = A$, to B także jest Γ–zupełny (wynika to wprost z definicji Γ–zupełności). Zatem aby pokazać, że zbiór B jest Γ–zupełny, wystarczy dobrać odpowiedni Γ–zupełny zbiór kanoniczny A i funkcję f.

1.2 Kanoniczne zbiory Γ–zupełne

Poniżej przedstawimy przykłady zbiorów Γ–zupełnych, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

Fakt 1.1 *[14, 23.A] Zbiór $C_3 = \{\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \infty\}$ jest Π^0_3–zupełny ($F_{\sigma\delta}$–zupełny).*

Fakt 1.2 *[14, 23.A] Zbiór* $N_2 = \{\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N} \exists n > k \ (\alpha(n) = 0)\}$ *jest* Π^0_2*–zupełny (*G_δ*-zupełny).*

Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Przez $A^{<\mathbb{N}}$ oznaczmy zbiór wszystkich ciągów skończonych (wraz z ciągiem pustym) o wyrazach ze zbioru A. Zbiór $T \subset A^{<\mathbb{N}}$ nazywa się drzewem na A, gdy ciąg pusty należy do T oraz z faktu, że $(a(0), ..., a(n)) \in T$ wynika, że $(a(0), ..., a(k)) \in T$ dla wszystkich $k < n$. Ciałem drzewa T nazywa się zbiór $\{x \in A^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \quad (x(0), x(1), ..., x(n)) \in T\}$ wszystkich nieskończonych gałęzi drzewa T, który oznaczamy przez $[T]$. Drzewo T nazywa się dobrze ufundowanym, gdy $[T] = \emptyset$, inaczej mówiąc, gdy T nie ma nieskończonych gałęzi. W dalszym ciągu wszystkie rozważane drzewa będą drzewami na $\mathbb{N}$. Drzewo możemy utożsamiać z jego funkcją charakterystyczną, a co za tym idzie zbiór wszystkich drzew Tr możemy utożsamiać z podzbiorem $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ (jako przeliczalny produkt przestrzeni $\{0,1\}$, przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ jest homeomorficzna z przestrzenią Cantora). Okazuje się, że Tr jest podzbiorem typu G_δ w przestrzeni $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, zatem Tr można rozważać jako przestrzeń polską.

Fakt 1.3 *[14, 32.B] Zbiór* WF *wszystkich dobrze ufundowanych drzew jest* Π^1_1*–zupełnym podzbiorem przestrzeni* Tr *wszystkich drzew na* $\mathbb{N}$.

Rozważmy podprzestrzeń wszystkich drzew Tr zdefiniowaną następująco

$$\widetilde{Tr} = \{T \in Tr : \forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (s\hat{\ }n \in T \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad s\hat{\ }m \in T)\} =$$

$$\bigcap_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\{T \in Tr : s\hat{\ }n \notin T\} \cup \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{T \in Tr : s\hat{\ }m \in T\}),$$

gdzie $s\hat{\ }n$ oznacza konkatenację ciągu $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, która rozszerza ten ciąg o ostatni wyraz n. Stąd wynika, że $\widetilde{Tr}$ jest przestrzenią polską, gdyż jest domkniętym podzbiorem przestrzeni polskiej Tr. Przez $\widetilde{WF}$ oznaczamy $WF \cap \widetilde{Tr}$. Przez UB oznaczmy zbiór wszystkich drzew T takich, że ciało $[T]$ jest zbiorem jednoelementowym (drzewo T ma dokładnie jedną nieskończoną gałąź). Przez $\widetilde{UB}$ oznaczymy $UB \cap \widetilde{Tr}$. Mówimy, że zbiory rozłączne $A, B \subset X$ dadzą się borelowsko rozdzielić, gdy istnieje zbiór borelowski $C \subset X$ taki, że $A \subset C$ i $C \cap B = \emptyset$.

Fakt 1.4 *Zbiór* $\widetilde{WF}$ *jest* Π^1_1*–zupełnym podzbiorem przestrzeni* $\widetilde{Tr}$*. Ponadto* $\widetilde{WF}$ *i* $\widetilde{UB}$ *są parą zbiorów koanalitycznych, które nie dają się borelowsko oddzielić.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $T \in Tr$

$$T \in WF \iff T \cup \{s\hat{\ }m \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : (\exists n \in \mathbb{N}\ s\hat{\ }n \in T) \text{ i } m \in \mathbb{N}\} \in \widetilde{WF}.$$

Na mocy Faktu 1.3 zbiór WF jest Π^1_1–zupełny. Następujące odwzorowanie

$$(*)\ \ Tr \ni T \mapsto T \cup \{s\hat{\ }m \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : (\exists n \in \mathbb{N}\ s\hat{\ }n \in T) \text{ i } m \in \mathbb{N}\} \in \widetilde{Tr}$$

jest borelowskie jako granica ciągu odwzorowań ciągłych $R_k : Tr \to \widetilde{Tr}$, $k \in \mathbb{N}$, zdefiniowanych następująco

$$R_k(T) = T \cup \{s\hat{\ }m \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : (\exists n < k\ s\hat{\ }n \in T) \text{ oraz } m < k\},\ \ T \in Tr.$$

Wiadomo, że pojęcia Π^1_1–zupełności i borelowskiej Π^1_1–zupełności są równoważne (patrz [13]). Zatem $\widetilde{WF}$ jest Π^1_1–zupełnym podzbiorem $\widetilde{Tr}$.

Wiadomo, że WF i UB są parą zbiorów koanalitycznych, które nie dają się borelowsko oddzielić (patrz [14, 35.2]). Gdyby $\widetilde{WF}$ i $\widetilde{UB}$ dały się borelowsko oddzielić, to odwzorowanie opisane w $(*)$ świadczyłoby o tym, że także WF i UB dają się borelowsko oddzielić, co jest niemożliwe. □

Rozdział 2

Zbiory zwarte opisane przez operatory gęstości i porowatości

W tym rozdziale wyznaczymy złożoność deskryptywną podzbiorów hiperprzestrzeni $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ zdefiniowanych przy użyciu operatora porowatości oraz operatora gęstości Lebesgue'a. Zarówno porowatość jak i gęstość Lebesgue'a określają lokalną wielkość zbioru w otoczeniu ustalonego punktu. Pojęcia te grają istotną rolę w analizie matematycznej (patrz [4]). Poniższe rozważania dotyczące porowatości mają swoje źródło w pracy [23] Pelanta i Zelený'ego, gdzie wykazano, że zwarte zbiory σ–porowate są Π^1_1–zupełnym podzbiorem $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Wynik ten uogólnili Zajiček i Zelený w pracy [29] na inne typy porowatości. Deskryptywne własności porowatości były także badane w pracy [32]. Wiele faktów dotyczących porowatości można znaleźć w przeglądowych artykułach [30] and [31].

Niech $E \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $R > 0$. Przez $\lambda^+(x, R, E)$ oznaczmy $\sup\{b - a : (a, b) \subset (x, x + R) \setminus E\}$ (jeśli przedział $(a, b) \subset (x, x + R) \setminus E$ nie istnieje, to przyjmujemy $\lambda^+(x, R, E) = 0$). Prawostronną porowatością zbioru E w punkcie x nazywamy liczbę

$$p^+(E, x) = \limsup_{R \to 0^+} \frac{\lambda^+(x, R, E)}{R}.$$

Analogicznie definiujemy lewostronną porowatość zbioru E w punkcie x i oznaczamy ją symbolem $p^-(E, x)$. Mówimy, że zbiór E jest porowaty (silnie porowaty) z prawej strony punktu x, gdy $p^+(E, x) > 0$ ($p^+(E, x) = 1$). Zbiór E nazywamy obustronnie porowatym (silnie obustronnie porowatym) w x, gdy jest porowaty (silnie porowaty) jednocześnie z prawej i lewej strony punktu x.

Niech μ będzie miarą Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$. Dla mierzalnego podzbioru $E \subset \mathbb{R}$ oraz punktu $x \in \mathbb{R}$, przez $d^+(x, E)$ oznaczamy prawostronną gęstość zbioru E w punkcie

x, tzn. liczbę $d^+(x,E) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mu([0,h]\cap E)}{h}$, przy założeniu, że ta granica istnieje. Symbolem $\underline{d^+}(x,E)$ oznaczamy dolną prawostronną gęstość zbioru E w x, to znaczy liczbę $\liminf_{h\to 0^+} \frac{\mu([0,h]\cap E)}{h}$ (ta granica zawsze istnieje). Podobnie definiujemy $\overline{d^+}(x,E)$ – górną prawostronną gęstość zbioru E w punkcie x. Oczywiście $0 \le \underline{d^+}(x,E) \le \overline{d^+}(x,E) \le 1$. Jeżeli $d^+(x,E) = 1$, to x nazywamy prawostronnym punktem gęstości zbioru E. Analogicznie definiujemy dolną i górną lewostronną gęstość $\underline{d^-}(x,E)$ i $\overline{d^-}(x,E)$ oraz lewostronne punkty gęstości. Jeśli $\overline{d^+}(x,E) = 1 = \underline{d^+}(x,E)$, to x nazywa się (obustronnym) punktem gęstości zbioru E. Klasyczne twierdzenie Lebesgue'a (por. [4, Tw. 5.1]) mówi o tym, że prawie każdy punkt zbioru mierzalnego E jest jego punktem gęstości.

Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w artykule [10].

2.1 Zbiory zwarte o ustalonej porowatości w zerze

Lemat 2.1 *Niech* $0 < \varepsilon < 1$ *oraz* $R > 0$. *Wówczas zbiory* $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \lambda^+(0,R,K) > \varepsilon R\}$ *oraz* $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \lambda^+(0,R,K) < \varepsilon R\}$ *są otwarte w* $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Dowód. Niech $K_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie takie, że $\lambda^+(0,R,K_0) > \varepsilon R$. Wówczas znajdziemy domknięty przedział $I \subset (0,R)$ długości εR taki, że $I \cap K_0 = \emptyset$. Zatem $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \subset \mathbb{R} \setminus I\}$ jest otwartym otoczeniem K_0 zawartym w $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \lambda^+(0,R,K) > \varepsilon R\}$.

Dla każdego ciągu skończonego $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = R$ o tej własności, że $x_i - x_{i-1} < \varepsilon R$ (dla $i = 1,2,...,n$) wybierzmy liczbę $\delta > 0$, $\delta = \delta(x_0,...,x_n)$, taką, że $x_i - x_{i-1} + 2\delta < \varepsilon R$ oraz $x_i - x_{i-1} > 2\delta$ (dla $i = 1,2,...,n$). Pokażemy, że

$$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \lambda^+(0,R,K) < \varepsilon R\} = \bigcup \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \cap (x_i - \delta, x_i + \delta) \neq \emptyset \text{ dla } i = 1,...,n-1,$$

$$K \cap (x_0,\delta) \neq \emptyset \text{ oraz } K \cap (x_n - \delta, x_n) \neq \emptyset\},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie ciągi $x_0,...,x_n,\delta$ opisane powyżej.

Niech $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie takie, że $\lambda^+(0,R,K) < \varepsilon R$. Połóżmy $x_0 = 0$. Skoro $\lambda^+(0,R,K) < \varepsilon R$, to istnieje $x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon R) \cap K$. Postępując indukcyjnie, definiujemy ciąg $x_2,...,x_n$ taki, że $x_i \in (x_{i-1}, x_{i-1} + \varepsilon R) \cap K$, dla $i = 2,...,n-1$, oraz $x_n = R \in (x_{n-1}, x_{n-1} + \varepsilon R)$. Na koniec połóżmy

$$\delta = \min\left\{\min\left\{\frac{\varepsilon R - (x_i - x_{i-1})}{4} : i = 1,...,n\right\}, \min\left\{\frac{x_i - x_{i-1}}{4} : i = 1,...,n\right\}\right\}.$$

Wówczas $x_i - x_{i-1} + 2\delta < \varepsilon R$ oraz $x_i - x_{i-1} > 2\delta$ dla wszystkich $i = 1,2,...,n$, $K \cap (x_i - \delta, x_i + \delta) \neq \emptyset$ dla $i = 1,...,n-1$, $K \cap (x_0,\delta) \neq \emptyset$ oraz $K \cap (x_n - \delta, x_n) \neq \emptyset$.

Odwrotnie niech $x_0, ..., x_n, \delta$ będzie jednym z opisanych powyżej ciągów. Niech $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie taki, że $K \cap (x_i - \delta, x_i + \delta) \neq \emptyset$ dla $i = 1, ..., n-1$, $K \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset$ oraz $K \cap (x_n - \delta, x_n) \neq \emptyset$. Wybierzmy $y_i \in K \cap (x_i - \delta, x_i + \delta)$ dla $i = 1, ..., n-1$, oraz $y_0 \in K \cap (x_0, \delta)$ i $y_n \in K \cap (x_n - \delta, x_n)$. Wówczas każdy przedział zawarty w $(0, R)$, o długości większej niż $\max_{1 \le i \le n}\{x_i - x_{i-1} + 2\delta\}$ zawiera co najmniej jeden z punktów $y_0, y_1, ..., y_n$. Zatem z wyboru ciągu $x_0, x_1, ..., x_n, \delta$ wynika, że $\lambda^+(0, R, K) < \varepsilon R$. $\square$

Lemat 2.2 *Niech* $0 < b_{n+1} < b_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Niech* $A = \{0, 1\}$ *lub* $A = \mathbb{N}$ *oraz niech* $I_{\alpha(n)} \subset [b_{n+1}, b_n]$ *dla dowolnych* $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, *będzie przedziałem domkniętym lub zbiorem pustym. Wówczas odwzorowanie* $\varphi : A^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ *dane wzorem*

$$\varphi(\alpha) = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha(n)}, \quad \alpha \in A^{\mathbb{N}}$$

jest ciągłe.

Dowód. Niech $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ i $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $b_n < \varepsilon$. Niech teraz ciąg $\beta \in A^{\mathbb{N}}$ będzie taki, że $\beta|n = \alpha|n$. Wówczas $\varphi(\alpha) \bigtriangleup \varphi(\beta) \subset (0, b_n]$ (gdzie $\bigtriangleup$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów), a zatem

$$\rho_H(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \le diam(\varphi(\alpha) \bigtriangleup \varphi(\beta)) \le b_n < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości φ. $\square$

Twierdzenie 2.3 *Niech* $r \in [0, 1]$ *i* $P_r^+ = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : p^+(K, 0) = r\}$. *Wówczas:*

(a) *zbiór* P_r^+ *jest* Π_3^0*–zupełny (*$F_{\sigma\delta}$*–zupełny) dla* $r \in [0, 1)$;

(b) *zbiór* P_1^+ *jest* Π_2^0*–zupełny (*G_δ*–zupełny).*

Dowód. (a) Przez $\mathbb{Q}_+$ oznaczmy zbiór wszystkich liczb wymiernych dodatnich. Zauważmy, że

$$P_r^+ = \left\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 > 0\ \forall R \in (0, R_0)\quad \frac{\lambda^+(0, R, K)}{R} \le r + \varepsilon\right\} \cap$$

$$\left\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0\ \forall R_0 > 0\ \exists R \in (0, R_0)\quad \frac{\lambda^+(0, R, K)}{R} \ge r - \varepsilon\right\} =$$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{R_0\in\mathbb{Q}_+} \bigcap_{R\in(0,R_0)\cap\mathbb{Q}_+} \left\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \frac{\lambda^+(0, R, K)}{R} \le r + \varepsilon\right\} \cap$$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+}\bigcap_{R_0\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{R\in(0,R_0)\cap\mathbb{Q}_+}\left\{K\in\mathcal{K}(\mathbb{R}):\frac{\lambda^+(0,R,K)}{R}\geq r-\varepsilon\right\}.$$

Zatem na mocy Lematu 2.1 otrzymujemy, że P_r^+ jest klasy Π_3^0.

Ustalmy $t\in(0,1-r)$ oraz połóżmy $b_n=t^n$ i $a_n^{(k)}=(b_{n+1}\frac{k}{1-r}+b_n)/(k+1)$ dla $n,k\in\mathbb{N}$. Zauważmy, że $a_n^{(k)}$ jest wypukłą kombinacją liczb $b_{n+1}/(1-r)$ i b_n. Ponieważ $t<t/(1-r)<1$, więc $b_{n+1}<b_{n+1}/(1-r)<b_n$. Zatem $b_{n+1}<a_n^{(k)}<b_n$, dla wszystkich $n,k\in\mathbb{N}$. Definiujemy funkcję $F_r:\mathbb{N}^\mathbb{N}\to\mathcal{K}(\mathbb{R})$ wzorem

$$F_r(\alpha)=\{0\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n^{(\alpha(n))},b_n],\quad \alpha\in\mathbb{N}^\mathbb{N}.$$

Na mocy Lematu 2.2 funkcja F_r jest ciągła. Zatem, gdy pokażemy, że $F_r(\alpha)\in P_r^+\iff\alpha\in C_3$, to na mocy Faktu 1.1 dowód tezy (a) będzie zakończony.

Niech $\alpha\in C_3$. Wówczas

$$p^+(F_r(\alpha),0)=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n^{(\alpha(n))}-b_{n+1}}{a_n^{(\alpha(n))}}=\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_{n+1}}{a_n^{(\alpha(n))}}\right)=$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_{n+1}(\alpha(n)+1)}{b_{n+1}\frac{\alpha(n)}{1-r}+b_n}\right)=1-(1-r)=r.$$

Zatem $F_r(\alpha)\in P_r^+$.

Niech teraz $\alpha\notin C_3$. Wówczas istnieje ściśle rosnący ciąg (n_k) liczb naturalnych oraz liczba $N\in\mathbb{N}$ taka, że $\alpha(n_k)=N$ dla wszystkich $k\in\mathbb{N}$. Zatem

$$p^+(F_r(\alpha),0)=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n^{(\alpha(n))}-b_{n+1}}{a_n^{(\alpha(n))}}\geq\limsup_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}^{(\alpha(n_k))}-b_{n_k+1}}{a_{n_k}^{(\alpha(n_k))}}=$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left(1-\frac{b_{n_k+1}N+b_{n_k+1}}{b_{n_k+1}\frac{N}{1-r}+b_{n_k}}\right)=\limsup_{k\to\infty}\left(1-\frac{b_{n_k+1}N+b_{n_k+1}}{b_{n_k+1}\frac{N}{1-r}+t^{-1}b_{n_k+1}}\right)=$$

$$1-\frac{N+1}{\frac{N}{1-r}+t^{-1}}=1-\frac{(N+1)(1-r)}{N+t^{-1}(1-r)}.$$

Zauważmy, że

$$1-\frac{(N+1)(1-r)}{N+t^{-1}(1-r)}-r=\frac{r^2t^{-1}+r(1-2t^{-1})+t^{-1}-1}{N+t^{-1}(1-r)}.$$

Niech $f(r)=r^2t^{-1}+r(1-2t^{-1})+t^{-1}-1$. Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymujemy $f(r)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r=1-t$ lub $r=1$. Zatem $f(r)>0$ dla $r\in[0,1-t)$. Stąd $p^+(F_r(\alpha),0)>r$ oraz $F_r(\alpha)\notin P_r^+$.

(b) Mamy

$$P_1^+ = \left\{ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \limsup_{R \to 0^+} \frac{\lambda^+(0,R,K)}{R} = 1 \right\} =$$

$$\left\{ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0 \, \forall R_0 > 0 \, \exists R \in (0, R_0) \quad \frac{\lambda^+(0,R,K)}{R} > 1 - \varepsilon \right\} =$$

$$\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{R_0 \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{R \in (0,R_0) \cap \mathbb{Q}_+} \left\{ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \frac{\lambda^+(0,R,K)}{R} > 1 - \varepsilon \right\}.$$

Na mocy Lematu 2.1 otrzymujemy, że P_1^+ jest klasy Π_2^0.

Zdefiniujmy funkcję $G : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ wzorem

$$G(\alpha) = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N},\, \alpha(n)=1} \left[\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!} \right], \quad \alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Z Lematu 2.2 wynika, że funkcja G jest ciągła. Zatem wobec Faktu 1.2 wystarczy pokazać, że $G(\alpha) \in P_1^+ \iff \alpha \in N_2$.

Niech $\alpha \in N_2$ i niech (n_k) będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych takim, że $\alpha(n_k) = 0$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$p^+(G(\alpha), 0) \geq \limsup_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{n_k!} - \frac{1}{(n_k+1)!}}{\frac{1}{n_k!}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{n_k}{n_k + 1} = 1.$$

Zatem $G(\alpha) \in P_1^+$.

Niech teraz $\alpha \notin N_2$. Wtedy istnieje liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że $\alpha(n) = 1$ dla każdego $n \geq N$. Wówczas $G(\alpha) \supset [0, \frac{1}{N!}]$ oraz $p^+(G(\alpha), 0) = 0$. Zatem ostatecznie $G(\alpha) \notin P_1^+$.□

Wniosek 2.4 *Zbiór Por^+ ($SPor^+$) wszystkich niepustych zbiorów zwartych, które są prawostronnie porowate (silnie prawostronnie porowate) w 0 jest Σ_3^0–zupełnym (Π_2^0–zupełnym) podzbiorem $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.*

Dowód. Mamy $Por^+ = \mathcal{K}(\mathbb{R}) \setminus P_0^+$ oraz $SPor^+ = P_1^+$. □

2.2 Zbiory zwarte o ustalonej gęstości Lebesgue'a w zerze

Teraz udowodnimy wynik analogiczny do Twierdzenia 2.3 dla operatora gęstości.

Lemat 2.5 *Niech $0 < \varepsilon < 1$, $h > 0$. Wówczas zbiór $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \mu([0,h] \cap K) < \varepsilon h\}$ jest otwarty oraz zbiór $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \mu([0,h] \cap K) \geq \varepsilon h\}$ jest domknięty.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \mu([0,h] \cap K) < \varepsilon h\} =$$

$$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \exists U \text{ – zbiór otwarty, } \mu(U \cap [0,h]) < \varepsilon h \text{ oraz } K \subset U\}.$$

Zbiór ten to suma bazowych zbiorów otwartych w $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, a więc jest on otwarty. Druga część tezy wynika z pierwszej przez przejście do dopełnienia. □

Fakt 2.6 *Niech $r \in [0,1]$ oraz $D_r^+ = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : d^+(0,K) = r\}$. Wówczas D_r^+ jest klasy Π_4^0 ($G_{\delta\sigma\delta}$).*

Dowód. Niech $r \in [0,1]$. Wiadomo, że dla mierzalnego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ oraz liczby $t \in [0,1]$ mamy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mu(E \cap [0,h])}{h} = t \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(E \cap [0,1/n])}{1/n} = t$$

(por. np. [7, Prop. 1.2.1]). Stąd

$$D_r^+ = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad r - \varepsilon \leq n\mu(K \cap [0,1/n]) < r + \varepsilon\} =$$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : r - \varepsilon \leq n\mu(K \cap [0,1/n]) < r + \varepsilon\}.$$

Z Lematu 2.5 wynika, że zbiór $\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : r - \varepsilon \leq n\mu(K \cap [0,1/n]) < r + \varepsilon\}$ jest klasy Π_2^0 (G_δ). Zatem D_r^+ jest klasy Π_4^0 ($G_{\delta\sigma\delta}$). □

Twierdzenie 2.7 *D_1^+ jest zbiorem Π_3^0–zupełnym ($F_{\sigma\delta}$–zupełnym).*

Dowód. Zauważmy, że

$$D_1^+ = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0\ \exists h' > 0\ \forall h \in (0,h') \quad \mu([0,h] \cap K) \geq (1-\varepsilon)h\} =$$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{h'\in\mathbb{Q}_+} \bigcap_{h\in\mathbb{Q}_+\cap(0,h)} \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \mu([0,h] \cap K) \geq (1-\varepsilon)h\}.$$

Z Lematu 2.5 i powyższego wzoru wynika, że zbiór D_1^+ jest klasy Π_3^0.

Połóżmy $b_n = \frac{1}{2^n}$ oraz $a_n^{(k)} = \frac{b_{n+1}+kb_n}{k+1}$, dla $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ wzorem

$$F(\alpha) = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n^{(\alpha(n))}, b_n],\ \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}.$$

Z Lematu 2.2 wynika, że funkcja F jest ciągła. Zatem wobec Faktu 1.1 wystarczy pokazać, że $F(\alpha) \in D_1^+ \iff \alpha \in C_3$ dla $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Ustalmy $\alpha \in C_3$. Niech $0 < \varepsilon < 1$ i wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{N}{N+2} > 1-\varepsilon$. Wówczas znajdziemy liczbę $k \in \mathbb{N}$ taką, że dla wszystkich $n \geq k$ zachodzi $\alpha(n) \geq N$. Zauważmy, że

$$\underline{d^+}(0, F(\alpha)) \geq \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{1}{a_k^{(\alpha(k))}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(b_n - a_n^{(\alpha(n))}\right) \right) =$$

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\alpha(k)+1}{\alpha(k)b_{k+1} + b_k} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(b_n - \frac{\alpha(n)b_{n+1} + b_n}{\alpha(n)+1} \right) \right) =$$

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\frac{\alpha(k)+1}{\alpha(k)2^{-k-1} + 2^{-k}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\alpha(n)(b_n - b_{n+1})}{\alpha(n)+1} \right) \geq$$

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\frac{N+1}{N2^{-k-1} + 2^{-k}} \cdot \frac{N}{N+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{N}{N+2} > 1-\varepsilon.$$

Stąd $F(\alpha) \in D_1^+$.

Niech teraz $\alpha \notin C_3$. Znajdziemy ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha(n_k) = N$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\overline{d^+}(0, F(\alpha)) \leq \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{b_{n_k}} \sum_{n=n_k}^{\infty} (b_n - a_n^{(\alpha(n))}) \right) = \limsup_{k\to\infty} \left(2^{n_k} \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n)+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq$$

$$\limsup_{k\to\infty} \left(2^{n_k} \left(\frac{N}{N+1} \cdot \frac{1}{2^{n_k+1}} + \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right) = \left(\frac{N}{N+1} + 1 \right) \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem $F(\alpha) \notin D_1^+$. □

Pokażemy teraz, że twierdzenia z tego i poprzedniego paragrafu pozostają prawdziwe, jeśli rozważymy $p^-(K,0)$ lub $p(K,0)$ zamiast $p^+(K,0)$, oraz $d^-(0,K)$ lub $d(0,K)$ zamiast $d^+(0,K)$.

Twierdzenie 2.8 *Niech $r \in [0,1]$ i $P_r^- = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : p^-(K,0) = r\}$. Wówczas*

(a) *zbiór P_r^- jest Π_3^0–zupełny ($F_{\sigma\delta}$–zupełny) dla $r \in [0,1)$;*

(b) *zbiór P_1^- jest Π_2^0–zupełny (G_δ–zupełny).*

Dowód. Niech $-K = \{-x : x \in K\}$ dla $K \subset \mathbb{R}$. Wystarczy zauważyć, że $p^-(-K,0) = p^+(K,0)$ oraz odwzorowanie $K \mapsto -K$ jest homeomorfizmem przestrzeni $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ na siebie. Teraz teza wynika z Twierdzenia 2.3. □

Wniosek 2.9 *Zbiór* Por^- $(SPor^-)$ *wszystkich niepustych zbiorów zwartych, które są lewostronnie porowate (silnie lewostronnie porowate) w* 0 *jest* Σ_3^0*–zupełnym* (Π_2^0*–zupełnym*) *podzbiorem* $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Analogicznie można udowodnić następujące

Twierdzenie 2.10 *Niech* $D_1^- = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : d^-(0, K) = 1\}$. *Wówczas* D_1^- *jest zbiorem* Π_3^0*–zupełnym* ($F_{\sigma\delta}$*–zupełnym*).

Twierdzenie 2.11 *Niech* $r \in [0, 1]$ *i* $P_r = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : p(K, 0) = r\}$. *Wówczas*

(a) *zbiór* P_r *jest* Π_3^0*–zupełny* ($F_{\sigma\delta}$*–zupełny*) *dla* $r \in [0, 1)$;

(b) *zbiór* P_1 *jest* Π_2^0*–zupełny* (G_δ*–zupełny*).

Dowód. Najpierw zauważmy, że Twierdzenie 2.3 pozostaje prawdziwe jeśli zamiast P_r^+ rozważać zbiór $\{K \in \mathcal{K}([0, \infty)) : p^+(K, 0) = r\}$. Zauważmy dalej, że $p(K \cup -K, 0) = p^+(K, 0)$ dla $K \in \mathcal{K}([0, \infty))$. Niech $F : \mathcal{K}([0, \infty)) \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie dane wzorem $F(K) = K \cup -K$. Wówczas F jest odwzorowaniem ciągłym (por. [14, 4.29]) oraz $F^{-1}(P_r) = P_r^+$. Zatem z Twierdzenia 2.3 wynika, że P_r jest Π_3^0–hard dla $r \in [0, 1)$, oraz Π_2^0–hard dla $r = 1$. Ponieważ $P_r = P_r^+ \cap P_r^-$, więc P_r jest klasy Π_3^0 dla $r \in [0, 1)$, oraz klasy Π_2^0 dla $r = 1$. Stąd dostajemy tezę. □

Wniosek 2.12 *Zbiór* Por $(SPor)$ *wszystkich niepustych zbiorów zwartych, które są porowate (silnie porowate) w* 0 *jest* Σ_3^0*–zupełnym* (Π_2^0*–zupełnym*) *podzbiorem* $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Analogicznie można wykazać

Twierdzenie 2.13 *Niech* $D_1 = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : d(0, K) = 1\}$. *Wówczas* D_1 *jest zbiorem* Π_3^0*–zupełnym* ($F_{\sigma\delta}$*–zupełnym*).

2.3 Zbiory zwarte nigdzie obustronnie porowate

Będziemy teraz rozważać zwarte zbiory na prostej, które są możliwie największe w sensie porowatości, tj. takie zbiory, które w żadnym punkcie nie są porowate. Zbiory zwarte na prostej zawierają swoje kresy, zatem w co najmniej dwóch punktach są one jednostronnie porowate. Dokładniej, jeśli $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym, to $p^+(K, \max(K)) = 1 =$

$p^-(K, \min(K))$. Istnieją jednak zbiory zwarte, które w każdym swoim punkcie mają porowatość zero przynajmniej z jednej strony (np. zwarte przedziały). Będziemy teraz rozważać rodzinę $NBP \subset \mathcal{K}(\mathbb{R})$ wszystkich zwartych podzbiorów prostej, które w żadnym swoim punkcie nie są obustronnie porowate. Rodzina NBP dana jest więc wzorem

$$NBP = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}\ [x \in K \Rightarrow (p^-(K,x) = 0 \text{ lub } p^+(K,x) = 0)]\}.$$

Lemat 2.14 *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Niech funkcja $F : X \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie taka, że zbiór*

$$F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \cap U \neq \emptyset\})$$

jest otwarty w X, dla dowolnego zbioru U otwartego w $\mathbb{R}$. Wówczas F jest borelowska.

Dowód. Aby udowodnić, że F jest borelowska wystarczy pokazać, że zbiór $F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \subset U\})$ jest borelowski, dla dowolnego zbioru U otwartego w $\mathbb{R}$. Jest to oczywiste, gdy $U = \mathbb{R}$ lub $U = \emptyset$. Niech więc $\emptyset \neq U \neq \mathbb{R}$ i połóżmy

$$V_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \rho(x, \mathbb{R} \setminus U) < \frac{1}{n+1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\rho(x, A)$ oznacza odległość punktu $x \in \mathbb{R}$ od zbioru $A \subset \mathbb{R}$ w metryce euklidesowej. Wówczas zbiór

$$F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \subset U\}) = F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \cap (\mathbb{R} \setminus U) = \emptyset\}) =$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \cap V_n = \emptyset\})$$

jest typu F_σ. $\square$

Lemat 2.15 *Niech $\{K_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ będzie rodziną parami rozłącznych przedziałów domkniętych zawartych w $[0,1]$. Niech $X \subset Tr$ (na X rozważamy topologię indukowaną z Tr) i niech funkcja $F : X \to \mathcal{K}(\mathbb{R})$ będzie dana wzorem*

$$F(T) = cl\Big(\bigcup_{s \in T} K_s\Big) \quad dla\ T \in X,$$

gdzie $cl(\cdot)$ oznacza operację domknięcia. Wóczas F jest borelowska.

Dowód. Niech U będzie dowolnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$. Niech $S = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : K_s \cap U \neq \emptyset\}$. Jeśli $T \in X$, to $S \cap T \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(T) \cap U \neq \emptyset$. Zatem zbiór

$$F^{-1}(\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : K \cap U \neq \emptyset\}) = \bigcup_{s \in S} \{T \in X : s \in T\}$$

jest otwarty. Na mocy Lematu 2.14 funkcja F jest borelowska. $\square$

Lemat 2.16 *Niech* $F = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}]$. *Wówczas* $p^+(F, x) = 0$.

Dowód. Mamy

$$p^+(F, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0. \ \square$$

Twierdzenie 2.17 *NBP jest Π^1_1–zupełnym podzbiorem $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.*

Dowód. Na początku pokażemy, że NBP jest zbiorem koanalitycznym. Widać, że NBP jest koprojekcją (czyli dopełnieniem rzutu) na pierwszą współrzędną zbioru

$$\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : x \in K \Rightarrow (p^-(K, x) = 0 \text{ lub } p^+(K, x) = 0)\}.$$

Zbiór ten jest borelowski. Aby to uzasadnić, wystarczy pokazać, że zbiór

$$A = \{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : p^+(K, x) = 0\}$$

jest borelowski, gdyż analogiczny zbiór opisany przez $p^-(K, x) = 0$ też jest borelowski oraz zbiór $\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : x \in K\}$ jest domknięty. Mamy

$$A = \left\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \limsup_{R\to 0^+} \frac{\lambda^+(x, R, K)}{R} = 0\right\} =$$

$$\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0\ \exists R_0 > 0\ \forall R \in (0, R_0)\ \ \lambda^+(x, R, K) < \varepsilon R\} =$$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{R_0\in\mathbb{Q}_+} \bigcap_{R\in(0,R_0)\cap\mathbb{Q}} \{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \lambda^+(x, R, K) < \varepsilon R\}.$$

Pozostaje więc wykazać, że zbiór

$$\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \lambda^+(x, R, K) < \varepsilon R\}$$

jest otwarty. W tym celu ustalmy dodatnie liczby wymierne R i ε. Niech para (K, x) będzie taka, że $\lambda^+(x, R, K) < \varepsilon R$. Połóżmy $\delta = \varepsilon R - \lambda^+(x, R, K)$. Korzystając ze zwartości K, wybierzmy rodzinę $\{U_1, ..., U_k\}$ przedziałów otwartych o średnicach mniejszych niż $\delta/3$ takich, że

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ oraz } K \cap U_i \neq \emptyset \text{ dla } i = 1, ..., k.$$

Niech

$$\mathcal{V} = \{L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : L \cap U_i \neq \emptyset \text{ dla } i = 1, ..., k\}.$$

Jest to otwarte otoczenie K. Niech $(L, y) \in \mathcal{V} \times (x - \delta/3, x + \delta/3)$. Wówczas

$$\lambda^+(y, R, L) \leq \lambda^+(x, R, K) + \frac{2}{3}\delta < \varepsilon R.$$

Pokazaliśmy więc, że $\{(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : \lambda^+(x, R, K) < \varepsilon R\}$ jest otwarty. Zatem zbiór NBP jest koanalityczny.

Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niech $\varphi_{[a,b]}(x) = a + (b - a)x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Jest to odwzorowanie afiniczne, które przekształca przedział $[0, 1]$ na $[a, b]$. Niech $K_\emptyset = [0, 1]$ i $L_\emptyset = [0, 1]$. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$K_{(n)} = \varphi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}\left(\left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right]\right),\ L_{(n)} = \varphi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}\left(\left[\frac{1}{2n+3}, \frac{1}{2n+2}\right]\right).$$

Dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $|s| \geq 1$, oraz $m \in \mathbb{N}$ definiujemy przez indukcję (względem długości ciągu s) zbiory

$$K_{s\hat{\ }m} = \varphi_{L_s}(K_{(m)}),\ L_{s\hat{\ }m} = \varphi_{L_s}(L_{(m)}).$$

Niech $T \in \widetilde{Tr}$ (por. def. $\widetilde{WF}$ i $\widetilde{Tr}$ w paragrafie 1.2). Wówczas na mocy Lematu 2.15 odwzorowanie

$$T \mapsto cl(\bigcup_{s \in T} K_s) \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

jest borelowskie. Dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ niech $y_s = \inf L_s + \frac{1}{3}(\sup L_s - \inf L_s)$.

Z Faktu 1.4 wynika, że aby udowodnić twierdzenie, wystarczy dla każdego $T \in \widetilde{Tr}$ pokazać równoważność $T \in \widetilde{WF} \iff cl(\bigcup_{s \in T} K_s) \in NBP$, gdyż pojęcia Π^1_1–zupełności i borelowskiej Π^1_1–zupełności są równoważne (patrz [13]).

Załóżmy, że $T \in \widetilde{WF}$ oraz $x \in cl(\bigcup_{s \in T} K_s)$. Rozważmy dwa przypadki:

1) Jeśli $x \in K_s$ dla pewnego $s \in T$, to ponieważ K_s jest przedziałem, więc oczywiście $p^-(cl(\bigcup_{t \in T} K_t), x) = 0$ lub $p^+(cl(\bigcup_{t \in T} K_t), x) = 0$.

2) Jeżeli $x \notin K_s$ dla każdego $s \in T$, to $x = y_s$ dla pewnego $s \in T$. Zanim to pokażemy, zauważmy, że y_s jest granicą dowolnego ciągu (z_n) o tej własności, że $z_n \in K_{s\hat{\ }k_n}$ dla każdego n, gdzie (k_n) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Z konstrukcji wynika, że jeśli $y_s \in cl(\bigcup_{t \in T} K_t)$, to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{s\hat{\ }n} \subset cl(\bigcup_{t \in T} K_t)$ (w tym miejscu wykorzystujemy fakt, iż $T \in \widetilde{Tr}$). Przypuśćmy teraz, że $x \neq y_s$ dla wszystkich $s \in T$. Wówczas istnieją ciągi (s_n) oraz $w_n \to x$ takie, że $w_n \in K_{s_n}$ oraz $s_n \in T$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z faktu, że $x \neq y_\emptyset$ (gdzie $\emptyset$ oznacza ciąg pusty) wynika, że $(s_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Zatem istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ o tej własności, że zbiór $\{n \in \mathbb{N} : s_n(0) = k_0\}$

jest nieskończony. Postępując dalej w ten sposób, definiujemy indukcyjnie ciąg $\alpha = (k_0, k_1, k_2, ...)$ taki, że $\alpha|n \in T$ dla $n \in \mathbb{N}$, co daje sprzeczność. Niech s będzie takie, że $x = y_s$. Zauważmy, że zbiór $\{x\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{s\hat{}n}$ jest afiniczną kopią zbioru $\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}]$, zatem z Lematu 2.16 mamy $p^+(\{x\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{s\hat{}n}, x) = 0$. Ponieważ $\{x\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{s\hat{}n} \subset cl(\bigcup_{t\in T} K_t)$, więc $p^+(cl(\bigcup_{t\in T} K_t), x) = 0$. Zatem $cl(\bigcup_{t\in T} K_t) \in NBP$.

Dla liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, przedziały $(a, \frac{2a+b}{3})$, $(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3})$, $(\frac{a+2b}{3}, b)$ nazwiemy odpowiednio lewym, środkowym i prawym podprzedziałem przedziału (a, b). Załóżmy, że $T \notin \widetilde{WF}$. Wówczas ciało $[T]$ drzewa T jest niepuste. Niech $\alpha \in [T]$. Niech x_α będzie jedynym puktem zbioru $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{\alpha|n}$ (na mocy twierdzenia Cantora zbiór $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{\alpha|n}$ jest jednoelementowy). Wtedy $\alpha|n \in T$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_\alpha \in cl(\bigcup_{s\in T} K_s)$. Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ punkt x_α leży w środkowym podprzedziale przedziału $L_{\alpha|n}$. Skoro prawy i lewy podprzedział przedziału $L_{\alpha|n}$ jest rozłączny z $cl(\bigcup_{s\in T} K_s)$, to otrzymujemy $\lambda^\pm(x, \frac{2}{3}\mu(L_{\alpha|n}), cl(\bigcup_{s\in T} K_s)) > \frac{1}{2}$, a zatem $p^\pm(cl(\bigcup_{s\in T} K_s), x) \geq \frac{1}{2}$. W konsekwencji $cl(\bigcup_{s\in T} K_s) \notin NBP$. $\square$

Rozdział 3

Autohomeomorfizmy przedziału jednostkowego

Przez $C[0,1]$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich funkcji ciągłych na $[0,1]$ o wartościach rzeczywistych z normą supremum. Przez $\mathbb{H} \subset C[0,1]$ oznaczamy zbiór wszystkich rosnących autohomeomorfizmów przedziału $[0,1]$, tzn. funkcji z $C[0,1]$ ściśle rosnących, przeprowadzających 0 na 0 i 1 na 1. W tym rozdziale będziemy badać deskryptywną złożoność pewnych specjalnych podzbiorów zbioru $\mathbb{H}$. Główna motywacja podjęcia tego tematu wywodzi się z pracy [11] Grafa, Mauldina i Williamsa, gdzie autorzy pokazali, że zbiór wszystkich ściśle singularnych autohomeomorfizmów przedziału $[0,1]$ jest koanalityczny. Następnie zamieścili oni następującą uwagę [11, Remark 5.3, str. 302]: „very likely this set is not a Borel set in $\mathbb{H}$ but we have not demonstrated this". W tym rozdziale potwierdzamy ich hipotezę – Twierdzenie 3.1 mówi, że opisany wyżej zbiór jest Π^1_1–zupełny (w szczególności nieborelowski). Twierdzenia 3.5 oraz 3.8 to kolejne rezultaty, w których rozważamy zbiory autohomeomorfizmów zdefiniowane przez pewne warunki nałożone na pochodne. Oba te twierdzenia przypominają dwa klasyczne fakty – zbiór $DIFF$ wszystkich funkcji w $C[0,1]$, które są różniczkowalne w każdym punkcie oraz zbiór $NDIFF$ wszystkich funkcji z $C[0,1]$, które nie są nigdzie różniczkowalne – stanowią Π^1_1–zupełne podzbiory $C[0,1]$ (patrz [14, 33.9, 33.15]).

Przez $\mathbb{Q}$ oznaczamy (jak wcześniej) zbiór wszystkich liczb wymiernych. Skoro

$$\mathbb{H} = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0 \wedge f(1) = 1 \wedge \forall p,q \in \mathbb{Q} \cap [0,1](p < q \Rightarrow f(p) < f(q))\},$$

to $\mathbb{H}$ jest podzbiorem $C[0,1]$ typu G_δ, a w konsekwencji przestrzenią polską. Przez $D^{\pm}f(x)$ i $D_{\pm}f(x)$ oznaczamy odpowiednio prawostronne i lewostronne pochodne Diniego funkcji

f w punkcie x, pierwsza z nich jest pochodną górną, a druga dolną. Przez $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ oznaczmy pochodne prawostronną i lewostronną funkcji f w punkcie x. Funkcja monotoniczna określona na $[0,1]$, której pochodna jest równa zeru prawie wszędzie nazywa się funkcją singularną (osobliwą) (por. [18, VII, paragraf 3], [3, VI, paragraf 31]). Znany przykład funkcji ciągłej ściśle rosnącej i singularnej wykorzystuje funkcję Cantora (zob. [18, str. 178], [8, Przykład 8.30]). Jeśli funkcja $f \in \mathbb{H}$ jest singularna, to nazywamy ją singularnym autohomeomorfizmem. Powiemy, że $f \in \mathbb{H}$ jest ściśle singularnym autohomeomorfizmem, jeśli f nie ma dodatniej i skończonej pochodnej w żadnym punkcie, dokładniej f nie ma dodatniej i skończonej pochodnej w żadnym punkcie przedziału $(0,1)$ i nie ma dodatnich i skończonych pochodnych jednostronnych w punktach 0 i 1. Niech $S S\mathbb{H} = \{f \in \mathbb{H} : f \text{ jest ściśle singularny}\}$. Niech $SS\mathbb{H}^+$ będzie zbiorem wszystkich autohomeomorfizmów nieposiadających dodatniej i skończonej pochodnej prawostronnej w żadnym punkcie przedziału $[0,1)$. Analogicznie definiujemy $SS\mathbb{H}^-$, rozważając $(0,1]$.

3.1 Ściśle singularne autohomeomorfizmy

W tym paragrafie udowodnimy następujące

Twierdzenie 3.1 *Zbiór $SS\mathbb{H}$ jest Π^1_1–zupełny.*

Dla większej przejrzystości rozważań udowodnimy najpierw analogiczny wynik (Twierdzenie 3.5), gdzie zbiór $SS\mathbb{H}$ jest zastąpiony przez $SS\mathbb{H}^+$. Dowód Twierdzenia 3.1 jest podobny, lecz bardziej skomplikowany w zapisie, więc pewne detale techniczne pominiemy.

Zanim przystąpimy do dowodu Twierdzenia 3.5, wpierw skonstruujemy pomocnicze funkcje E^n, $n \in \mathbb{N}$. W tym celu zastosujemy funkcję, określoną na przedziale zwartym skonstruowaną przez Catera w pracy [5], o następującej własności:

($*$) f jest ciągła i ściśle rosnąca oraz taka, że dla każdego x albo $D^- f(x) = +\infty$ albo $D_- f(x) = 0$, i dla każdego x albo $D^+ f(x) = +\infty$ albo $D_+ f(x) = 0$.

Następujący lemat to prosta obserwacja:

Lemat 3.2 *Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ mają własność ($*$). Wówczas*

(1) *jeśli $f(b) = g(b)$, to $f \cup g : [a,c] \to \mathbb{R}$ ma własność ($*$);*

(2) $\forall a > 0\ \forall b \in \mathbb{R}$ *($af + b$ ma własność ($*$));*

Rysunek 3.1: Wykres singularnego autohomeomorfizmu g

(3) $\forall a > 0 \; \forall b \in \mathbb{R} \; (x \mapsto f(ax+b)$ *ma własność* $(*))$.

Z twierdzenia Catera i Lematu 3.2 wynika, że istnieje funkcja $h \in \mathbb{H}$ o własności $(*)$. Ustalmy taką funkcję h, oczywiście jest ona ściśle singularnym autohomeomorfizmem. Teraz przy użyciu funkcji h zdefiniujemy nowe autohomeomorfizmy singularne.

Niech $f \in \mathbb{H}$. Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niech $\beta_{a,b} : [a, b] \to [0, 1]$ będzie rosnącą afiniczną bijekcją. Dla $f \in \mathbb{H}$ niech $P([a, b], f) = (b-a)(f \circ \beta_{a,b}) + a$. Wtedy $P(a, b, f)$ jest rosnącym autohomeomorfizmem przedziału $[a, b]$. Teraz określmy $E(f) \in \mathbb{H}$ wzorem

$$E(f)(x) = \begin{cases} P([2^{-m-1}, 2^{-m}], f)(x) & \text{dla } x \in [2^{-m-1}, 2^{-m}],\ m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Dalej definiujemy indukcyjnie funkcje $E^n(f)$, $n \geq 1$, w następujący sposób: $E^1(f) = E(f)$ oraz $E^{n+1}(f) = E(E^n(f))$. Na Rysunkach 3.2 i 3.3 przedstawiono skutek działania operacji $E^1(\cdot)$ i $E^2(\cdot)$ na funkcję g, której wykres pokazano na Rysunku 3.1. (Funkcja g na Rysunku 3.1 jest dystrybuantą zmiennej losowej $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n$, gdzie X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach takimi, że $Prob(X_n = 0) = \frac{1}{3}$ oraz $Prob(X_n = 1) = \frac{2}{3}$. Odwzorowanie g jest singularnym autohomeomorfizmem. Szczegóły można znaleźć w [3, paragraf 31].)

Dla ustalonej wcześniej funkcji $h \in SS\mathbb{H}$ rozważmy ciąg $E^n(h)$, $n \geq 1$. Zamiast pisać $E^n(h)$ będziemy dalej krótko pisali E^n.

Rysunek 3.2: Wykres $E(g)$

Lemat 3.3 *Funkcje E^n dla $n \geq 1$ mają następujące własności:*

(1) $E^n \in \mathbb{H}$;

(2) $1 - 2^{-n} \leq D_+ E^n(0) < D^+ E^n(0) \leq \frac{2^n}{2^n - 1}$;

(3) E^n *jest ściśle singularna.*

Dowód. Ad (1) Na każdym przedziale $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$ funkcja E^1 jest afiniczną kopią h oraz wszystkie te kopie są posklejane końcami, zatem $E^1 : [0,1] \to [0,1]$ jest ciągła i rosnąca. Dowód (1) dla $n > 1$ jest prostą indukcją.

Dla dowodu (2) najpierw wykażemy, że $D_+ E^n(0) < D^+ E^n(0)$ dla każdego $n \geq 1$. Skoro h nie jest identycznością, to znajdziemy liczbę $x_0 \in [0,1]$ taką, że $h(x_0) > x_0$ albo $h(x_0) < x_0$. Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $h(x_0) > x_0$. Niech $x_k = 2^{-k}(1 + x_0)$ oraz $y_k = 2^{-k}$ dla $k \geq 1$. Na przedziale $[2^{-k}, 2^{-k+1}]$ funkcja E^1 jest afiniczną kopią h. Zatem $\frac{E^1(x_k) - E^1(y_k)}{x_k - y_k} = \frac{h(x_0)}{x_0}$. Ponieważ $E^1(y_k) = y_k$, $k \in \mathbb{N}$, oraz $E^1(0) = 0$, więc

$$D_+ E^1(0) \leq \lim_{k \to \infty} \frac{E^1(y_k) - E^1(0)}{y_k - 0} = 1$$

oraz

$$D^+ E^1(0) \geq \limsup_{k \to \infty} \frac{E^1(x_k) - E^1(0)}{x_k - 0} = \limsup_{k \to \infty} \frac{E^1(x_k) - E^1(y_k) + E^1(y_k) - E^1(0)}{x_k - y_k + y_k - 0} =$$

Rysunek 3.3: Wykres $E^2(g)$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{E^1(x_k) - E^1(y_k) + (y_k - 0)}{x_k - y_k + (y_k - 0)} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{E^1(x_k) - E^1(y_k)}{x_k - y_k} = \frac{h(x_0)}{x_0} > 1.$$

Użyliśmy faktu, że funkcja $t \mapsto \frac{t+b}{t+c}$ jest ściśle malejąca gdy $b > c > 0$ (jeśli $h(x_0) < x_0$, to użylibyśmy faktu, że $t \mapsto \frac{t+b}{t+c}$ jest ściśle rosnąca gdy $c > b > 0$). W ten sposób udowodniliśmy żądaną nierówność dla $n = 1$. Dowód kroku indukcyjnego przebiega analogicznie – wystarczy w powyższym rozumowaniu zastąpić h przez E^{n-1} (z założenia indukcyjnego wynika, że E^{n-1} nie jest identycznością).

Z konstrukcji funkcji E^n wynika, że jej wykres leży pomiędzy dwiema prostymi danymi wzorami $x \mapsto (1 - 2^{-n})x$ i $x \mapsto \frac{2^n}{2^n-1}x$. Stąd dostajemy, że $1 - 2^{-n} \leq D_+E^n(0)$ oraz $D^+E^n(0) \leq \frac{2^n}{2^n-1}$.

Ad (3) Skoro E^1 na każdym przedziale $[2^{-m-1}, 2^{-m}]$ jest afiniczną kopią h, to na mocy Lematu 3.2 oraz (2) otrzymujemy, że E^1 jest ściśle singularna. Teza dla $n > 1$ wynika z (2) i Lematu 3.2 przez zastosowanie prostej indukcji. $\square$

Lemat 3.4 *Następujące zbiory są borelowskie:*

(a) $\{(f, x) \in \mathbb{H} \times [0, 1) : D^+f(x) < a\}$ *dla* $a \in (0, \infty]$*;*

(a') $\{(f, x) \in \mathbb{H} \times [0, 1) : D^+f(x) > a\}$ *dla* $a \in [0, \infty)$*;*

(b) $\{(f, x) \in \mathbb{H} \times [0, 1) : D^+f(x) = D_+f(x)\}$*;*

(c) $\{(f, x) \in \mathbb{H} \times [0, 1] : f'(x)$ *istnieje*$\}$.

Ponadto zbiory analogiczne do opisanych w (a) *i* (a') *są borelowskie, gdy zmienimy* D^+ *na* D_+ *lub jeśli zmienimy nierówność „<" na „≤" lub na „=" w* (a) *oraz odpowiednio „>" na „≥" w* (a'). *Również zbiory analogiczne do opisanych w* (a), (a'), (b) *są borelowskie, gdy rozważymy* D^-, D_- *zamiast* D^+, D_+ *dla* $x \in (0,1]$.

Dowód. Ad (a) Zauważmy, że dla $a < \infty$ mamy

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : D^+f(x) < a\} =$$

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : \lim_{n\to\infty} \sup_{0<h<1/n} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < a\} =$$

$$\bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} \bigcap_{h\in(0,1/n)\cap\mathbb{Q}} \{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < a - 1/k\}.$$

Stąd ponieważ zbiór $\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < a - 1/k\}$ jest otwarty w $\mathbb{H} \times [0,1)$, więc zbiór $\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : D^+f(x) < a\}$ jest borelowski. Dowód dla innych zbiorów występujących w (a) i (a') jest podobny.

Ad (b) Zauważmy, że

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : D^+f(x) = D_+f(x)\} =$$

$$\bigcap_{p\in\mathbb{Q}_+} \{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1) : D^+f(x) \le p \iff D_+f(x) \le p\}.$$

Stąd oraz z odpowiednich wersji (a), (a') wynika, że zbiór w (b) jest borelowski.

Ad (c) Zauważmy, że

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1] : f'(x) \text{ istnieje}\} =$$

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1] : (x \in (0,1) \Rightarrow D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x))$$

$$\text{i } (x = 0 \Rightarrow D^+f(x) = D_+f(x)) \text{ i } (x = 1 \Rightarrow D^-f(x) = D_-f(x))\}.$$

Następnie argumentujemy podobnie jak dla (b). □

Dla ciągu $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i liczby $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\alpha|n = (\alpha(0), ..., \alpha(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Analogicznie dla ciągu skończonego $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ i liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \le |s|$, oznaczmy $s|n = (s(0), ..., s(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 3.5 *Zbiór* $S\mathbb{SH}^+$ *jest* Π^1_1*–zupełny.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że zbiór $SS\mathbb{H}^+$ jest koanalityczny. W tym celu rozważmy dopełnienie $SS\mathbb{H}^+$. Na mocy Lematu 3.4 zbiór

$$\{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1] : f'_+(x) \text{ istnieje oraz } 0 < f'_+(x) < \infty\}$$

jest borelowski. Zatem zbiór

$$\mathbb{H} \setminus SS\mathbb{H}^+ = \{f \in \mathbb{H} : \exists x \in [0,1] \ \ (f'_+(x) \text{ istnieje oraz } 0 < f'_+(x) < \infty)\}$$

jest analityczny jako rzut zbioru borelowskiego, co oznacza, że zbiór $SS\mathbb{H}^+$ jest koanalityczny.

Wystarczy zatem znaleźć ciągłą redukcję $\widetilde{Tr}$ do $SS\mathbb{H}^+$. Na początek wprowadzimy stosowne oznaczenia. Niech $I_\emptyset = J_\emptyset = [0,1]$ oraz $I_{(n)} = [\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}]$ i $J_{(n)} = [\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, połóżmy $\varphi_{[a,b]}(x) = a(1-x) + bx$ dla $x \in [0,1]$ – jest to rosnąca afiniczna bijekcja $[0,1]$ na $[a,b]$. Indukcyjnie definiujemy $I_{s\hat{\ }n} = \varphi_{I_s}(I_{(|s|+n)})$ oraz $J_{s\hat{\ }n} = \varphi_{I_s}(J_{(|s|+n)})$ dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $|s| \geq 1$, oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech dalej $K_s^i = \varphi_{I_s}(I_{(i)})$ i $L_s^i = \varphi_{I_s}(J_{(i)})$ dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ oraz $i < |s|$.

Niech $T \in \widetilde{Tr}$. Połóżmy $f_0^T = E^1$. Następnie definiujemy indukcyjnie funkcje f_n^T, $n \in \mathbb{N}$. Aby uzyskać f_{n+1}^T, modyfikujemy funkcję f_n^T na przedziałach I_s, J_s oraz $K_{s|n}^i$, $L_{s|n}^i$, o ile $s \in T$, $|s| = n+1$, $i < n$. Mianowicie, jeśli I jest dowolnym spośród tych przedziałów, to przyjmujemy $f_{n+1}^T|_I = P(I, E^{n+2})$. Dla pozostałych $x \in [0,1]$ funkcja f_{n+1}^T nie zmienia się, tzn. $f_{n+1}^T(x) = f_n^T(x)$. Zauważmy, że $f_n^T \in \mathbb{H}$ implikuje $f_{n+1}^T \in \mathbb{H}$. Zatem stosując prostą indukcję stwierdzamy, że $f_n^T \in \mathbb{H}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech $m, n \in \mathbb{N}$ będą takie, że $0 < m < n$. Wówczas z konstrukcji wynika, że norma supremum $||f_m^T - f_n^T||$ w $C[0,1]$ jest mniejsza niż długość przedziału I_t, gdzie t jest ciągiem składającym się z $m-1$ zer, to znaczy jest mniejsza niż 2^{-m+1}. Rzeczywiście, wykresy funkcji f_m^T i f_n^T mogą się różnić co najwyżej w kwadratach $I_s \times I_s$, $J_s \times J_s$ dla $|s| > m$ oraz w kwadratach typu $K_s^i \times K_s^i$ i $L_s^i \times L_s^i$ dla $|s| \geq m$, a wszystkie te kwadraty są mniejsze od kwadratu $I_t \times I_t$. Zatem (f_n^T) jest ciągiem Cauchy'ego w $C[0,1]$, a więc jest zbieżny do pewnej funkcji $f^T \in C[0,1]$ takiej, że $f^T(0) = 0$ i $f^T(1) = 1$. Z konstrukcji nietrudno wynika, że f^T jest ściśle rosnąca. To oznacza, że $f^T \in \mathbb{H}$.

Pokażemy, że $T \mapsto f^T$ jest ciągłym odwzorowaniem z $\widetilde{Tr}$ do $\mathbb{H}$. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz ustalmy $s \mapsto \langle s \rangle$ – bijekcję z $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ na $\mathbb{N}$ i liczbę naturalną N taką, że długość przedziału I_s jest mniejsza niż 2^{-n}, o ile $\langle s \rangle \geq N$. Niech S i T będą dwoma drzewami na $\mathbb{N}$ takimi, że

$$T \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \langle s \rangle < N\} = S \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \langle s \rangle < N\}.$$

Wówczas $||f^T - f^S|| < 2^{-n}$, co dowodzi ciągłości odwzorowania $T \mapsto f^T$.

Aby zakończyć dowód twierdzenia, wystarczy sprawdzić, że dla dowolnego $T \in \widetilde{Tr}$ zachodzi $T \in \widetilde{WF} \iff f^T \in SS\mathbb{H}^+$. Niech $T \in \widetilde{WF}$. Jeśli $T = \{\emptyset\}$, to $f^T = E^1 \in SS\mathbb{H}^+$ ma mocy Lematu 3.3. Niech więc $T \neq \{\emptyset\}$. Chcemy pokazać, że f^T nie ma prawostronnej pochodnej w żadnym punkcie $x \in [0,1)$. Zauważmy, że funkcja f^T, na każdym z przedziałów J_s dla $s \in T \setminus \{\emptyset\}$, $K^i_{s|(|s|-1)}$ i $L^i_{s|(|s|-1)}$ dla $s \in T$, $|s| \geq 2$, jest afiniczną kopią pewnej funkcji E^n, a zatem nie ma prawostronnej pochodnej w tych przedziałach. Podobnie będzie, gdy rozważymy f^T na I_s dla $s \in T$ o tej własności, że s nie ma żadnego rozszerzenia w T, tzn. $s\hat{\ }n \notin T$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Suma wszystkich przedziałów J_s, $K^i_{s|(|s|-1)}$, $L^i_{s|(|s|-1)}$ oraz I_s opisanych powyżej jest równa $[0,1] \setminus A$, gdzie zbiór A jest przeliczalny (skończony lub nieskończony), bo składa się z granic ciągów postaci (x^s_n) gdzie $x^s_n \in J_{s\hat{\ }n}$ dla wszystkich s o własności $s\hat{\ }0 \in T$. Z drugiej strony $x \in A \iff \exists s(x = \inf I_s \text{ i } s\hat{\ }0 \in T)$. Niech więc $x \in A$ i niech ciąg s będzie taki, że $s\hat{\ }0 \in T$ oraz

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl(\bigcup_{k\geq n} J_{s\hat{\ }k}) = \{\inf I_s\}.$$

W każdym przedziale $J_{s\hat{\ }k}$ funkcja f^T jest kopią afiniczną $E^{|s|+2}$. Stosując podobne rozumowanie jak w dowodzie Lematu 3.3, można pokazać, że $D_+f^T(x) < D^+f^T(x)$. Stąd wynika, że f^T nie ma prawostronnej pochodnej w x (skończonej ani nieskończonej).

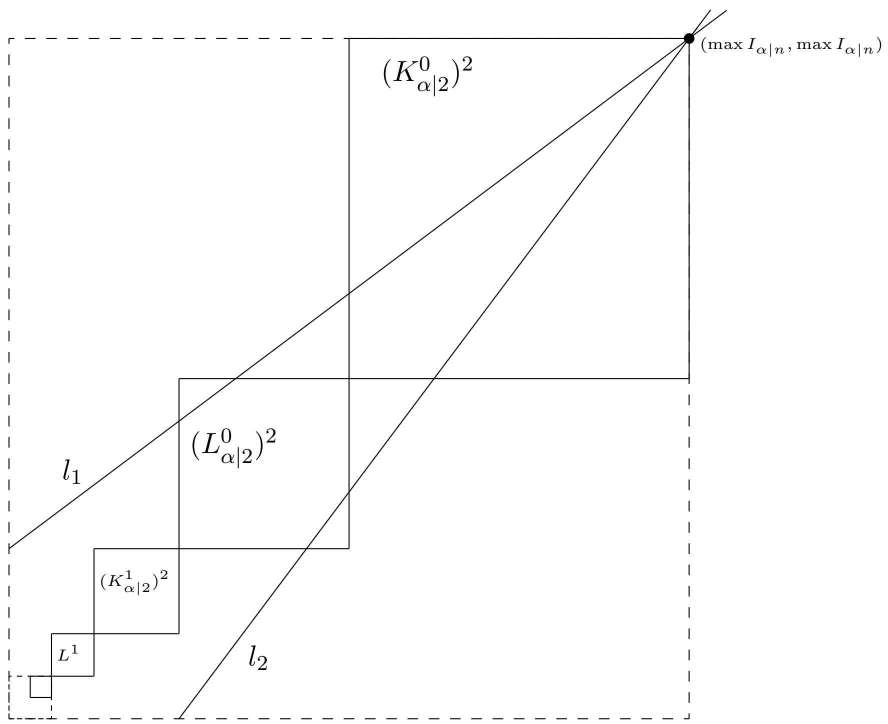
Niech $T \notin \widetilde{WF}$. Wówczas $[T] \neq \emptyset$, gdzie $[T]$ jest ciałem drzewa T. Niech $\alpha \in [T]$. Pokażemy, że f^T ma pochodną prawostronną w x równą 1, gdzie $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}$; w szczególności $f^T \notin SS\mathbb{H}^+$, co zakończy dowód twierdzenia. Ustalmy $n \geq 2$. Pokażemy, że dla y ze zbioru

$$\bigcup_{i<\alpha(n)} I_{(\alpha|(n-1))\hat{\ }i} \cup \bigcup_{i<\alpha(n)} J_{(\alpha|(n-1))\hat{\ }i} \cup \bigcup_{i<n} K^i_{\alpha|(n-1)} \cup \bigcup_{i<n} L^i_{\alpha|(n-1)} \tag{3.1}$$

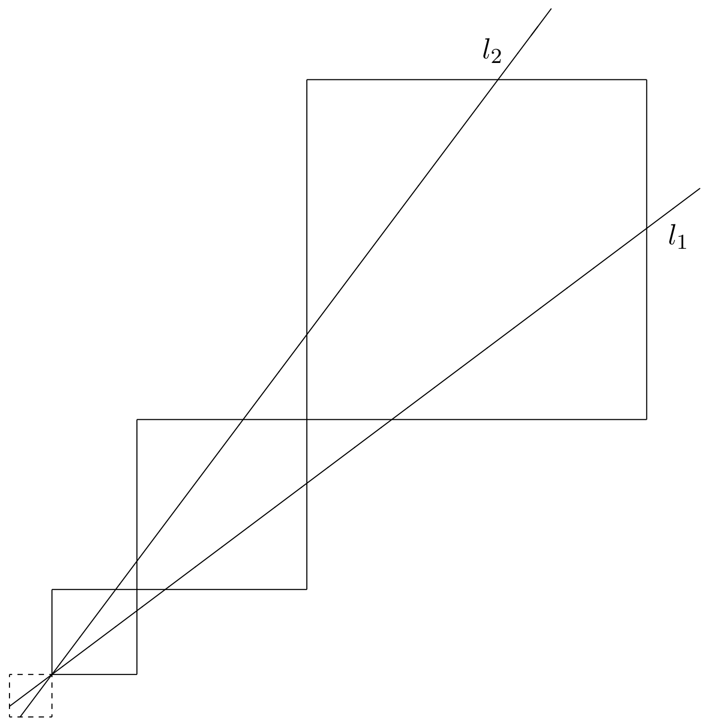
(jest to suma wszystkich przedziałów pojawiających się w n-tym kroku konstrukcji f^T na prawo od punktu x) mamy

$$1 - 2^{-n} \leq \frac{f^T(y) - f^T(x)}{y - x} \leq \frac{2^n}{2^n - 1}. \tag{3.2}$$

W każdym przedziale, który pojawia się w sumie (3.1), funkcja f^T jest afiniczną kopią E^n lub jest modyfikacją takiej kopii leżącą bliżej wykresu funkcji identycznościowej. Niech l_1 i l_2 będą prostymi takimi, że $(\max I_{\alpha|n}, \max I_{\alpha|n})$ jest ich punktem przecięcia, a wpółczynniki kierunkowe wynoszą odpowiednio $1 - 2^{-n}$ i $\frac{2^n}{2^n-1}$. Na Rysunkach 3.4 i 3.5 przedstawiona jest ta sytuacja w przypadku, gdy $n = 2$. Z Lematu 3.3 oraz konstrukcji f^T wynika,



Rysunek 3.4: Przypadek $n = 2$



Rysunek 3.5: Przypadek $n = 2$, c.d.

że punkt $(y, f^T(y))$ leży między l_1 i l_2, a dokładniej nad l_1 i pod l_2 (na Rysunku 3.5 przerywaną linią zaznaczono kwadrat $(I_{\alpha|2})^2$; punkt $(y, f^T(y))$ leży w jednym z kwadratów na prawo od $(I_{\alpha|2})^2$). Punkt $(x, f^T(x))$ leży w kwadracie $I^2_{\alpha|(n+1)}$, a zatem leży także w kwadracie $[\min I_{\alpha|n}, \max I_{(\alpha|n)\hat{}0}]^2$ (na Rysunku 3.4 kwadrat $(I_{\alpha|2})^2$ to duży kwadrat zaznaczony przerywaną linią; mały kwadrat w lewym dolnym rogu tego rysunku zaznaczony linią przerywaną, to $[\min I_{\alpha|2}, \max I_{(\alpha|2)\hat{}0}]^2$). Ponieważ $2^{2n}(\max I_{(\alpha|n)\hat{}0} - \min I_{\alpha|n}) = |I_{\alpha|n}|$, więc kwadrat $[\min I_{\alpha|n}, \max I_{(\alpha|n)\hat{}0}]^2$ leży powyżej l_2 i poniżej l_1. Stąd mamy (3.2). Skoro każdy punkt $y > x$ leżący wystarczająco blisko punktu x należy do pewnego zbioru postaci (3.1), to z (3.2) otrzymujemy $D^+f^T(x) = 1 = D_+f^T(x)$. $\square$

Twierdzenie 3.6 *Zbiór $SS\mathbb{H}^-$ jest Π^1_1–zupełny.*

Dowód. Dla $f \in \mathbb{H}$ połóżmy $\overline{f}(x) = 1-f(1-x)$, $x \in [0,1]$. Wówczas $\overline{f} \in \mathbb{H}$. Ponadto odwzorowanie $f \mapsto \overline{f}$ jest homeomorfizmem $\mathbb{H}$ na siebie. Jednocześnie dla $f \in \mathbb{H}$ mamy $D^+f(x) = D^-\overline{f}(1-x)$ dla $x \in [0,1)$ oraz $D_+f(x) = D_-\overline{f}(1-x)$ dla $x \in (0,1]$. Stąd otrzymujemy, że zbiór $SS\mathbb{H}^-$ ma tę samą złożoność deskryptywną co zbiór $SS\mathbb{H}^-$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.5 otrzymujemy tezę. $\square$

Teraz zmodyfikujemy nieco powyższą konstrukcję, by pokazać, że zbiór $SS\mathbb{H}$ jest Π^1_1–zupełny. Niech

$$F(f)(x) = \begin{cases} P([0,\frac{1}{2}], \overline{E(f)})(x) & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ P([\frac{1}{2}, 1], E(f))(x) & \text{dla } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Na Rysunku 3.6 pokazane jest działanie operacji $F(\cdot)$ na funkcję $g \in \mathbb{H}$ rozważaną przed Lematem 3.3. Niech $h \in \mathbb{H}$ będzie wcześniej ustaloną funkcją o własności $(*)$. Definiujemy $F^1 = F(h)$ oraz $F^{n+1} = F(F^n)$ dla $n \geq 1$. Zauważmy, że wykres funkcji F^n leży między dwiema prostymi $x \mapsto x - 1/4^n$ i $x \mapsto x + 1/4^n$.

Dowód Twiedzenia 3.1. Dowód koanalityczności $SS\mathbb{H}$ jest standardowy (por. [11, Lemat 5.2]). Pokażemy Π^1_1–zupełność. Niech $I_\emptyset = J_\emptyset = [0,1]$ oraz $I_{(n)} = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}]$ i $J_{(n)} = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+2}}]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\overline{I_{(n)}} = \{1 - x : x \in I_{(n)}\}$ oraz $\overline{J_{(n)}} = \{1 - x : x \in J_{(n)}\}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Następnie dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $|s| \geq 1$, indukcyjnie definiujemy $I_{s\hat{}n} = \varphi_{I_s}(I_{(|s|+n)})$ oraz $J_{s\hat{}n} = \varphi_{I_s}(J_{(|s|+n)})$; analogicznie określamy $\overline{I_{s\hat{}n}}$ i $\overline{J_{s\hat{}n}}$. Niech dalej $K^i_s = \varphi_{I_s}(I_{(i)})$ oraz $L^i_s = \varphi_{I_s}(J_{(i)})$ dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ oraz $i < |s|$; analogicznie określamy $\overline{K^i_s}$ i $\overline{L^i_s}$. Niech $T \in \widetilde{Tr}$. Połóżmy $f^T_0 = F^1$. Definiujemy indukcyjnie funkcje f^T_n, $n \in \mathbb{N}$, w następujący sposób. Aby uzyskać f^T_{n+1}, modyfikujemy f^T_n na każdym przedziale postaci I_s, J_s, $K^i_{s|n}$, $L^i_{s|n}$ $(i < n)$, gdzie $s \in T$ i $|s| = n+1$. Mianowicie

Rysunek 3.6: Wykres funkcji $F(g)$

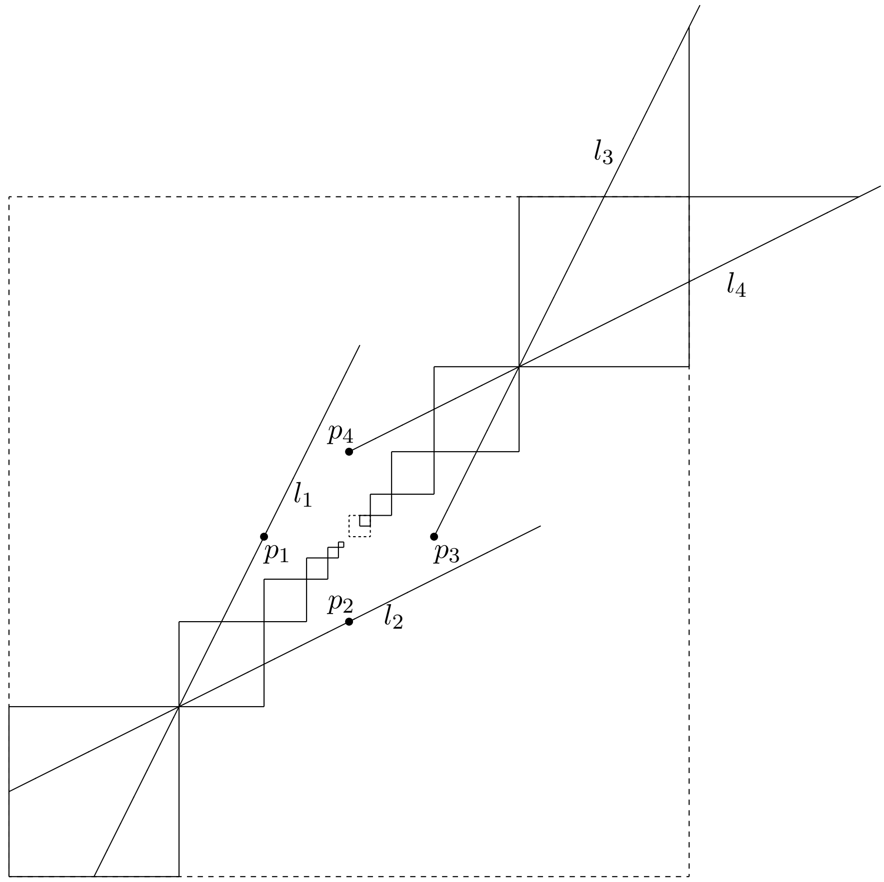
na I_s przyjmujemy f^T_{n+1} równą $P(I_s, F^{n+2})$, a na J_s kładziemy $P(J_s, F^{n+2})$; podobnie definiujemy f^T_{n+1} na $K^i_{s|n}$ i $L^i_{s|n}$ dla wszystkich $i < n$. Na przedziałach $\overline{I_s}$, $\overline{J_s}$, $\overline{K^i_{s|n}}$, $\overline{L^i_{s|n}}$ definiujemy f^T_{n+1} analogicznie. W pozostałych punktach przedziału $[0,1]$ funkcja f^T_n pozostaje niezmieniona.

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.5 pokazujemy, że ciąg (f^T_n) spełnia warunek Cauchy'ego w $C[0,1]$ oraz jest zbieżny do pewnego $f^T \in \mathbb{H}$. Ponadto $T \mapsto f^T$ jest ciągłym odwzorowaniem z $\widetilde{Tr}$ w $\mathbb{H}$. Na koniec stosując odpowiednie geometryczne rozważania, pokażemy, że $T \in \widetilde{WF} \iff f^T \in SS\mathbb{H}$ dla każdego $T \in \widetilde{Tr}$.

Jeśli $T \in \widetilde{WF}$, to podobnie jak w dowodzie dla $SS\mathbb{H}^+$ pokazujemy, że dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje otoczenie U punktu x oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f^T|U = f^T_n|U$. Skąd wynika, że $f^T \in SS\mathbb{H}$.

Niech $T \notin \widetilde{WF}$. Niech $\alpha \in [T]$. Pokażemy, że f^T ma pochodną w x równą 1, gdzie $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}$; w szczególności $f^T \notin SS\mathbb{H}$. Ustalmy $n \geq 2$. Niech y będzie elementem sumy wszystkich przedziałów pojawiających się w n-tym kroku konstrukcji f^T na prawo od punktu x. Niech l_3 i l_4 będą prostymi odpowiednio o współczynnikach kierunkowych $(1+2/2^n)/(1-1/2^n)$ i $(1-1/2^n)/(1+2/2^n)$ oraz przechodzącymi odpowiedno przez punkty

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\max(I_{\alpha|n}) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\min(I_{\alpha|n}), \frac{1}{2}\left(\max(I_{\alpha|n}) + \min(I_{\alpha|n})\right)\right)$$



Rysunek 3.7: Przypadek, gdy $n = 2$

i

$$p_4 = \left(\frac{1}{2} \left(\max(I_{\alpha|n}) + \min(I_{\alpha|n}) \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \max(I_{\alpha|n}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \min(I_{\alpha|n}) \right).$$

Dla $n = 2$ sytuacja ta jest przedstawiona na Rysunku 3.7 – punkt $(x, f^T(x))$ leży w małym kwadracie zaznaczonym przerywaną linią znajdującym się w środku rysunku. Wówczas punkty $(x, f^T(x))$ i $(y, f^T(y))$ leżą między prostymi l_3 i l_4 po przeciwnych stronach punktu przecięcia tych prostych. Zatem

$$\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{2}{2^n}} \leq \frac{f^T(y) - f^T(x)}{y - x} \leq \frac{1 + \frac{2}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}},$$

co przy $n \to \infty$ daje $(f^T)'_+(x) = 1$. Niech teraz y będzie elementem domknięcia sumy wszystkich przedziałów pojawiających się w n-tym kroku konstrukcji na lewo od punktu x. Niech l_1 i l_2 będą prostymi odpowiednio o współczynnikach kierunkowych $(1+2/2^n)/(1-1/2^n)$ i $(1-1/2^n)/(1+2/2^n)$ przechodzącymi odpowiednio przez punkty

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \max(I_{\alpha|n}) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \min(I_{\alpha|n}), \frac{1}{2} \left(\max(I_{\alpha|n}) + \min(I_{\alpha|n}) \right) \right)$$

i

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\left(\max(I_{\alpha|n}) + \min(I_{\alpha|n})\right), \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\max(I_{\alpha|n}) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\min(I_{\alpha|n})\right).$$

Wówczas punkty $(x, f^T(x))$ i $(y, f^T(y))$ leżą między prostymi l_1 i l_2 po przeciwnych stronach punktu przecięcia tych prostych. Zatem

$$\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{2}{2^n}} \leq \frac{f^T(y) - f^T(x)}{y - x} \leq \frac{1 + \frac{2}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}},$$

co przy $n \to \infty$ daje $(f^T)'_-(x) = 1$. $\Box$

3.2 Inne zbiory autohomeomorfizmów

Będziemy rozważać następujący zbiór

$$\overline{\Delta}_{<\infty} = \{f \in \mathbb{H} : \forall x \in [0,1)(D^+ f(x) < \infty) \text{ i } \forall x \in (0,1](D^- f(x) < \infty)\}$$

wszystkich autohomeomorfizmów ze skończonymi górnymi pochodnymi Diniego w każdym punkcie, oraz zbiór

$$\underline{\Delta}_{>0} = \{f \in \mathbb{H} : \forall x \in [0,1)(D_+ f(x) > 0) \text{ i } \forall x \in (0,1](D_- f(x) > 0)\}$$

wszystkich autohomeomorfizmów z dodatnimi dolnymi pochodnymi Diniego w każdym punkcie.

Powiemy, że odwzorowanie $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ jest monotoniczne, jeśli

$$\forall s, t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}[(\exists n < |t|, \ \ t|n = s) \Rightarrow f(s) < f(t)].$$

Lemat 3.7 *Istnieje monotoniczna bijekcja pomiędzy* $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *i* $\mathbb{N}$.

Dowód. Zdefiniujemy indukcyjnie bijekcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ taką, że funkcja a^{-1} jest monotoniczna. Połóżmy $a(0) = \emptyset$. Załóżmy, że ciągi $a(0), a(1), ..., a(2^n - 1)$ są określone. Definiujemy $a(2^n), a(2^n + 1), ..., a(2^{n+1} - 1)$ następująco. Dla $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ niech n_k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że ciąg $(a(k))\hat{}n_k$ nie należy do zbioru $\{a(0), a(1), ..., a(2^n + k - 1)\}$. Połóżmy $a(2^n + k) = (a(k))\hat{}n_k$. Odwzorowanie a jest różnowartościowe. Zauważmy ponadto, że ciąg $(m_0, m_1, ..., m_l) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ pojawia się wśród ciągów $a(0), a(1), ..., a(2^{\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)})$. Zatem a jest surjekcją. Funkcja a została tak definiowana, żeby a^{-1} była monotoniczna. $\Box$

Twierdzenie 3.8 *Rodziny* $\overline{\Delta}_{<\infty}$, $\underline{\Delta}_{>0}$ *oraz* $\overline{\Delta}_{<\infty} \cap \underline{\Delta}_{>0}$ *są zbiorami* Π^1_1*–zupełnymi.*

Dowód. Z Lematu 3.4 i definicji zbiorów $\overline{\Delta}_{<\infty}$ i $\underline{\Delta}_{>0}$ łatwo widać, że są one koanalityczne. Zbiór $\overline{\Delta}_{<\infty} \cap \underline{\Delta}_{>0}$ jest koanalityczny jako część wspólna dwóch zbiorów koanalitycznych.

Na początek pokażemy, że zbiór $\overline{\Delta}_{<\infty}$ jest Π^1_1–zupełny. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ niech $\varphi_{[a,b]}(x) = a(1-x) + bx$, dla $x \in [a, b]$. Ustalmy $s \mapsto \langle s \rangle$ – monotoniczną bijekcję z $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ na $\mathbb{N}$ (Lemat 3.7).

Niech $I_\emptyset = J_\emptyset = [0, 1]$ oraz $I_{(n)} = [2^{-n-1}, 2^{-n}]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Indukcyjnie definiujemy przedziały domknięte I_s i J_s dla $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $|s| \geq 1$, takie, że:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ (I_{s\hat{\ }n} = \varphi_{J_s}(I_{(n)}))$;

2. $|J_s| = \frac{1}{4^{\langle s \rangle}} |I_s|$;

3. przedziały I_s i J_s są współśrodkowe.

Ustalmy $T \in Tr$. Niech $f^T_0 = id_{[0,1]}$. Indukcyjnie definiujemy funkcje f^T_n następująco. Aby otrzymać f^T_{n+1}, modyfikujemy funkcję f^T_n na każdym przedziale I_s, gdzie $s \in T$ i $|s| = n + 1$. Na J_s definiujemy f^T_{n+1} jako funkcję afiniczną o współczynniku kierunkowym 2^{n+1} taką, że $f^T_{n+1}(\acute{s}rodek(J_s)) = f^T_n(\acute{s}rodek(I_s))$. Na $I_s \setminus J_s$ definiujemy f^T_{n+1} jako funkcję kawałkami afiniczną taką, że $f^T_{n+1}(\min I_s) = f^T_n(\min I_s)$, $f^T_{n+1}(\max I_s) = f^T_n(\max I_s)$ oraz f^T_{n+1} jest ciągła na I_s.

Zauważmy, że $||f^T_{n+1} - f^T_n|| \leq 1/2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, więc dla $m > n$ mamy

$$(*) \ \ ||f^T_m - f^T_n|| \leq ||f^T_m - f^T_{m-1}|| + ... + ||f^T_{n+1} - f^T_n|| \leq \tfrac{1}{2^m} + ... + \tfrac{1}{2^{n+1}} < \tfrac{1}{2^n}.$$

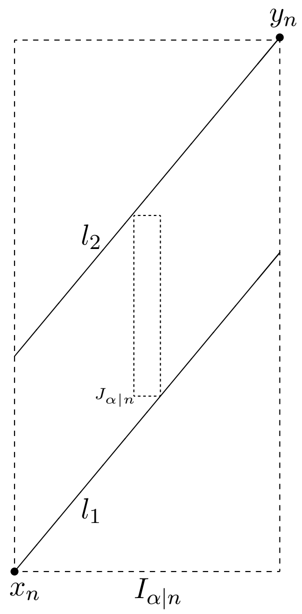
Zatem ciąg (f^T_n) spełnia warunek Cauchy'ego w $C[0, 1]$, a więc jest zbieżny do pewnej funkcji $f^T \in C[0, 1]$. Ponadto $f^T(0) = 0$ i $f^T(1) = 1$. Z konstrukcji wynika, iż f^T jest ściśle rosnąca. Zatem $f^T \in \mathbb{H}$.

Pokażemy teraz, że $T \mapsto f^T$ jest ciągłym odwzorowaniem z Tr w $\mathbb{H}$. Niech S i T będą dwoma drzewami na $\mathbb{N}$ takimi, że dla liczby naturalnej N zachodzi

$$T \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \langle s \rangle < N\} = S \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \langle s \rangle < N\}.$$

Wówczas z konstrukcji i nierówności $(*)$ mamy

$$||f^T - f^S|| \leq \frac{1}{2^{N-1}},$$



Rysunek 3.8: Wzajemne położenie $I_{\alpha|n}$ i $J_{\alpha|n}$

co dowodzi ciągłości $T \mapsto f^T$.

Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że dla każdego $T \in Tr$

$$T \in WF \iff f^T \in \overline{\Delta}_{<\infty}.$$

Niech $T \in WF$ i $x \in [0,1]$. Wtedy x należy do skończenie wielu przedziałów J_s, $s \in T$, lub nie należy do żadnego z nich. Zatem istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz otwarte otoczenie U punktu x takie, że $f_n^T|_U = f^T|_U$. Stąd otrzymujemy $D^+ f^T(x) < +\infty$ oraz $D^- f^T(x) < +\infty$.

Niech teraz $T \notin WF$. Wówczas istnieje $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takie, że $\alpha|n \in T$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech $x_n = \min I_{\alpha|n}$, $y_n = \max I_{\alpha|n}$ oraz $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_{\alpha|n}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, punkt x leży w podprzedziale $J_{\alpha|n}$ przedziału $I_{\alpha|n}$ oraz $|J_{\alpha|n}| = 4^{-\langle\alpha|n\rangle}|I_{\alpha|n}|$. Na Rysunku 3.8 duży prostokąt zaznaczony przerywaną linią ma podstawę równą $|I_{\alpha|n}|$, wysokość $2^n|I_{\alpha|n}|$ i jest taki, że wykres funkcji $f^T|_{I_{\alpha|n}}$ jest w nim zawarty. Mały prostokąt zaznaczony przerywaną linią o podstawie $|J_{\alpha|n}|$ i wysokości $2^{n+1}|J_{\alpha|n}|$, jest współśrodkowy z dużym prostokątem i zawiera wykres funkcji $f^T|_{J_{\alpha|n}}$. W szczególności mały prostokąt zawiera punkt $(x, f^T(x))$. Zatem ilorazy różnicowe $\frac{f^T(y_n)-f^T(x)}{y_n-x}$ i $\frac{f^T(x_n)-f^T(x)}{x_n-x}$ są nie mniejsze niż odpowiednie współczynniki kierunkowe prostych l_2 i l_1. Zauważmy dalej, że współczynniki kierunkowe prostych l_1 i l_2 są takie same i równe

$$\frac{\frac{1}{2}2^n|I_{\alpha|n}| - \frac{1}{2}2^{n+1}|J_{\alpha|n}|}{\frac{1}{2}|I_{\alpha|n}| + \frac{1}{2}|J_{\alpha|n}|} = \frac{2^n|I_{\alpha|n}| - 2^{n+1}4^{-\langle\alpha|n\rangle}|I_{\alpha|n}|}{|I_{\alpha|n}| + 4^{-\langle\alpha|n\rangle}|I_{\alpha|n}|} = 2^n\frac{1-2\cdot 4^{-\langle\alpha|n\rangle}}{1+4^{-\langle\alpha|n\rangle}} \geq$$

$$\geq 2^n \frac{1 - 2 \cdot 4^{-n}}{2} \geq 2^{n-2}.$$

Skoro $x_n \to x$ i $y_n \to y$, to otrzymujemy $D^+ f^T(x) = +\infty$ oraz $D^- f^T(x) = +\infty$.

Z konstrukcji funkcji f^T (dla dowolnego drzewa $T \in Tr$) wynika, że $D_+ f^T(x) \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in [0,1)$ oraz $D_- f^T(x) \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in (0,1]$. Stąd dla dowolnego $T \in Tr$ otrzymujemy

$$T \in WF \iff f^T \in \overline{\Delta}_{<\infty} \cap \underline{\Delta}_{>0}.$$

To dowodzi Π^1_1–zupełności zbioru $\overline{\Delta}_{<\infty} \cap \underline{\Delta}_{>0}$.

Dowód dla $\underline{\Delta}_{>0}$ jest analogiczny jak dla $\overline{\Delta}_{<\infty}$. Mianowicie dla $T \in Tr$ połóżmy $f^T_0 = id_{[0,1]}$, a następnie indukcyjnie definiujemy funkcje f^T_n następująco. Aby otrzymać f^T_{n+1}, modyfikujemy funkcję f^T_n na każdym przedziale I_s, gdzie $s \in T$ i $|s| = n+1$. Na J_s definiujemy f^T_{n+1} jako funkcję afiniczną o współczynniku kierunkowym $1/2^n$ taką, że $f^T_{n+1}(\acute{s}rodek(J_s)) = f^T_n(\acute{s}rodek(I_s))$. Na $I_s \setminus J_s$ definiujemy f^T_{n+1} jako funkcję kawałkami afiniczną taką, że $f^T_{n+1}(\min I_s) = f^T_n(\min I_s)$, $f^T_{n+1}(\max I_s) = f^T_n(\max I_s)$ oraz f^T_{n+1} jest ciągła na I_s. Dalej pokazujemy, że $T \mapsto f^T$ jest ciągłym odwzorowaniem z Tr w $\mathbb{H}$ oraz dla każdego $T \in Tr$

$$T \in WF \iff f^T \in \underline{\Delta}_{>0}.$$

To dowodzi Π^1_1–zupełności zbioru $\underline{\Delta}_{>0}$. $\square$

Uwaga 3.9 Na mocy Faktu 1.4 rodziny $\widetilde{WF}$ i $\widetilde{UB}$ są parą zbiorów koanalitycznych, które nie dają się borelowsko oddzielić (inne przykłady takich zbiorów można znaleźć w [2]). Przez $S\mathbb{SH}_1$ oznaczmy zbiór wszystkich autohomeomorfizmów z dokładnie jednym punktem z $[0,1]$, w którym istnieje pochodna skończona i dodatnia. Zauważmy, że dla dowolnego drzewa $T \in Tr$

$$T \in \widetilde{WF} \iff f^T \in SS\mathbb{H} \quad \text{i} \quad T \in \widetilde{UB} \iff f^T \in SS\mathbb{H}_1,$$

gdzie $\widetilde{UB} = UB \cap \widetilde{Tr}$. To pokazuje, że $SS\mathbb{H}$ i $SS\mathbb{H}_1$ są parą zbiorów koanalitycznych, które nie dają się borelowsko oddzielić. Można analogicznie dowieść podobnego faktu, dobierając odpowiednie pary do rodzin $SS\mathbb{H}^+$, $\overline{\Delta}_{<\infty}$, $\underline{\Delta}_{>0}$ oraz $\overline{\Delta}_{<\infty} \cap \underline{\Delta}_{>0}$.

Uwaga 3.10 Istnieje ścisły związek między singularnymi miarami prawdopodobieństwa na $[0,1]$ a singularnymi autohomeomorfizmami przedziału $[0,1]$, gdyż każda miara Lebesgue'a–Stieltjesa generowana przez singularny autohomeomorfizm jest singularną miarą prawdopodobieństwa. Stosując ten fakt, pokażemy, że zbiór $S\mathbb{H}$ wszystkich singularnych autohomeomorfizmów przedziału $[0,1]$ jest borelowski. Niech ν będzie ustaloną ciągłą miarą prawdopodobieństwa na $[0,1]$ i niech μ oznacza miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Przez $\mathbb{P}([0,1])$ oznaczmy przestrzeń wszystkich borelowskich miar probabilistycznych na $[0,1]$ wyposażoną w najsłabszą topologię, w której wszystkie odwzorowania postaci $\nu \mapsto \int_0^1 f d\nu$, $f \in C[0,1]$, są ciągłe (por. [14, 17.E]). Przypomnijmy, że miarę ciągłą ν nazywamy singularną, gdy istnieje zbiór borelowski miary μ zero $A \subset [0,1]$ taki, że $\nu(A) = 1$, co symbolicznie oznaczamy $\nu \perp \mu$. Ponieważ relacja $\perp$ jest borelowska w $\mathbb{P}([0,1]) \times \mathbb{P}([0,1])$ (patrz [14, 17.39]) oraz zbiór $\{\nu \in \mathbb{P}([0,1]) : \nu \text{ jest ciągła}\}$ jest podzbiorem borelowskim $\mathbb{P}([0,1])$ (por. [14, 17.37]), więc zbiór

$$S\mathbb{P} = \{\nu \in \mathbb{P}([0,1]) : \nu \perp \mu \text{ oraz } \nu \text{ jest ciągła}\}$$

jest także borelowski. Dla $f \in \mathbb{H}$ niech ν_f będzie jedyną miarą prawdopodobieństwa na $[0,1]$ taką, że $\nu_f([0,x)) = f(x)$. Odwzorowanie $f \mapsto \nu_f$ działające z $\mathbb{H}$ w $\mathbb{P}([0,1])$ jest ciągłe , gdyż zbieżność $f_n \to f$ w przestrzeni $\mathbb{H}$ (zbieżność jednostajna) implikuje $\nu_{f_n} \to \nu_f$ w $\mathbb{P}([0,1])$ (por. [3, paragraf 14]). Ponadto $f \in S\mathbb{H} \iff \nu_f \perp \mu$ dla dowolnego $f \in \mathbb{H}$ (por. [3, paragraf 32, str. 423]). Zatem zbiór $S\mathbb{H}$ (jako przeciwobraz zbioru $S\mathbb{P}$ przez odwzorowanie ciągłe) ma złożoność deskryptywną nie większą niż zbiór $S\mathbb{P}$, w szczególności jest borelowski.

Rozdział 4

Funkcje ciągłe różniczkowalne poza zbiorem przeliczalnym

Klasyczne twierdzenie Mazurkiewicza [19], [14, 33.9] mówi, że zbiór $DIFF$ wszystkich funkcji z $C[0,1]$, które są różniczkowalne w każdym punkcie, jest Π^1_1–zupełny, w szczególności nieborelowski. W niedawno opublikowanej pracy [25] Sofronidis pokazał, że zbiór wszystkich kawałkami różniczkowalnych funkcji jest zbiorem Π^1_1–zupełnym. Na mocy definicji, funkcja f jest kawałkami różniczkowalna na $[0,1]$, gdy istnieje skończony podzbiór $[0,1]$ poza którym jest ona różniczkowalna. W tym rozdziale zbadamy, co się stanie, jeśli w twierdzeniu Sofronidisa zastąpimy słowo „skończony" słowem „przeliczalny". Pokażemy (Wniosek 4.3 (iv)), że zbiór wszystkich funkcji z $C[0,1]$ o przeliczalnym zbiorze punktów nieróżniczkowalności jest Π^1_1–zupełny. Główna konstrukcja oraz Twierdzenie 4.1 naśladują dowód twierdzenia Mazurkiewicza przedstawiony w monografii Kechrisa [14]. Jako szczególny przypadek dostajemy zarówno twierdzenie Mazurkiewicza jak i twierdzenie Sofronidisa. Modyfikacja konstrukcji z [14] polega na użyciu dodatkowego parametru $d \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, dzięki czemu możemy generować odpowiednie zbiory doskonałe. Przez zbiór doskonały w przestrzeni metrycznej rozumiemy niepusty domknięty zbiór w sobie gęsty.

Konstrukcja

Dla przedziału $K = [u,v]$, przez $K^{(L)}$ i $K^{(R)}$ oznaczmy odpowiednio prawą i lewą połowę przedziału K (tzn. $K^{(L)} = [u, \frac{1}{2}(u+v)]$ i $K^{(R)} = [\frac{1}{2}(u+v), v]$); przez $|J|$ oznaczmy długość przedziału J; dla skończonego ciągu s przez $|s|$ liczbę jego wyrazów. Niech $Z = \{(s,d) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{<\mathbb{N}} : |s| = |d|\}$ i ustalmy bijekcję $(s,d) \mapsto \langle (s,d) \rangle$ pomiędzy Z i $\mathbb{N}$. Dla $T \in Tr$ oznaczmy $Z(T) = \{(s,d) \in Z : s \in T\}$. Dla $(s,d) \in Z$ przez $|(s,d)|$ oznaczmy wspólną wartość $|s|$ i $|d|$. Dla $f \in C[0,1]$ połóżmy $ND(f) = \{x \in$

$[0,1] : f'(x)$ nie istnieje$\}$ („$f'(x)$ nie istnieje” oznacza tutaj, że granica $\lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ nie istnieje lub jest nieskończona).

Ustalmy domknięty przedział $I = [a,b] \subset [0,1]$ i niech $\varphi(x;I)$ będzie funkcją o dziedzinie $[0,1]$ daną wzorem:

$$\varphi(x;I) = \begin{cases} \frac{16(x-a)^2(x-b)^2}{(b-a)^3}, & \text{jeśli } x \in I, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja ta jest różniczkowalna na $[0,1]$.

Definiujemy dla każdego $(s,d) \in Z$ przedziały domknięte $J_{(s,d)}$ oraz $K_{(s,d)}$ takie, że:

(i) $K_{(s,d)} \subset J_{(s,d)}$ jest współśrodkowy z $J_{(s,d)}$ oraz $|K_{(s,d)}| \leq 2^{-\langle (s,d)\rangle}(|J_{(s,d)}| - |K_{(s,d)}|)$;

(ii) $J_{(s\hat{\ }n,d\hat{\ }i)} \subset K^{(L)}_{(s,d)}$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $i \in \{0,1\}$;

(iii) $J_{(s\hat{\ }n,d\hat{\ }i)} \cap J_{(s\hat{\ }m,d\hat{\ }j)} = \emptyset$ dla dowolnych $n,m \in \mathbb{N}$ oraz $i,j \in \{0,1\}$, o ile $(n,i) \neq (m,j)$.

Na początek przyjmujemy $J_{(\emptyset,\emptyset)} = [0,1]$, a dalsza konstrukcja jest indukcyjna względem długości $|(s,d)|$. Mając drzewo T na $\mathbb{N}$, połóżmy

$$F_T(x) = \sum_{(s,d)\in Z(T)} \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}), \quad x \in [0,1].$$

Skoro $0 \leq \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}) \leq |K^{(R)}_{(s,d)}| \leq 2^{-\langle (s,d)\rangle}$, to $F_T \in C[0,1]$.

Pokażemy teraz, że $T \mapsto F_T$ jest ciągłym odwzorowaniem działającym z Tr w $C[0,1]$. Niech $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, by $2^{-(N-2)} < \varepsilon$. Ustalmy $T \in Tr$ i rozważmy dowolne drzewo $S \in Tr$ takie, że

$$T \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \forall d \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}(|d| = |s| \Rightarrow \langle (s,d)\rangle < N)\} =$$

$$S \cap \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \forall d \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}(|d| = |s| \Rightarrow \langle (s,d)\rangle < N\}.$$

Wówczas dla dowolnego $x \in [0,1]$ mamy

$$|F_T(x) - F_S(x)| \leq \sum_{(s,d)\in Z(T), \langle (s,d)\rangle \geq N} \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}) + \sum_{(s,d)\in Z(S), \langle (s,d)\rangle \geq N} \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}) \leq$$

$$\sum_{i \geq N} (2^{-i} + 2^{-i}) = \frac{1}{2^{N-2}} < \varepsilon.$$

Niech

$$G_T = \bigcup_{y\in[T]} \bigcap_n \bigcup_{d\in\{0,1\}^n} J_{(y|n,d)} \quad \text{dla } T \in Tr.$$

Zauważmy, że dla każdego $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zbiór $\bigcap_n \bigcup_{d\in\{0,1\}^n} J_{(y|n,d)}$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Zatem dla dowolnego drzewa T zachodzą warunki:

$(*)$ $(T \in WF \iff G_T = \emptyset)$ oraz $(T \notin WF \iff G_T$ zawiera zbiór doskonały$)$.

Twierdzenie 4.1 *Funkcja $T \mapsto F_T$ ma następujące własności:*

1) $T \in WF \iff ND(F_T) = \emptyset$;

2) $T \notin WF \iff ND(F_T)$ *zawiera zbiór doskonały.*

Dowód. Na mocy $(*)$ wystarczy pokazać, że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi

$$x \notin G_T \iff F'_T(x) \text{ istnieje.}$$

Załóżmy najpierw, że $x \in G_T$. Wtedy istnieją $y \in [T]$ oraz $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o tej własności, że $x \in K^{(L)}_{(y|n,z|n)}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech c_n będzie środkiem przedziału $K^{(R)}_{(y|n,z|n)}$ i niech $l_n = |K^{(R)}_{(y|n,z|n)}|/2$. Wówczas $F_T(x) = 0$ oraz $F_T(c_n + l_n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_T(c_n + l_n) - F_T(x)}{c_n + l_n - x} = 0.$$

Z drugiej strony

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_T(c_n) - F_T(x)}{c_n - x} \geq \frac{2l_n}{3l_n} = \frac{2}{3}.$$

Ponieważ $c_n \to x$, $c_n + l_n \to x$, więc $F'_T(x)$ nie istnieje.

Niech teraz $x \notin G_T$. Wtedy x należy do co najwyżej skończonej liczby przedziałów typu $J_{(s,d)}$, czyli istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\forall (s,d) \in Z(T) \ \ (\langle (s,d) \rangle \geq N \Rightarrow x \notin J_{(s,d)}).$$

Niech para $(s,d) \in Z(T)$ będzie taka, że $\langle (s,d) \rangle \geq N$ oraz niech $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeżeli $|h| < |J_{(s,d)}| - |K_{(s,d)}|$, to $x + h \notin K^{(R)}_{(s,d)}$, więc $\varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}) = 0$. Mamy zatem

$$\left| \frac{\varphi(x+h, K^{(R)}_{(s,d)}) - \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)})}{h} \right| = \frac{\varphi(x+h, K^{(R)}_{(s,d)})}{|h|} \leq \frac{|K^{(R)}_{(s,d)}|}{|J_{(s,d)}| - |K_{(s,d)}|} \leq 2^{-\langle (s,d) \rangle}.$$

Dla $n \geq N$ połóżmy

$$F^{(n)}_T(x) = \sum_{(s,d) \in Z(T), \langle (s,d) \rangle \leq n} \varphi(x, K^{(R)}_{(s,d)}).$$

Pokażemy, że $F'_T(x)$ istnieje. Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy $n \geq N$ takie, że $2^{-n} < \varepsilon/2$. Niech $k = \min\{|(s,d)| : (s,d) \in Z(T) \text{ i } \langle (s,d) \rangle \geq n\}$ i ustalmy parę $(\overline{s}, \overline{d}) \in Z(T)$ taką, że $|(\overline{s}, \overline{d})| = k$. Połóżmy $\overline{\delta} = |J_{(\overline{s},\overline{d})}| - |K_{(\overline{s},\overline{d})}|$. Niech $|h| \in (0, \overline{\delta})$. Wówczas otrzymujemy

$$\left| \frac{F_T(x+h) - F_T(x)}{h} - \frac{F^{(n)}_T(x+h) - F^{(n)}_T(x)}{h} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{(s,d)\in Z(T),\langle(s,d)\rangle>n} \left| \frac{\varphi(x+h, K_{(s,d)}^{(R)}) - \varphi(x, K_{(s,d)}^{(R)})}{h} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Funkcja $F_T^{(n)}$ jest różniczkowalna, więc istnieje $\delta \in (0, \overline{\delta}]$ taka, że

$$\left| \frac{F_T^{(n)}(x+h) - F_T^{(n)}(x)}{h} - \frac{F_T^{(n)}(x+h') - F_T^{(n)}(x)}{h'} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla dowolnych h, h' takich, że $|h|, |h'| \in (0, \delta)$. Stąd i poprzednich oszacowań mamy

$$\left| \frac{F_T(x+h) - F_T(x)}{h} - \frac{F_T(x+h') - F_T(x)}{h'} \right| < \varepsilon$$

dla dowolnych h, h' takich, że $|h|, |h'| \in (0, \delta)$. Zatem istnieje skończona pochodna $F_T'(x)$.
□

Wniosek 4.2 *Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną przeliczalnych podzbiorów $[0,1]$ taką, że $\emptyset \in \mathcal{R}$. Wtedy zbiór $\{f \in C[0,1] : ND(f) \in \mathcal{R}\}$ jest Π_1^1–hard. W szczególności jeśli zbiór ten jest koanalityczny, to jest Π_1^1-zupełny.*

Wniosek 4.3 (i) *Zbiór $\{f \in C[0,1] : ND(f) = \emptyset\}$ jest Π_1^1–zupełny (Mazurkiewicz [19], [14, 33.9]).*

(ii) *Zbiór $\{f \in C[0,1] : ND(f)$ jest skończony$\}$ jest Π_1^1–zupełny (Sofronidis [25]).*

(iii) *Zbiór $\{f \in C[0,1] : ND(f)$ jest przeliczalny$\}$ jest Π_1^1–zupełny.*

(iv) *Zbiór $\{f \in C[0,1] : ND(f)$ jest przeliczalny typu $G_\delta\}$ jest Π_1^1–zupełny.*

Dowód. Z Wniosku 4.2 wynika że zbiory opisane w warunkach (i)–(iv) są Π_1^1–hard. Wystarczy więc pokazać, że są one koanalityczne.

Połóżmy $E = \{(f, x) \in C[0,1] \times [0,1] : f'(x)$ nie istnieje$\}$. Wiadomo, że zbiór E jest Σ_3^0 ([14, 23.23]) oraz zbiór w (i) jest dopełnieniem rzutu E na pierwszą współrzędną, zatem jest on koanalityczny.

Zbiór w (ii) jest dopełnieniem rzutu zbioru borelowskiego

$$\{(f, (x_n)) \in C[0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}} : (\forall i, j \in \mathbb{N})(i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j) \wedge \forall n \in \mathbb{N}((f, x_n) \notin E)\}$$

na $C[0,1]$.

Niech $E_f = \{x \in [0,1] : (x, f) \in E\}$ (cięcie zbioru E punktem f). Mamy $\{f \in C[0,1] : ND(f)$ jest przeliczalny$\} = \{f \in C[0,1] : E_f$ jest przeliczalny$\}$. Na mocy twierdzenia Mazurkiewicza-Sierpińskiego [14, 29.19] zbiór w (iii) jest koanalityczny.

Dla dowodu (iv) odnotujmy najpierw, że zbiór przeliczalny $A \subset [0,1]$ jest typu G_δ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera niepustego zbioru w sobie gęstego (por. [16, str. 78, 252, 259, 417]). Ponadto dla dowolnego $A \subset [0,1]$ mamy

$$A \text{ zawiera niepusty zbiór w sobie gęsty } \iff$$

$$\exists\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \ \ \forall n, r \in \mathbb{N} \ \ \exists k \in \mathbb{N} \ \ (0 < |a_n - a_k| < \frac{1}{r+1}).$$

Dalej zauważmy, że zbiór

$$\{(f,(x_n)) \in C[0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}} : \forall n, r \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (0 < |x_n - x_k| < \frac{1}{r+1} \wedge (f, x_n) \notin E)\}$$

jest borelowski. Zatem zbiór

$$\{f \in C[0,1] : ND(f) \text{ zawiera niepusty zbiór w sobie gęsty } \} =$$

$$\{f \in C[0,1] : \exists (x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}\, \forall n, r \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (0 < |x_n - x_k| < \frac{1}{r+1} \wedge (f, x_n) \notin E)\}$$

jest analityczny. Stąd i z (iii) wynika, że zbiór w (iv) jest koanalityczny. □

Przedstawimy teraz ideę innej metody dowodu Twierdzenia 4.1. W tym celu zdefiniujemy pewną specjalną rodzinę drzew na $\mathbb{N}$. Dla $s, t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ takich, że $|s| = |t|$ i dla liczby $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $s+t$ oraz ns w następujący standardowy sposób: $(s+t)(k) = s(k)+t(k)$ i $(ns)(k) = ns(k)$ dla $k \in \mathbb{N}$, $k < |s|$. Analogicznie definiujemy operacje $\alpha + \beta$ i $n\alpha$ dla ciągów nieskończonych α, $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Następnie definiujemy odwzorowanie $H : Tr \to Tr$ wzorem

$$H(T) = \{2s + \varepsilon : s \in T \text{ oraz } \varepsilon \in \{0,1\}^{|s|}\}, \quad T \in Tr.$$

Połóżmy $Tr^* = H(Tr)$. Ponieważ $T \in Tr^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ $[2s \in T \Rightarrow \forall \varepsilon \in \{0,1\}^{|s|}\ (2s + \varepsilon \in T)]$, więc Tr^* jest domkniętym podzbiorem Tr. Zatem jest to podprzestrzeń polska przestrzeni Tr, przy czym drzewa $T \in Tr^*$ mają następującą własność

$$[T] \neq \emptyset \iff [T] \text{ jest zbiorem doskonałym.}$$

Implikacja „$\Leftarrow$” jest oczywista. Dla dowodu „$\Rightarrow$” załóżmy, że drzewo $T \in Tr^*$ jest takie, że $[T] \neq \emptyset$. Wówczas istnieje $S \in Tr$ takie, że $T = H(S)$. Niech $x \in [T]$. Wtedy $x|n = 2s^{(n)} + \varepsilon^{(n)}$, gdzie $s^{(n)} \in S$ oraz $\varepsilon^{(n)} \in \{0,1\}^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech ciąg $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie taki, że $y|n = s^{(n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $y \in [S]$ oraz dla każdego ciągu $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mamy $2y + z \in [T]$. Zatem $[T]$ jest zbiorem doskonałym, gdyż jest to zbiór domknięty (por. [14, 2.4]) oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wraz z punktem x zbiór $[T]$ zawiera punkt $2y + z$ taki, że $z|n = \varepsilon^{(n)}$, $z(n) = 1 - \varepsilon^{(n+1)}(n)$.

Niech $WF^* = WF \cap Tr^*$. Ustalmy $s \mapsto \langle s \rangle$ – bijekcję między $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ i $\mathbb{N}$. Funkcja H jest borelowska jako punktowa granica ciągłych odwzorowań $H_k : Tr \to Tr$ zdefniowanych następująco

$$H_k(T) = \{2s + \varepsilon : s \in T,\ \langle s \rangle < k,\ \varepsilon \in \{0,1\}^{|s|}\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ pojęcia Π^1_1–zupełności i borelowskiej Π^1_1–zupełności są sobie równoważne (patrz [13]), więc WF^* jest Π^1_1–zupełny.

Teraz w niewielkim stopniu modyfikujemy dowód twierdzenia Mazurkiewicza z [14], aby uzyskać Twierdzenie 4.1. Niech $T \mapsto \Phi_T$ będzie ciągłym odwzorowaniem działającym z przestrzeni Tr w $C[0,1]$ opisanym w [14, 33.9], które świadczy o tym, że $DIFF$ jest Π^1_1–zupełny (odwzorowanie to jest podobne do naszego odwzorowania $T \mapsto F_T$ zdefiniowanego na początku rozdziału, lecz w jego konstrukcji nie stosujemy parametru d). Niech $T \in Tr$. Wówczas z każdym ciągiem $\alpha \in [T]$ jest związany punkt x_α taki, że skończona pochodna $\Phi'_T(x_\alpha)$ nie istnieje oraz dla różnych $\alpha, \beta \in [T]$ punkty x_α i x_β są różne. Z drugiej strony jeśli $[T] = \emptyset$, to Φ_T jest wszędzie różniczkowalna. Stąd dla $T \in Tr^*$ mamy

$$[T] \neq \emptyset \iff |\{x \in [0,1] : \Phi'_T(x) \text{ nie istnieje}\}| > \omega.$$

Zatem funkcja $T \mapsto \Phi_T$ obcięta do Tr^* ma te same własności co funkcja $T \mapsto F_T$ z Twierdzenia 4.1.

Wiele przykładów zbiorów Π^1_1–zupełnych (w tym większość takich przykładów z monografii [14]) ma następującą postać

$$\{\text{obiekty bez punktów osobliwych}\}$$

(por. [2]). Obiektami mogą być funkcje ciągłe na $[0,1]$, funkcje ciągłe na $\mathbb{T}$ (gdzie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) lub homeomorfizmy przestrzeni zwartej, a punktami osobliwymi mogą być odpowiednio: punkty nieróżniczkowalności (por. twierdzenie Mazurkiewicza), punkty w których szereg Fouriera nie jest zbieżny (por. [14, 33.13]) lub punkty, w których homeomorfizm ma orbity nieskończone (por. [14, 33.20]). Znaną metodą dowodzenia Π^1_1–zupełności zbiorów koanalitycznych tego typu jest znalezienie ciągłego (borelowskiego) odwzorowania G przekształcającego Tr w daną przestrzeń mającego następujące właności:

(a) jeśli $[T] = \emptyset$, to $G(T)$ nie ma punktów osobliwych;

(b) jeśli $\alpha \in [T]$, to istnieje punkt x_α, w którym $G(T)$ ma osobliwość;

(c) jeśli $\alpha, \beta \in [T]$ są różnymi ciągami, to punkty osobliwe x_α i x_β dla $G(T)$ też są różne.

Zauważmy, że warunek (c) nie jest potrzebny do dowodu Π^1_1–zupełności, jednak gdy on zachodzi, to funkcja G ma własność

$$\forall T \in Tr^* \ \ ([T] \neq \emptyset \iff G(T) \text{ ma nieprzeliczalny zbiór punktów osobliwych}).$$

Powyższe rozważania można powtórzyć w przypadku, gdy zamiast $WF^* = WF \cap Tr^*$ rozpatrujemy $\widetilde{WF}^* = \widetilde{WF} \cap Tr^*$. Analiza kilku wybranych dowodów Π^1_1–zupełności prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 4.4 (i) *Zbiór* $\{(f_n) \in (C[0,1])^{\mathbb{N}} : (f_n)$ *jest zbieżny punktowo poza zbiorem przeliczalnym*$\}$ *jest* Π^1_1*–zupełny (por. [14, 33.11]);*

(ii) *Zbiór*

$$NBP^* = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : |\{x \in K : p^-(K,x) > 0 \ i \ p^+(K,x) > 0\}| \leq \omega\}$$

jest Π^1_1*–zupełny (por. Twierdzenie 2.17);*

(iii) *Zbiór*

$$SS\mathbb{H}^* = \{f \in \mathbb{H} : |\{x \in [0,1] : 0 < f'(x) < \infty\}| \leq \omega\}$$

jest Π^1_1*–zupełny (por. Twierdzenie 3.1).*

Dowód. Wobec powyższych uwag wystarczy pokazać, że zbiory (i)–(iii) są koanalityczne. Za każdym razem będziemy korzystać z twierdzenia Mazurkiewicza-Sierpińskiego [14, 29.19], rozważając przeliczalne cięcia odpowiednich zbiorów.

Ad (i). Wiadomo [14, 23.18], że zbiór

$$E^{(1)} = \{((f_n), x) \in (C[0,1])^{\mathbb{N}} \times [0,1] : (f_n(x)) \text{ nie jest zbieżny}\}$$

jest borelowski. Wówczas zbiór

$$\{(f_n) \in (C[0,1])^{\mathbb{N}} : (f_n) \text{ jest zbieżny punktowo poza zbiorem przeliczalnym}\} =$$

$$= \{(f_n) \in (C[0,1])^{\mathbb{N}} : E^{(1)}_{(f_n)} \text{ jest przeliczalny}\}$$

jest koanalityczny.

Ad (ii). W dowodzie Twierdzenia 2.17 zostało pokazane, że zbiór

$$\{(K,x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : x \in K \Rightarrow (p^-(K,x) = 0 \text{ lub } p^+(K,x) = 0)\}$$

jest borelowski. Stąd wynika, że zbiór

$$E^{(2)} = \{(K,x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : x \in K \text{ i } p^-(K,x) > 0 \text{ i } p^+(K,x) > 0)\}$$

jest borelowski. Wówczas zbiór NBP^* jest równy

$$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) : E^{(2)}_K \text{ jest przeliczalny}\},$$

więc jest koanalityczny.

Ad (iii). Na mocy Lematu 3.4 zbiór

$$E^{(3)} = \{(f,x) \in \mathbb{H} \times [0,1] : f'(x) \text{ istnieje oraz } 0 < f'(x) < \infty\}$$

jest borelowski. Wtedy zbiór $SS\mathbb{H}^*$ jest równy

$$\{f \in \mathbb{H} : E^{(3)}_f \text{ jest przeliczalny}\},$$

więc jest koanalityczny. $\square$

Rozdział 5

Własność Komjátha

Laczkovich w swojej pracy [17] pokazał, że jeśli mamy ciąg (B^n) zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$ taki, że dla każdego nieskończonego zbioru indeksów $H \subset \mathbb{N}$, zbiór

$$\limsup_{n \in H} B^n = \{x \in \mathbb{R} : x \in B^n \text{ dla nieskończenie wielu } n \in H\}$$

jest nieprzeliczalny, to istnieje nieskończony zbiór $G \subset \mathbb{N}$ taki, że iloczyn $\bigcap_{n \in G} B^n$ jest nieprzeliczalny. Na pytanie, czy można osłabić założenie o tym, że zbiory B^n są borelowskie, odpowiedział Komjáth w pracy [15]. Wykazał on, że własność udowodniona przez Laczkovicha pozostaje prawdziwa, jeśli założymy, że ciąg (B^n) składa się ze zbiorów analitycznych. W pracy [15] Komjáth pokazał ponadto, że nie można niesprzecznie tego założenia osłabiać, rozważając jako B^n zbiory koanalityczne. Mianowicie jeśli założymy $V = L$, to istnieje ciąg zbiorów koanalitycznych, który nie ma powyższej własności. Z drugiej strony jeżeli założymy MA_{ω_1}, to wynik Laczkovicha jest prawdziwy dla dowolnego ciągu zbiorów (B^n).

Kilka lat później Halmos w pracy [12] zauważył, że istnieje ciąg (B^n) zbiorów domkniętych takich, że dla każdego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ zbiór $\limsup_{n \in H} B^n$ ma miarę dodatnią i jednocześnie dla każdego $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ zbiór $\bigcap_{n \in G} B^n$ ma miarę zero. Ze względu na prostotę przykładu Halmosa zamieszczamy go poniżej w wersji dla przestrzeni Cantora (w swojej pracy Halmos zastosował zbiory Rademachera w $[0, 1]$).

Niech λ będzie kanoniczną miarą produktową na $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Można myśleć o ciągach z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jako o realizacjach nieskończonego ciągu rzutów symetryczną monetą, a o λ jako o prawdopodobieństwie związanym z tą przestrzenią probabilistyczną. Niech B^n będzie zdarzeniem polegającym na tym, że w n-tym rzucie wypadnie reszka. Formalnie,

$$B^n = \{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \alpha(n) = 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Nawiązując do podejścia Halmosa, można rozważać $[0,1]$ zamiast $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, miarę Lebesgue'a zamiast λ i zbiory $C^n = \{x \in [0,1]$: w n-tym miejscu rozwinięcia dwójkowego x jest $1\}$ zamiast B^n.) Z lematu Borela-Cantelliego wynika, że dla każdego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ mamy $\lambda(\limsup_{n\in H} B^n) = 1$, a z drugiej strony z niezależności zdarzeń B^n otrzymujemy $\lambda(\bigcap_{n\in G} B^n) = 0$ dla każdego $G \subset [\mathbb{N}]^\omega$. Zauważmy dodatkowo, że $\limsup_{n\in H} B^n$ jest gęstym zbiorem typu G_δ, podczas gdy $\bigcap_{n\in H} B^n$ jest domknięty i nigdziegęsty, dla dowolnego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$.

Powyższe rozważania stały się motywacją do wprowadzenia następującej definicji.

Niech dalej w tym rozdziale X będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską. Niech $\mathcal{J}$ będzie ideałem podzbiorów X. Powiemy, że $\mathcal{J}$ ma własność (K) (własność Komjátha), gdy dla każdego ciągu (A_n) podzbiorów analitycznych przestrzeni X, z faktu, że

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n\in H} A_n \notin \mathcal{J}$$

wynika istnienie zbioru $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ spełniającego warunek

$$\bigcap_{n\in G} A_n \notin \mathcal{J}.$$

Jak wcześniej było wspomniane, własność (K) dla ideału zbiorów przeliczalnych udowodnił Komjáth. W dalszej części pracy, modyfikując rozumowanie Komjátha, wykażemy, że istnieje szersza klasa ideałów o tej własności. Z drugiej strony przykład Halmosa pokazuje, że σ–ideały zbiorów miary zero, pierwszej kategorii oraz σ–ideał generowany przez zbiory domknięte miary zero nie mają własności (K).

Dla ideału $\mathcal{J}$ podzbiorów X niech

$$\mathcal{J}|_{\Sigma^1_1} = \{A \subset X : \exists B \in \mathcal{J}(A \subset B \text{ i } B \text{ jest zbiorem analitycznym})\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{J}|_{\Sigma^1_1}$ jest ideałem oraz jeśli $\mathcal{J}$ jest σ–ideałem, to $\mathcal{J}|_{\Sigma^1_1}$ jest σ–ideałem. Wprost z definicji własności (K) otrzymujemy:

$(*)$ $\mathcal{J}$ ma własność (K) $\iff$ $\mathcal{J}|_{\Sigma^1_1}$ ma wałność (K).

Przypomnijmy, że rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ nazywa się bazą ideału $\mathcal{J}$, gdy każdy zbiór $A \in \mathcal{J}$ zawiera się w pewnym zbiorze $B \in \mathcal{F}$. W związku z warunkiem $(*)$ będziemy dalej rozważać tylko ideały o bazie złożonej ze zbiorów analitycznych (mówimy krótko, że są to ideały o bazie analitycznej).

Poniższa obserwacja T. Banakha pokazuje, że jeśli ograniczymy się do ideałów o bazie analitycznej, to badając własność (K), wystarczy rozważać σ–ideały. Dla ideału $\mathcal{J}$ oznaczmy $add(\mathcal{J}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ oraz $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{J}\}$.

Fakt 5.1 *Jeśli ideał $\mathcal{J}$ ma bazę analityczną oraz własność (K), to $add(\mathcal{J}) \geq \omega_1$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $add(\mathcal{J}) < \omega_1$. Niech $A_0, A_1, A_2, ...$ będzie wstępującym ciągiem zbiorów z $\mathcal{J}$, którego suma nie należy do $\mathcal{J}$. Możemy założyć, że zbiory $A_0, A_1, A_2, ...$ są analityczne. Wówczas

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n \in H} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{J}$$

oraz

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \bigcap_{n \in H} A_n = A_{\min(H)} \in \mathcal{J}.$$

□

Założenie o analitycznej bazie ideału $\mathcal{J}$ jest istotne. By to pokazać, rozważmy następujący ideał

$$\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\, \exists C \subset \mathbb{R}\ (A \subset \bigcup_{k \leq n} B_k \cup C \text{ i } |C| \leq \omega)\},$$

gdzie $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest rozbiciem prostej na parami rozłączne zbiory Bernsteina. Wówczas $\mathcal{I}$ jest ideałem, ale nie σ–ideałem. Jednocześnie $\mathcal{I}|_{\Sigma^1_1}$ jest identyczny z σ–ideałem wszystkich przeliczalnych podzbiorów prostej, a zatem ma własność (K).

Przypomnijmy, że element a algebry Boole'a $\mathbb{B}$ nazywa się atomem, gdy

$$\forall a' \in \mathbb{B}(a' \leq a \Rightarrow (a' = 0 \text{ lub } a' = a)).$$

Agebrę $\mathbb{B}$ nazwiemy atomową, jeśli

$$\forall b \in \mathbb{B} \exists a \in \mathbb{B}(a \leq b \text{ oraz } a \text{ jest atomem}).$$

Przez $\sigma(\Sigma^1_1)$ oznaczmy σ–ciało generowane przez wszystkie zbiory analityczne w przestrzeni X. Zauważmy, że jeśli $\mathcal{J}$ jest σ–ideałem, to algebra Boole'a $\sigma(\Sigma^1_1)/\mathcal{J}$ jest σ–zupełna.

Fakt 5.2 *Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem o bazie analitycznej. Jeśli ilorazowa algebra Boole'a $\sigma(\Sigma^1_1)/\mathcal{J}$ jest atomowa, to $\mathcal{J}$ ma własność (K).*

Dowód. Dla zbioru $A \in \sigma(\Sigma^1_1)$ oznaczmy przez $[A]$ odpowiadający mu element w algebrze $\sigma(\Sigma^1_1)/\mathcal{J}$. Niech (A_n) będzie dowolnym ciągiem zbiorów analitycznych w X takim, że

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n \in H} A_n \notin \mathcal{J}.$$

W szczególności $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{J}$. Zauważmy, że $[\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n] = \bigwedge_k \bigvee_{n\geq k}[A_n] \neq 0$. Skoro algebra $\sigma(\Sigma^1_1)/\mathcal{J}$ jest atomowa, to istnieje atom $a \leq [\limsup A_n]$. Ponieważ $a \leq \bigvee_{n\geq k}[A_n]$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, więc istnieje nieskończenie wiele liczb $n \in \mathbb{N}$ takich, że $a \leq [A_n]$. Połóżmy $H = \{n \in \mathbb{N} : a \leq [A_n]\}$. Wówczas zbiór H jest nieskończony oraz $a \leq \bigwedge_{n\in H}[A_n]$, a zatem $\bigcap_{n\in H} A_n \notin \mathcal{J}$. $\square$

Wniosek 5.3 *Niech C będzie analitycznym podzbiorem X. Połóżmy $\mathcal{P}(C) = \{B \subset X : B \subset C\}$. Wówczas σ–ideał $\mathcal{P}(C)$ ma własność (K).*

Dowód. Zauważmy, że atomami w algebrze $\sigma(\Sigma^1_1)/\mathcal{P}(C)$ są zbiory postaci $[\{x\}]$, gdzie $x \notin C$. $\square$

5.1 σ–ideały generowane przez podziały X/E

Niech X będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską. Mówimy, że relacja $E \subset X \times X$ jest domknięta (otwarta, F_σ, G_δ itd.), gdy jest ona domkniętym (otwartym, F_σ, G_δ itd.) podzbiorem $X \times X$. Niech $E \subset X \times X$ będzie relacją równoważności, dla której zbiór X/E klas abstrakcji $[x]_E = \{y \in X : yEx\}$, $x \in X$, jest nieprzeliczalny. Niech $\mathcal{J}_E$ oznacza najmniejszy σ–ideał zawierający rodzinę X/E, dokładnie niech

$$\mathcal{J}_E = \{B \subset X : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}\ B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n]_E\}.$$

Każdy zbiór $S \subset X$ taki, że $|S \cap [x]_E| \leq 1$ dla każdego $x \in X$ będziemy nazywać częściowym E–selektorem.

Wprowadzimy teraz za Komjáthem pomocnicze pojęcie zbiorów dobrych dla ustalonego H – nieskończonego podzbioru $\mathbb{N}$.

Niech $\mathcal{J}$ będzie nietrywialnym (tzn. $X \notin \mathcal{J}$) σ–ideałem podzbiorów X zawierającym wszystkie singletony. Ustalmy ciąg (A_n) podzbiorów analitycznych X spełniający warunek

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n\in H} A_n \notin \mathcal{J},$$

Niech $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ oraz $Y \subset X$. Powiemy, że zbiór Y jest dobry dla H, jeśli dla każdego $G \in [H]^\omega$

$$Y \cap \limsup_{n\in G} A_n \notin \mathcal{J}.$$

Zauważmy, że jeśli Y jest dobry dla H oraz $Z \subset Y$, $Z \in \mathcal{J}$, to zbiór $Y \setminus Z$ jest dobry dla H. W szczególności jeśli Y jest domknięty i dobry dla H, to jego jądro doskonałe (por. [26, 2.6.2]) jest zbiorem dobrym dla H – będziemy z tego kilkakrotnie korzystać.

Następujące Lematy 5.4 i 5.5 są analogiczne do odpowiednich lematów z pracy Komjátha [15] (w [15] rolę ideału $\mathcal{J}$ pełni $[X]^{\leq\omega}$). Dla kompletności opisu przytaczamy ich dowody. Mówimy, że zbiór $H_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ jest prawie zawarty w zbiorze $H_2 \in [\mathbb{N}]^\omega$, gdy zbiór $H_1 \setminus H_2$ jest skończony.

Lemat 5.4 *Jeżeli $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ jest dobry dla H, to istnieją: liczba $i \in \mathbb{N}$ oraz zbiór $H' \in [H]^\omega$ takie, że Y_i jest dobry dla H'.*

Dowód. Jeżeli Y_0 nie jest dobry dla H, to znajdziemy $H_0 \in [H]^\omega$ taki, że $Y_0 \cap \limsup_{j\in H_0} A_j \in \mathcal{J}$. Jeżeli Y_1 nie jest dobry dla H_0, to znajdziemy $H_1 \in [H_0]^\omega$ taki, że $Y_1 \cap \limsup_{k\in H_1} A_k \in \mathcal{J}$. Gdyby teza nie zachodziła, to znaleźlibyśmy ciąg $H \supset H_0 \supset H_1 \supset ...$ taki, że $Y_n \cap \limsup_{k\in H_n} A_k \in \mathcal{J}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy teraz $H' \in [H]^\omega$ prawie zawarty w każdym zbiorze H_n. Wówczas $Y_n \cap \limsup_{k\in H'} A_k \in \mathcal{J}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $Y \cap \limsup_{k\in H'} A_k \in \mathcal{J}$, co przeczy założeniu. $\square$

Lemat 5.5 *Niech $F, P, A \subset X$, przy czym zbiory F i P są domknięte, $F \in \mathcal{J}$ oraz $P \cap A$ jest dobry dla pewnego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$. Wówczas istnieje punkt $x \in P \setminus F$ oraz $H' \in [H]^\omega$ taki, że dla każdego otoczenia U punktu x zbiór $(P \setminus F) \cap A \cap U$ jest dobry dla H'.*

Dowód. Skoro $F \in \mathcal{J}$, to zbiór $(P \setminus F) \cap A$ jest dobry dla H. Zbiór $P \setminus F$ jest typu F_σ, więc przedstawmy P jako $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$, gdzie P_i są domknięte oraz $diam(P_i) < 1$ (gdzie $diam$ to średnica względem ustalonej zupełnej metryki zgodnej z topologią na X). Z Lematu 5.4 wynika, że dla pewnego $i_0 \in \mathbb{N}$ oraz $H_0 \in [H]^\omega$ zbiór $A \cap P_{i_0}$ jest dobry dla H_0. Przedstawmy teraz P_{i_0} jako $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_{i_0 i}$, gdzie $P_{i_0 i}$ są domknięte oraz $diam(P_{i_0 i}) < 1/2$. Korzystając ponownie z Lematu 5.4, znajdziemy $i_1 \in \mathbb{N}$ oraz $H_1 \in [H_0]^\omega$ takie, że $A \cap P_{i_0 i_1}$ jest dobry dla H_1. Postępując indukcyjnie, definiujemy ciąg $P \supset P_{i_0} \supset P_{i_0 i_1} \supset P_{i_0 i_1 i_2} \supset ...$ zbiorów domkniętych o średnicach zbiegających do zera oraz ciąg $H \supset H_0 \supset H_1 \supset ...$, gdzie $H_n \in [H]^\omega$ taki, że $A \cap P_{i_0 \ldots i_n}$ jest dobry dla H_n. Skoro przestrzeń X jest zupełna, to istnieje $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{i_0 \ldots i_n}$. Wybieramy teraz $H' \in [H]^\omega$ prawie zawarty w każdym zbiorze H_n. Wówczas każdy zbiór $A \cap P_{i_0 \ldots i_n}$ jest dobry dla H'. Dla każdego otoczenia U punktu x istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $P_{i_0 \ldots i_n} \subset U$. Stąd wynika teza. $\square$

Przed kolejnym lematem załóżmy dodatkowo, że $\mathcal{J}$ jest postaci $\mathcal{J}_E$ dla pewnej relacji równoważności E typu F_σ o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji. Wówczas $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, gdzie E_n są domknięte.

Lemat 5.6 *Niech $P, A \subset X$, niech P będzie domknięty, $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ oraz $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $P \cap A$ jest dobry dla H, to istnieją rozłączne zbiory domknięte $P_0, P_1 \subset P$ oraz $H' \in [H]^\omega$ takie, że $diam(P_0) < \varepsilon$, $diam(P_1) < \varepsilon$, $(P_0 \times P_1) \cap E_n = \emptyset$ oraz $A \cap P_0$ i $A \cap P_1$ są dobre dla H'.*

Dowód. Na mocy Lematu 5.5 (dla $F = \emptyset$) istnieją: punkt $x_0 \in P$ oraz zbiór $H_0 \in [H]^\omega$ takie, że dla każdego otoczenia U punktu x_0 zbiór $P \cap A \cap U$ jest dobry dla H_0. Zauważmy, że zbiór $(E_n)_{x_0}$ jest domknięty oraz należy do $\mathcal{J}_E$, bo $(E_n)_{x_0} \subset E_{x_0} = [x_0]_E \in \mathcal{J}_E$. Na mocy Lematu 5.5 (dla $F = (E_n)_{x_0}$) istnieją $x_1 \in P \setminus (E_n)_{x_0}$ oraz $H_1 \in [H_0]^\omega$ takie, że dla każdego otoczenia V punktu x_1 zbiór $(P \setminus (E_n)_{x_0}) \cap A \cap V$ jest dobry dla H_1. Ponieważ $(x_0, x_1) \notin E_n$, więc z domkniętości E_n wynika istnienie otoczeń otwartych U' i V' odpowiednio punktów x_0 i x_1 takich, że $cl(U') \cap cl(V') = \emptyset$ oraz $(cl(U') \times cl(V')) \cap E_n = \emptyset$, przy czym możemy założyć, że $diam(U') < \varepsilon$, $diam(V') < \varepsilon$. Połóżmy $P_0 = P \cap cl(U')$ oraz $P_1 = P \cap cl(V')$. Jest jasne, że $H' = H_1$ oraz P_0 i P_1 spełniają tezę lematu. $\square$

Twierdzenie 5.7 *Niech E będzie relacją równoważności typu F_σ o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji na nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X. Wówczas dla każdego ciągu (A^j) zbiorów analitycznych w X o tej własności, że*

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{j\in H} A^j \notin \mathcal{J}_E$$

istnieją: zbiór $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ oraz zbiór P homeomorficzny z $\{0,1\}^\mathbb{N}$ będący częściowym E-selektorem takie, że $P \subset \bigcap_{j\in G} A^j$. W szczególności σ–ideał $\mathcal{J}_E$ ma własność (K).

Dowód. Odrzucając zbiór przeliczalny, możemy założyć, że X jest zbiorem doskonałym. Ponadto możemy założyć, że $diam(X) < 1$. Przedstawmy E w postaci $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, gdzie E_n są domknięte. Niech A^j będzie ciągiem zbiorów analitycznych takich, że

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{j\in H} A^j \notin \mathcal{J}_E.$$

Przedstawmy A^j jako wynik operacji Suslina (por. [14, 25.7]):

$$A^j = \bigcup_{z\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^j_{z|n},$$

gdzie $F^j_{z|n}$ są zbiorami domkniętymi, $diam(F^j_{z|n}) < \frac{1}{n+1}$ oraz

$$\forall n, m \in \mathbb{N}(n > m \Rightarrow F^j_{z|n} \subset F^j_{z|m}).$$

Dla $s \in \mathbb{N}^n$ połóżmy $A^j_s = \bigcup_{z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, z|n=s} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^j_{z|k}$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $A^0 = X$. Przeprowadzimy teraz konstrukcję indukcyjną. W n-tym kroku wybierzemy liczbę $j_n \in \mathbb{N}$, zbiory doskonałe P_s $(s \in \{0,1\}^n)$, ciągi skończone $t(k,s) \in \mathbb{N}^n$ $(k \leq n,\ s \in \{0,1\}^n)$ oraz zbiór $H_n \in [\mathbb{N}]^\omega$ spełniajace następujące warunki:

(1) $j_n > j_{n-1}$, $H_n \in [H_{n-1}]^\omega$, $j_n \in H_{n-1}$;

(2) $P_{s\hat{\ }0}, P_{s\hat{\ }1} \subset P_s$, $P_{s\hat{\ }0} \cap P_{s\hat{\ }1} = \emptyset$, $(P_{s\hat{\ }0} \times P_{s\hat{\ }1}) \cap E_n = \emptyset$, dla $s \in \{0,1\}^{n-1}$;

(3) $diam(P_s) < \frac{1}{n+1}$ dla $s \in \{0,1\}^n$;

(4) $P_s \cap A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)}$ jest dobry dla H_n gdy $s \in \{0,1\}^n$;

(5) $P_s \subset F^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap F^{j_n}_{t(n,s)}$ dla $s \in \{0,1\}^n$;

(6) $t(k,s) \subset t(k, s\hat{\ }0)$, $t(k,s) \subset t(k, s\hat{\ }1)$ dla $s \in \{0,1\}^{n-1}$ i $k \leq n-1$.

Warunki (2) i (3) gwarantują, że zbiór

$$P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} P_s$$

jest doskonały (homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) i każdy punkt tego zbioru leży w innej klasie abstrakcji relacji E, więc $P \notin \mathcal{J}_E$. Jeśli $x \in P$, to z (2) wynika, iż dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jeden ciąg s_n taki, że $x \in P_{s_n}$. Ponadto $s_0 \subset s_1 \subset s_2 \subset ....$ Niech $i \in \mathbb{N}$. Z (5) dla $n \geq i$ wynika, że $x \in F^{j_i}_{t(i,s_n)}$, a z (6) otrzymujemy $t(i,s_i) \subset t(i,s_{i+1}) \subset t(i,s_{i+2}) \subset ....$ Stąd $x \in A^{j_i}_{t(i,s_i)} \subset A^{j_i}$. W konsekwencji $P \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A^{j_i}$ i przyjmując $G = \{j_0, j_1, ...\}$, mamy tezę.

Pozostaje nam zdefiniować obiekty spełniające (1)–(6) przez indukcję względem n. Połóżmy $j_0 = 0$, $P_\emptyset = X$, $H_0 = \mathbb{N}$. Z założenia twierdzenia X jest dobry dla $\mathbb{N}$. Kładąc $t(0,\emptyset) = \emptyset$, otrzymamy (1)–(6) dla kroku zerowego.

Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$ oraz że wybraliśmy już j_k (dla $k \leq n$), P_s (dla $s \in \{0,1\}^k$, $k \leq n$), $t(k,s)$ (dla $k \leq l \leq n$, $s \in \{0,1\}^l$) oraz H_k (dla $k \leq n$).

Najpierw pokażemy, że istnieją: liczba $j \in H_n$ taka, że $j > j_n$ oraz zbiór $H'_n \in [H_n]^\omega$ spełniające warunek

(7) $\forall s \in \{0,1\}^n (P_s \cap A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)} \cap A^j)$ jest dobry dla H'_n).

Przypuśćmy przeciwnie, że dla każdego $j \in H_n$, $j > j_n$, i dla każdego $H \in [H_n]^\omega$ zachodzi

$$\exists G \in [H]^\omega\ \exists s \in \{0,1\}^n\ (P_s \cap A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)} \cap A^j \cap \limsup_{r\in G} A^r \in \mathcal{J}_E).$$

Postępując indukcyjnie, znajdziemy liczby $k_0 < k_1 < ...$ oraz zbiory $H_n = G_0 \supset G_1 \supset ...$ takie, że $k_m \in G_m \in [\mathbb{N}]^\omega$ oraz

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists s_m \in \{0,1\}^n\ (P_{s_m} \cap A^{j_0}_{t(0,s_m)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s_m)} \cap A^{k_m} \cap \limsup_{r\in G_{m+1}} A^r \in \mathcal{J}_E).$$

Ponieważ istnieje tylko 2^n możliwości wyboru s_m, więc istnieje ciąg $s \in \{0,1\}^n$ taki, że zbiór $\Gamma = \{k_m : s_m = s\}$ jest nieskończony. Wówczas Γ jest prawie zawarty w G_m, dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$. Stąd otrzymujemy

$$P_s \cap A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)} \cap (\bigcup_{m\in\Gamma} A^m) \cap \limsup_{r\in\Gamma} A^r \in \mathcal{J}_E.$$

Ale to jest niemożliwe, bo $\limsup_{r\in\Gamma} A^r \subset \bigcup_{m\in\Gamma} A^m$ oraz zachodzi (4). Zatem istnieje liczba $j > j_n$, $j \in H_n$, spełniająca (7). To będzie nasz wybór liczby j_{n+1}.

Stosując (7) oraz Lemat 5.6 do zbioru P_s i rozważając jądra doskonałe odpowiednich zbiorów domkniętych, znajdziemy rozłączne zbiory doskonałe $\overline{P}_{s\hat{}0}$, $\overline{P}_{s\hat{}1} \subset P_s$ takie, że $diam(\overline{P}_{s\hat{}0})$, $diam(\overline{P}_{s\hat{}1}) < \frac{1}{n+1}$, $(\overline{P}_{s\hat{}0} \times \overline{P}_{s\hat{}1}) \cap E_n = \emptyset$ oraz zbiór $H''_n \in [H'_n]^\omega$ taki, że dla wszystkich $s \in \{0,1\}^n$ oraz $i = 0,1$

$$\overline{P}_{s\hat{}i} \cap A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)} \cap A^{j_{n+1}} \text{ jest dobry dla } H''_n.$$

Zbiór $A^{j_0}_{t(0,s)} \cap ... \cap A^{j_n}_{t(n,s)} \cap A^{j_{n+1}}$ jest zawarty w następującej sumie

$$\bigcup_{z_0\in\mathbb{N}^{n+1}, z_0\supset t(0,s)} \cdots \bigcup_{z_n\in\mathbb{N}^{n+1}, z_n\supset t(n,s)} \bigcup_{z_{n+1}\in\mathbb{N}^{n+1}} (A^{j_0}_{z_0} \cap ... \cap A^{j_{n+1}}_{z_{n+1}}).$$

Z Lematu 5.4 wynika, że pewien składnik tej sumy jest dobry dla H''_n. Zatem stosując 2^{n+1} razy Lemat 5.4, znajdziemy $\overline{H}_n$ dający tę własność dla wszystkich $s \in \{0,1\}^n$ oraz $i = 0,1$. Definiujemy ciągi $t(0, s\hat{}i)$,..., $t(n+1, s\hat{}i)$ jako z_0,...,z_{n+1} odpowiadające $s\hat{}i$. Należy jeszcze „poprawić" zbiory $\overline{P}_{s\hat{}i}$ tak, by spełniały (5). Połóżmy

$$Q_{s\hat{}i} = \overline{P}_{s\hat{}i} \cap F^{j_0}_{t(0,s\hat{}i)} \cap ... \cap F^{j_{n+1}}_{t(n+1,s\hat{}i)}.$$

Ponieważ dla każdego s mamy $A^j_s \subset F^j_s$, więc zbiory $Q_{s\hat{}i}$ oraz $\overline{P}_{s\hat{}i}$ mają takie samo przecięcie ze zbiorem

$$A^{j_0}_{t(0,s\hat{}i)} \cap ... \cap A^{j_{n+1}}_{t(n+1,s\hat{}i)}.$$

Zatem zachodzi (4). Usuwając z każdego domkniętego zbioru $Q_{s\hat{}i}$ co najwyżej przeliczalnie wiele punktów i pozostawiając jego jądro doskonałe, otrzymamy zbiór doskonały $P_{s\hat{}i}$. Jest on nadal dobry dla $\overline{H}_n$, który to zbiór nazwiemy teraz H_{n+1}. Warunki (1)–(6) są spełnione. $\square$

Schemat powyższego dowodu łączy w sobie pomysły z oryginalnego dowodu twierdzenia Komjátha [15] z ideą fuzji dającej częściowy E–selektor homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ [26, 2.6.7,2.6.8]. W szczególności, jeśli E jest relacją równości $=$, to otrzymujemy twierdzenie Komjátha (zatem σ–ideał zbiorów przeliczalnych będziemy oznaczać przez $\mathcal{J}_=$). Następujący wniosek z Twierdzenia 5.7 jest prawdopodobnie znany, choć trudno go znaleźć w literaturze. Jest on wzmocnieniem wyżej cytowanych faktów z [26].

Wniosek 5.8 *Niech $A \subset X$ będzie zbiorem analitycznym. Jeśli E jest relacją równoważności typu F_σ na X o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji oraz $A \notin \mathcal{J}_E$, to istnieje zbiór $P \subset A$ homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i będący częściowym E–selektorem.*

Dowód. Wystarczy położyć $A_n = A$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.2 Parametryczna własność Komjátha

Powiemy, że σ-ideał $\mathcal{J}$ podzbiorów przestrzeni polskiej Y ma własność Mazurkiewicza–Sierpińskiego, gdy dla każdej przestrzeni polskiej X oraz każdego zbioru analitycznego $A \subset X \times Y$ zbiór $\{x \in X : A_x \notin \mathcal{J}\}$ jest analityczny. Przykładami σ–ideałów o własności Mazurkiewicza–Sierpińskiego są σ–ideały zbiorów przeliczalnych [14, 29.19], zbiorów pierwszej kategorii [14, 29.22] oraz zbiorów miary zero [14, 29.26].

Lemat 5.9 *Niech Y będzie przestrzenią polską. Niech E będzie relacją równoważności typu F_σ na Y o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji. Wówczas zbiór $\{L \in \mathcal{K}(Y) : L$ zawiera doskonały częściowy E–selektor$\}$ jest analityczny w przestrzeni $\mathcal{K}(Y)$.*

Dowód. Niech $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, gdzie zbiory E_n, $n \in \mathbb{N}$, są domknięte. Niech (U_i) będzie przeliczalną bazą Y. Wówczas

$$L \text{ zawiera doskonały częściowy } E\text{–selektor} \iff$$

$$\exists K \in \mathcal{K}(Y),\ K \subset L\ \forall i,n \in \mathbb{N}\ [U_i \cap K \neq \emptyset \Rightarrow (\exists l,k \in \mathbb{N}\ \ cl(U_l) \cup cl(U_k) \subset U_i,$$
$$cl(U_l) \cap cl(U_k) = \emptyset, diam(U_l), diam(U_k) < \frac{1}{n+1}, U_l \cap K \neq \emptyset, U_k \cap K \neq \emptyset, (U_l \times U_k) \cap E_n = \emptyset)].$$

W standardowy sposób pokazuje się, że powyższa formuła opisuje zbiór analityczny, zatem wystarczy udowodnić powyższą równoważność.

Niech $K \subset L$ będzie doskonałym częściowym E–selektorem. Skoro K jest doskonały, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego zbioru U_i, który ma niepuste przecięcie z K, zbiór $U_i \cap K$ ma co najmniej dwa punkty, które możemy rozdzielić zbiorami postaci $cl(U_l)$, $cl(U_k)$ o średnicach mniejszych niż $1/(n+1)$ zawartymi w U_i. Z domkniętości E_n i tego, że K jest częściowym E–selektorem wynika, że możemy dodatkowo założyć $(U_l \times U_k) \cap E_n = \emptyset$.

Odwrotnie załóżmy, że istnieje zbiór $K \subset L$ opisany powyżej. Wówczas możemy przez indukcję względem długości ciągu s zdefiniować rodzinę niepustych zbiorów otwartych $\{V_s : s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\} \subset \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ o następujących własnościach:

(i) $V_s \cap K \neq \emptyset$;

(ii) $cl(V_{s\hat{}0}) \cup cl(V_{s\hat{}1}) \subset V_s$, $cl(V_{s\hat{}0}) \cap cl(V_{s\hat{}1}) = \emptyset$;

(iii) $diam(V_s) < \frac{1}{|s|+1}$;

(iv) $(V_{s\hat{}0} \times V_{s\hat{}1}) \cap E_{|s|+1} = \emptyset$;

dla każdego $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Wtedy zbiór $K' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} cl(V_s) \cap K$ jest doskonałym częściowym E–selektorem zawartym w L. $\square$

Fakt 5.10 *Niech E będzie relacją równoważności typu F_σ na Y o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji. Wówczas $\mathcal{J}_E$ ma własność Mazurkiewicza–Sierpińskiego.*

Dowód. Niech zbiór $B \subset Y$ będzie analityczny oraz niech $F \subset Y \times \mathcal{N}$ (gdzie $\mathcal{N}$ oznacza przestrzeń Baire'a $\mathbb{N}^\mathbb{N}$) będzie zbiorem domkniętym takim, że $proj_Y(F) = B$. Wówczas

$$B \notin \mathcal{J}_E \iff$$

$$\exists K \in \mathcal{K}(Y \times \mathcal{N})[K \subset F \wedge proj_Y(K) \text{ zawiera doskonały częściowy } E\text{–selektor}].$$

Aby pokazać „$\Rightarrow$", załóżmy, że $B \notin \mathcal{J}_E$. Wówczas na mocy Wniosku 5.8 istnieje zbiór doskonały $P \subset B$, który jest częściowym E-selektorem. Zauważmy, że $P = proj_Y((P \times \mathcal{N}) \cap F)$. Na mocy [14, 29.20] istnieje zbiór $K \subset (P \times \mathcal{N}) \cap F$, który jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora oraz $proj_Y(K)$ jest także homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Ponieważ $proj_Y(K) \subset P$, więc $proj_Y(K)$ jest doskonałym częściowym E–selektorem. Implikacja „$\Leftarrow$" jest oczywista.

Niech zbiór $A \subset X \times Y$ będzie analityczny i wybierzmy zbiór domknięty $F \subset X \times Y \times \mathcal{N}$ taki, że $proj_{X\times Y}(F) = A$. Wówczas dla dowolnego $x \in X$ mamy $A_x = proj_Y(F_x)$ oraz $F_x \subset Y \times \mathcal{N}$ jest domknięty. Z udowodnionej równoważności dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$A_x \notin \mathcal{J}_E \iff$$

$$\exists K \in \mathcal{K}(Y \times \mathcal{N})[K \subset F_x \wedge proj_Y(K) \text{ zawiera doskonały częściowy } E\text{–selektor}].$$

Zdefiniujmy zbiór $R \subset X \times \mathcal{K}(Y \times \mathcal{N})$ wzorem

$$(x, K) \in R \iff K \subset F_x \iff \{x\} \times K \subset F.$$

Wówczas R jest domknięty. Ponadto na mocy [14, 4.29(vi)] odwzorowanie $K \mapsto proj_Y(K)$ jest ciągłą funkcją z $\mathcal{K}(Y \times \mathcal{N})$ w $\mathcal{K}(Y)$. Zatem na mocy Lematu 5.9 mamy tezę. □

Zacytujemy teraz kilka definicji z [22] oraz [14, 19.D]. Dla $\alpha \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ oraz $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ takich, że $\max(\alpha) < \min(H)$ zbiór postaci

$$[\alpha, H] = \{G \in [\mathbb{N}]^\omega : \alpha \subset G \subset \alpha \cup H\}$$

nazywamy otoczeniem Ellentucka. Topologia generowana przez bazę otoczeń Ellentucka nazywa się topologią Ellentucka na $[\mathbb{N}]^\omega$. Mówimy, że zbiór $A \subset \{0,1\}^\mathbb{N} \times [\mathbb{N}]^\omega$ jest doskonale Ramsey'a (*perfectly Ramsey*), gdy dla każdego zbioru doskonałego $P \subset \{0,1\}^\mathbb{N}$ i dowolnego otoczenia Ellentucka $[\alpha, H]$ istnieje zbiór doskonały $Q \subset P$ oraz $G \in [H]^\omega$ takie, że albo $Q \times [\alpha, G] \subset A$ albo $(Q \times [\alpha, G]) \cap A = \emptyset$. Zbiór $A \subset [\mathbb{N}]^\omega$ nazywamy zerowym Ramsey'a, gdy jest on zbiorem pierwszej kategorii (równoważnie, nigdziegęstym) w topologii Ellentucka. Przez r_0 oznaczmy σ–ideał zbiorów zerowych Ramsey'a. Traktujemy $[\mathbb{N}]^\omega$ jako podprzestrzeń polską przestrzeni $\{0,1\}^\mathbb{N}$, identyfikując zbiory $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ z ich funkcjami charakterystycznymi.

Poniższe twierdzenie będzie użytecznym narzędziem w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 5.11 *(Pawlikowski [22]) Jeżeli zbiór $A \subset \{0,1\}^\mathbb{N} \times [\mathbb{N}]^\omega$ jest analityczny, to jest doskonale Ramsey'a.*

Następne twierdzenie jest parametryczną wersją Twierdzenia 5.7. Jego dowód jest analogiczny do dowodu parametrycznej wersji twierdzenia Komjátha opublikowanej w [9]. Parametryczne wersje różnych znanych twierdzeń można znaleźć w [20]; Twierdzenie 5.11 też jest przykładem takiego rezultatu.

Twierdzenie 5.12 *Niech X i Y będą nieprzeliczalnymi przestrzeniami polskimi. Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem na Y, który ma własność (K) oraz własność Mazurkiewicza–Sierpińskiego. Niech $(A^j)_{j\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbiorów analitycznych w $X \times Y$ takim, że*

$$\forall x \in X\ \forall H \in [\mathbb{N}]^\omega\ (\limsup_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}).$$

Wówczas istnieją zbiór doskonały $P \subset X$ oraz $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ takie, że

$$\forall x \in P\ \ (\bigcap_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}).$$

Dowód. Ponieważ X jest nieprzeliczalną przestrzenią polską, więc zawiera podzbiór X' homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Jeśli znajdziemy $P \subset X'$ taki jak w tezie, to będzie on również spełniał tezę dla X. Zatem możemy założyć, że $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Połóżmy

$$A = \{(x,H) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [\mathbb{N}]^\omega : \bigcap_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}\}.$$

Rozważmy następujący zbiór

$$B = \{(x,H,y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [\mathbb{N}]^\omega \times Y : (x,y) \in \bigcap_{j\in H} A^j\} =$$

$$\{(x,H,y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [\mathbb{N}]^\omega \times Y : \forall j \in \mathbb{N}(j \notin H \text{ lub } (x,y) \in A^j)\}$$

i zauważmy, że jest on analityczny. Zatem zbiór

$$A = \{(x,H) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [\mathbb{N}]^\omega : B_{(x,H)} \notin \mathcal{J}\}$$

jest analityczny, gdyż $\mathcal{J}$ ma własność Mazurkiewicza–Sierpińskiego. Teraz na mocy Twierdzenia 5.11 zbiór A jest doskonale Ramsey'a. Zatem istnieją: zbiór doskonały $P \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ oraz $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ takie, że albo $P \times [\emptyset, H] \subset A$ albo $(P \times [\emptyset, H]) \cap A = \emptyset$. Przypadek drugi jest niemożliwy, gdyż z faktu, że $\mathcal{J}$ ma własność (K) wynika, iż dla każdego $x \in P$ istnieje $G \in [H]^\omega$ taki, że $\bigcap_{j\in G} A^j \notin \mathcal{J}$. Przypadek pierwszy oznacza, że

$$\forall x \in P\ \ (\bigcap_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}). \ \square$$

Zauważmy teraz, że Twierdzenie 5.12 możemy zastosować do odpowiednich σ–ideałów typu $\mathcal{J}_E$, korzystając z Twierdzenia 5.7 i Faktu 5.10. Wówczas otrzymamy

Wniosek 5.13 *Niech X i Y będą nieprzeliczalnymi przestrzeniami polskimi. Niech E będzie relacją równoważności na Y typu F_σ o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji. Niech $(A^j)_{j\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbiorów analitycznych w $X \times Y$ takim, że*

$$\forall x \in X \; \forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \; (\limsup_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}_E).$$

Wówczas istnieją: zbiór doskonały $P \subset X$ oraz $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ takie, że

$$\forall x \in P \;\; (\bigcap_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}_E).$$

5.3 Niezmienniczość własności (K) względem pewnych operacji

Niech X i Y będą nieprzeliczalnymi przestrzeniami polskimi. Wówczas istnieje borelowski izomorfizm $\varphi : X \to Y$ między tymi przestrzeniami (por. [14, 15.6]). Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem podzbiorów przestrzeni X. Określmy σ–ideał wzorem

$$\varphi * (\mathcal{J}) = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Wprost z definicji własności (K) i niezmienniczości zbiorów analitycznych względem izomorfizmu borelowskiego wynika następujący

Fakt 5.14 *Przy powyższych założeniach $\mathcal{J}$ ma własność (K) wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi * (\mathcal{J})$ ma własność (K).*

Wniosek 5.15 *Niech X będzie przestrzenią polską bez punktów izolowanych i niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem wszystkich zbiorów pierwszej kategorii w przestrzeni X. Wówczas $\mathcal{J}$ nie ma własności (K).*

Dowód. Jak pokazaliśmy na początku tego rozdziału, σ–ideał wszystkich zbiorów pierwszej kategorii w $\{0,1\}^\mathbb{N}$ nie ma własności (K). Na mocy [6, 3.15] istnieje borelowski izomorfizm $\varphi : \{0,1\}^\mathbb{N} \to X$ taki, że dla każdego $A \subset \{0,1\}^\mathbb{N}$ zachodzi równoważność

$$A \text{ jest zbiorem I kategorii } \iff \varphi(A) \text{ jest zbiorem I kategorii.}$$

Zatem $\mathcal{J}$ nie ma własności (K) na mocy Faktu 5.14. $\square$

Wniosek 5.16 *Niech X będzie przestrzenią polską i niech ν będzie ciągłą miarą borelowską na X. Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem zbiorów ν miary zero. Wówczas $\mathcal{J}$ nie ma własności (K).*

Dowód. Jak pokazaliśmy na początku tego rozdziału σ–ideał wszystkich zbiorów miary zero w $[0,1]$ nie ma własności (K). Niech μ będzie miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Na mocy [14, 17.41] istnieje izomorfizm borelowski $\varphi : X \to [0,1]$ między X i $[0,1]$ taki, że dla każdego zbioru $A \subset [0,1]$

$$\mu(A) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \nu(\varphi^{-1}(A)) = 0.$$

Zatem $\mathcal{J}$ nie ma własności (K) na mocy Faktu 5.14. □

Niech X i Y będą przestrzeniami polskimi. Niech $\mathcal{I}$ będzie σ–ideałem na X, zaś $\mathcal{J}$ σ–ideałem na Y. Definiujemy produkt Fubiniego tych σ–ideałów wzorem

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \{A \subset X \times Y : \{x \in X : A_x \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}\}.$$

Wówczas $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ jest σ–ideałem.

Niech X będzie przestrzenią polską i niech $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ będą σ–ideałami w X takimi, że $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Powiemy, że para $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ ma własność (K), gdy warunek

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n \in H} A_n \notin \mathcal{J}$$

implikuje istnienie zbioru $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ takiego, że

$$\bigcap_{n \in G} A_n \notin \mathcal{I}.$$

Fakt 5.17 *Niech E będzie relacją równoważności typu F_σ na nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X o nieprzeliczalnie wielu klasach abstrakcji. Niech $\{\emptyset\}$ będzie σ–ideałem (złożonym jedynie ze zbioru pustego) na przestrzeni polskiej Y. Wówczas σ–ideał $\mathcal{J}_E \otimes \{\emptyset\}$ ma własność (K).*

Dowód. Pokażemy, że $\mathcal{J}_E \otimes \{\emptyset\}$ jest σ–ideałem typu $\mathcal{J}_{\overline{E}}$ dla pewnej relacji $\overline{E}$ typu F_σ na $X \times Y$. Dla (x,y), $(x',y') \in X \times Y$ połóżmy

$$(x,y)\overline{E}(x',y') \iff xEx'.$$

Jest jasne, że relacja $\overline{E}$ jest typu F_σ. Ponadto dla każdego $A \subset X \times Y$ mamy

$$A \in \mathcal{J}_{\overline{E}} \iff \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} \ (A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n]_E \times Y) \iff$$

$$\exists B \in \mathcal{J}_E \ \ (A \subset B \times Y) \iff \{x \in X : A_x \neq \emptyset\} \in \mathcal{J}_E \iff A \in \mathcal{J}_E \otimes \{\emptyset\},$$

co wobec Twierdzenia 5.7 daje tezę. □

Fakt 5.18 *Niech $\mathcal{J}$ będzie σ–ideałem o własności (K) podzbiorów nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej Y. Niech $\{\emptyset\}$ i $\mathcal{J}_=$ będą σ–ideałami na nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X – pierwszy złożony jedynie ze zbioru pustego, drugi złożony ze wszystkich zbiorów przeliczalnych. Wówczas $\{\emptyset\}\otimes\mathcal{J}$ ma własność (K) wtedy i tylko wtedy, gdy para $(\{\emptyset\}\otimes\mathcal{J}, \mathcal{J}_=\otimes\mathcal{J})$ ma własność (K).*

Dowód. „$\Rightarrow$" Niech (A_n) będzie dowolnym ciągiem zbiorów analitycznych w $X \times Y$ takich, że dla każdego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ mamy $\limsup_{n\in H} A_n \notin \mathcal{J}_= \otimes \mathcal{J}$. Wówczas tym bardziej $\limsup_{n\in H} A_n \notin \{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$ dla każdego $H \in [\mathbb{N}]^\omega$. Ponieważ $\{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$ ma własność (K), więc istnieje zbiór $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ taki, że $\bigcap_{n\in G} A_n \notin \{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$.

„$\Leftarrow$" Przypuśćmy, że $\{\emptyset\}\otimes\mathcal{J}$ nie ma własności (K). Oznacza to, że istnieje ciąg $(A^j)_{j\in\mathbb{N}}$ zbiorów analitycznych w $X \times Y$ taki, że

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega (\limsup_{j\in H} A^j \notin \{\emptyset\} \otimes \mathcal{J})$$

oraz dla wszystkich $G \in [\mathbb{N}]^\omega$ mamy $\bigcap_{j\in G} A^j \in \{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$. Dla $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ niech $A_H = \{x \in X : \limsup_{j\in H} A^j_x \notin \mathcal{J}\}$. Jeżeli dla wszystkich $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ zbiór A_H jest nieprzeliczalny, to mamy tezę.

Przypuśćmy, że istnieje $H_0 \in [\mathbb{N}]^\omega$ taki, że A_{H_0} jest przeliczalny. Zauważmy, że jeżeli G jest prawie zawarty w G', to $A_G \subset A_{G'}$. Gdyby dla wszystkich $G \in [H_0]^\omega$ zachodziła równość $A_{H_0} = A_G$, to na mocy własności (K) dla każdego $x \in A_{H_0}$ istniałby $G \in [H_0]^\omega$ taki, że $\bigcap_{j\in G} A^j_x \notin \mathcal{J}$, co by przeczyło temu, że $\{\emptyset\} \otimes \mathcal{J}$ nie ma własności (K). Zatem istnieje $G \in [H_0]^\omega$ taki, że $A_G \neq A_{H_0}$. Definiujemy teraz przez indukcję pozaskończoną ciąg (H_α) dla $\alpha < \omega_1$. Niech $H_{\alpha+1} \in [H_\alpha]^\omega$ będzie taki, że $A_{H_{\alpha+1}} \neq A_{H_\alpha}$. Jeśli α jest graniczna, to znajdziemy zbiór $H_\alpha \in [H_0]^\omega$, który jest prawie zawarty we wszystkich H_β dla $\beta < \alpha$. Wtedy $A_{H_\alpha} \subset A_{H_\beta}$ dla $\beta < \alpha$. Widać ponadto, że $A_{H_\alpha} \neq A_{H_\beta}$ dla $\beta < \alpha$. Zdefiniowaliśmy zatem ściśle malejący ciąg $\{A_{H_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ zbiorów przeliczalnych, co daje sprzeczność. □

W związku z Faktem 5.18 nierozwiązany pozostaje problem, czy σ–ideał $\{\emptyset\} \times \mathcal{J}_=$ ma własność (K).

Następne twierdzenie pokazuje, jak dużo σ–ideałów o własności (K) można przeciąć, by otrzymany σ–ideał miał własność (K). Połóżmy

$$cov(r_0) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset r_0 \text{ oraz } \bigcup \mathcal{F} = [\mathbb{N}]^\omega\}.$$

Sz. Plewik [24] udowodnił, że $cov(r_0) = \mathfrak{h}$, gdzie $\mathfrak{h}$ jest liczbą kardynalną zdefiniowaną przez Balcara, Pelanta i Simona (por. [1]). Dowodzi się, że $\omega_1 \leq \mathfrak{h} \leq 2^\omega$ oraz że istnieją modele ZFC, w których obie nierówności lub jedna z nich jest ostra (por. [28]).

Twierdzenie 5.19 *Niech X będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską. Niech $\{\mathcal{J}_s : s \in S\} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie rodziną mocy mniejszej niż $cov(r_0)$ złożoną z σ–ideałów o własności (K). Wówczas $\bigcap_{s\in S} \mathcal{J}_s$ ma własność (K).*

Dowód. Niech (A_n) będzie ciągiem zbiorów analitycznych w X takich, że

$$\forall H \in [\mathbb{N}]^\omega \quad \limsup_{n\in H} A_n \notin \bigcap_{s\in S} \mathcal{J}_s.$$

Niech $Q_s = \{H \in [\mathbb{N}]^\omega : \limsup_{n\in H} A_n \notin \mathcal{J}_s\}$ dla $s \in S$. Wówczas $\bigcup_{s\in S} Q_s = [\mathbb{N}]^\omega$. Ponieważ $|S| < cov(r_0)$, więc istnieje indeks $t \in S$ taki, że Q_t jest gęsty w pewnym otoczeniu Ellentucka $[\alpha, H]$. Stąd otrzymujemy

$$\forall G \in [\alpha, H] \quad \limsup_{n\in G} A_n \notin \mathcal{J}_t,$$

co wobec tego, że α jest zbiorem skończonym oznacza, że

$$\forall G \in [H]^\omega \quad \limsup_{n\in G} A_n \notin \mathcal{J}_t.$$

Z własności (K) dla σ–ideału $\mathcal{J}_t$ wynika, że istnieje zbiór $G \in [H]^\omega$ taki, że $\bigcap_{n\in G} A_n \notin \mathcal{J}_t$. Zatem $\bigcap_{n\in G} A_n \notin \bigcap_{s\in S} \mathcal{J}_s$. $\Box$

Gdy dana jest nieskończona rodzina σ–ideałów o własności (K), które zawierają σ–ideał wszystkich zbiorów przeliczalnych, to nie jest jasne, czy przecięcie tej rodziny składa się tylko ze zbiorów przeliczalnych. Gdyby tak było, to Twierdzenie 5.19 wynikałoby wprost z twierdzenia Komjátha. Pokażemy jednak, że istnieje continuum wiele różnych σ–ideałów o własności (K) – każdy z nich zawierający wszystkie singletony, których przecięcie nie jest σ–ideałem zbiorów przeliczalnych, lecz ma własność (K).

Przykład 5.20 Dla każdego $z \in [0,1]$ niech $\mathcal{J}_z$ będzie σ–ideałem podzbiorów $[0,1]^2$ generowanym przez zbiory $\{0\} \times [0,1]$, $\{z\} \times [0,1]$ oraz $\{(x,y)\}$ dla $x \in (0,1] \setminus \{z\}$ i $y \in [0,1]$. Inaczej mówiąc σ–ideał $\mathcal{J}_z$ jest generowany przez rodzinę $[0,1]^2/E_z$, gdzie relacja równoważności $E_z \subset [0,1]^2 \times [0,1]^2$ jest dana przez formułę

$$(x,y)E_z(x',y') \iff (x = x' = 0 \vee x = x' = z \vee (x = x' \wedge y = y')),$$

czyli $\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_{E_z}$. Ponieważ relacja E_z jest domknięta i ma nieprzeliczalnie wiele klas abstrakcji, więc $\mathcal{J}_z$ ma własność (K) na mocy Twierdzenia 5.7. Zauważmy, że

$$\mathcal{J}_0 = \bigcap_{z\in(0,1]} \mathcal{J}_z.$$

Zatem przecięcie continuum wielu σ–ideałów o własności (K) nie musi być σ–ideałem zbiorów przeliczalnych.

Bibliografia

[1] Balcar, B.; Simon, P.: *Disjoint refinement.* Handbook of Boolean algebras. Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1989, 333–388.

[2] Becker, H.: *Some examples of Borel-inseparable pairs of coanalytic sets.* Mathematika **33** (1986), no. 1, 72–79.

[3] Billingsley, P.: *Prawdopodobieństwo i miara.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1987.

[4] Bruckner, A.: *Differentiation of real functions.* Second edition. CRM Monograph Series, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[5] Cater, F. S.: *On the Dini derivates of a particular function*, Real Anal. Exchange **25** (1999/00), no. 2, 943–946.

[6] Cichoń, J.; Kharazishvili, A.; Węglorz, B.: *Subsets of the real line.* Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1995.

[7] Ciesielski, K.; Larson, L.; Ostaszewski, K.: *I–density continuous functions.* Memoirs of the AMS, vol. **107**, no. 515, 1994.

[8] Gelbaum, B. R.; Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis.* The Mathesis Series Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam 1964.

[9] Głąb, Sz.: *On parametric limit superior of a sequence of analytic sets.* Real Anal. Exchange **31** (2005/06), no. 1, 285–289.

[10] Głąb, Sz.: *Descriptive properties related to porosity and density for compact sets on the real line.* Acta Math. Hungar., w druku.

[11] Graf, S.; Mauldin, R. D.; Williams, S. C.:*Random homeomorphisms*, Adv. in Math. **60** (1986), no. 3, 239–359.

[12] Halmos, P. R.: *Large intersections of large sets.* Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 307–312.

[13] Kechris, A. S.: *On the concept of* Π^1_1*-completeness.* Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 6, 1811–1814.

[14] Kechris, A.S.: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer, New York 1998.

[15] Komjáth, P.: *On the limit superior of analytic sets*, Anal. Math. **10** (1984), 283–293.

[16] Kuratowski, K.: *Topology*, vol 1. Academic Press – PWN, New York – Warszawa 1966.

[17] Laczkovich, M.: *On the limit superior of sequence of sets*, Anal. Math. **3** (1977), 199–206.

[18] Łojasiewicz, S.: *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych.* Wydanie drugie, Biblioteka Matematyczna, tom 46, Warszawa 1973.

[19] Mazurkiewicz, S.: *Über die Menge der differenzierbaren Functionen.* Fund. Math. **27** (1936), 224–229.

[20] Miller, A. W.: *Infinite combinatorics and definability.* Ann. Pure Appl. Logic **41** (1989), no. 2, 179–203.

[21] Moschovakis, Y. N.: *Descriptive set theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 100. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[22] Pawlikowski, J.: *Parametrized Ellentuck theorem*, Topology Appl. **37** (1990), 65–73.

[23] Pelant, J.; Zelený, M.: *The structure of the* σ*-ideal of* σ*-porous sets.* Comment. Math. Univ. Carolin. **45** (2004), no. 1, 37–72.

[24] Plewik, Sz.: *On completely Ramsey sets.* Fund. Math. **127** (1987), no. 2, 127–132.

[25] Sofronidis, N. E.: *The set of continuous piecewise differentiable functions*, Real Anal. Exchange **31** (2005/2006), no. 1, 13–22.

[26] Srivastava, S. M.: *A course on Borel sets.* Graduate Texts in Mathematics, 180. Springer-Verlag, New York, 1998.

[27] Suslin, M.: *Sur une definition des ensembles mesurable B sans nombers transfinis.* Comptes Rendus Acad. Science, Paris **164** (1917), 88–91.

[28] Vaughan, J. E.: *Small uncountable cardinals and topology.* Open problems in topology, North-Holland, Amsterdam, 1990, 195–218.

[29] Zajíček, L.; Zelený, M.: *On the complexity of some σ–ideals of σ–P–porous sets.* Comment. Math. Univ. Carolinae **44** (2003), no. 3, 531–554.

[30] Zajíček, L.: *Porosity and σ–porosity.* Real Anal. Exchange **13** (1987/88), no. 2, 314–350.

[31] Zajíček, L.: *On σ–porous sets in abstract spaces.* Abstr. Appl. Anal. 2005, no. 5, 509–534.

[32] Zelený, M.: *Descriptive properties of σ-porous sets.* Real Anal. Exchange **30** (2004/05), no. 2, 657–674.