Szymon Głąb

Struktury losowe II – Graf losowy

Instytut Matematyki,
Politechnika Łódzka

Graf losowy jako granica Fraisse

Przez $\mathcal{K}_{graf}$ oznaczmy rodzinę wszystkich skończonych grafów (np. na $\mathbb{N}$). Niech $\mathbb{G}$ będzie granicą Fraisse rodziny $\mathcal{K}_{graf}$. Strukturę $\mathbb{G}$ nazywamy **grafem losowym**.

Twierdzenie

$\mathbb{G}$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, grafem mającym własność: ($\square$) dla dowolnych skończonych zbiorów A, B wierzchołków $\mathbb{G}$ takich, że $A \cap B = \emptyset$ istnieje wierzchołek z w $\mathbb{G}$ połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem z A, ale z żadnym wierzchołkiem z B.

Zadanie 6

Jeśli graf ma własność ($\square$), to zawiera jako podgraf każdy graf skończony.

Graf losowy jako granica Fraisse

Przez $\mathcal{K}_{graf}$ oznaczmy rodzinę wszystkich skończonych grafów (np. na $\mathbb{N}$). Niech $\mathbb{G}$ będzie granicą Fraisse rodziny $\mathcal{K}_{graf}$. Strukturę $\mathbb{G}$ nazywamy **grafem losowym**.

Twierdzenie

$\mathbb{G}$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, grafem mającym własność: ($\square$) dla dowolnych skończonych zbiorów A, B wierzchołków $\mathbb{G}$ takich, że $A \cap B = \emptyset$ istnieje wierzchołek z w $\mathbb{G}$ połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem z A, ale z żadnym wierzchołkiem z B.

Zadanie 6

Jeśli graf ma własność ($\square$), to zawiera jako podgraf każdy graf skończony.

Graf losowy jako granica Fraisse

Przez $\mathcal{K}_{graf}$ oznaczmy rodzinę wszystkich skończonych grafów (np. na $\mathbb{N}$). Niech $\mathbb{G}$ będzie granicą Fraisse rodziny $\mathcal{K}_{graf}$. Strukturę $\mathbb{G}$ nazywamy **grafem losowym**.

Twierdzenie

$\mathbb{G}$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, grafem mającym własność: ($\Box$) dla dowolnych skończonych zbiorów A, B wierzchołków $\mathbb{G}$ takich, że $A \cap B = \emptyset$ istnieje wierzchołek z w $\mathbb{G}$ połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem z A, ale z żadnym wierzchołkiem z B.

Zadanie 6

Jeśli graf ma własność ($\Box$), to zawiera jako podgraf każdy graf skończony.

Konstrukcja teorioliczbowa

Zdefiniujmy graf o wierzołkach $\mathbb{N}$. Powiemy, że (x, y), $x < y$ jest krawędzią jeśli $x + 1$ cyfra liczby y w rozwinięciu dwójkowym jest równa 1.

$1 = 1_2$, $3 = 11_2$, $5 = 101_2$ itd. Zatem 0 jest połączone krawędzią z każdą liczbą nieparzystą.

Konstrukcja teorioliczbowa

Zdefiniujmy graf o wierzołkach $\mathbb{N}$. Powiemy, że (x, y), $x < y$ jest krawędzią jeśli $x + 1$ cyfra liczby y w rozwinięciu dwójkowym jest równa 1.
$1 = 1_2$, $3 = 11_2$, $5 = 101_2$ itd. Zatem 0 jest połączone krawędzią z każdą liczbą nieparzystą.

Konstrukcja losowa

Dla każdej pary (x, y) liczb naturalnych $x < y$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ decydujemy czy (x, y) będzie krawędzią w grafie o wierchołkach $\mathbb{N}$ (dla każdej pary niezależnie).

Lemat Borela–Cantelliego

Załóżmy, że (A_n) są niezależnymi zdarzeniami takimi, że $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Wówczas $P(\bigcap_m \bigcup_{n \geq m} A_n) = 1$.

Konstrukcja losowa

Dla każdej pary (x, y) liczb naturalnych $x < y$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ decydujemy czy (x, y) będzie krawędzią w grafie o wierchołkach $\mathbb{N}$ (dla każdej pary niezależnie).

Lemat Borela–Cantelliego

Załóżmy, że (A_n) są niezależnymi zdarzeniami takimi, że $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Wówczas $P(\bigcap_m \bigcup_{n \geq m} A_n) = 1$.

Formuły w języku teorii grafów

Język $L = \{R\}$; R – relacja dwuargumentowa.
***L*-formuły atomowe**. Powiemy, że φ jest formułą atomową jeśli jest postaci:
(i) $x = y$ dla pewnych zmiennych x, y;
(ii) xRy dla pewnych zmiennych x, y.

Zbiór ***L*-formuł**, to najmniejszy zbiór W zawierający L-formuły atomowe taki, że
(i) jeśli $\varphi \in W$, to $\neg\varphi \in W$;
(ii) jeśli $\varphi, \psi \in W$, to $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi \in W$;
(iii) jeśli $\varphi \in W$, to $\exists x \varphi \in W$.

L-zdanie to L-formuła bez zmiennych wolnych.
L-teoria to zbiór L-zdań.

Formuły w języku teorii grafów

Język $L = \{R\}$; R – relacja dwuargumentowa.
***L*-formuły atomowe**. Powiemy, że φ jest formułą atomową jeśli jest postaci:
(i) $x = y$ dla pewnych zmiennych x, y;
(ii) xRy dla pewnych zmiennych x, y.

Zbiór ***L*-formuł**, to najmniejszy zbiór W zawierający L-formuły atomowe taki, że
(i) jeśli $\varphi \in W$, to $\neg\varphi \in W$;
(ii) jeśli $\varphi, \psi \in W$, to $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi \in W$;
(iii) jeśli $\varphi \in W$, to $\exists x \varphi \in W$.

L-zdanie to L-formuła bez zmiennych wolnych.
L-teoria to zbiór L-zdań.

Formuły w języku teorii grafów

Język $L = \{R\}$; R – relacja dwuargumentowa.
***L*-formuły atomowe**. Powiemy, że φ jest formułą atomową jeśli jest postaci:
(i) $x = y$ dla pewnych zmiennych x, y;
(ii) xRy dla pewnych zmiennych x, y.

Zbiór ***L*-formuł**, to najmniejszy zbiór W zawierający L-formuły atomowe taki, że
(i) jeśli $\varphi \in W$, to $\neg\varphi \in W$;
(ii) jeśli $\varphi, \psi \in W$, to $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi \in W$;
(iii) jeśli $\varphi \in W$, to $\exists x \varphi \in W$.

L-zdanie to L-formuła bez zmiennych wolnych.
L-teoria to zbiór L-zdań.

Formuły w języku teorii grafów

Język $L = \{R\}$; R – relacja dwuargumentowa.
***L*-formuły atomowe**. Powiemy, że φ jest formułą atomową jeśli jest postaci:
(i) $x = y$ dla pewnych zmiennych x, y;
(ii) xRy dla pewnych zmiennych x, y.

Zbiór ***L*-formuł**, to najmniejszy zbiór W zawierający L-formuły atomowe taki, że
(i) jeśli $\varphi \in W$, to $\neg\varphi \in W$;
(ii) jeśli $\varphi, \psi \in W$, to $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi \in W$;
(iii) jeśli $\varphi \in W$, to $\exists x\varphi \in W$.

L-zdanie to L-formuła bez zmiennych wolnych.
L-teoria to zbiór L-zdań.

Teorie i logiczna konsekwencja

Teoria liniowych porządków

$\forall x \ \ \neg(xRx)$

$\forall x \forall y \forall z \ \ ((xRy \wedge yRz) \implies xRz)$

$\forall x \forall \ \ (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Teoria grafów

$\forall x \ \ \neg(xRx)$

$\forall x \forall y \ \ (xRy \implies yRx)$

Powiemy, że φ jest logiczną konsekwencją teorii T, symbolicznie $T \models \varphi$, jeśli dla dowolnej L-struktury M zachodzi implikacja
jeśli $M \models T$, to $M \models \varphi$.

np. zdanie $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup.

Teorie i logiczna konsekwencja

Teoria liniowych porządków
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \forall z \ ((xRy \wedge yRz) \implies xRz)$
$\forall x \forall \ (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Teoria grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$

Powiemy, że φ jest logiczną konsekwencją teorii T, symbolicznie $T \models \varphi$, jeśli dla dowolnej L-struktury M zachodzi implikacja
jeśli $M \models T$, to $M \models \varphi$.

np. zdanie $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup.

Teorie i logiczna konsekwencja

Teoria liniowych porządków
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \forall z \ ((xRy \wedge yRz) \implies xRz)$
$\forall x \forall \ (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Teoria grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$

Powiemy, że φ jest logiczną konsekwencją teorii T, symbolicznie $T \models \varphi$, jeśli dla dowolnej L-struktury M zachodzi implikacja
jeśli $M \models T$, to $M \models \varphi$.

np. zdanie $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup.

Teorie i logiczna konsekwencja

Teoria liniowych porządków
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \forall z \ ((xRy \wedge yRz) \implies xRz)$
$\forall x \forall \ (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Teoria grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$

Powiemy, że φ jest logiczną konsekwencją teorii T, symbolicznie $T \models \varphi$, jeśli dla dowolnej L-struktury M zachodzi implikacja
jeśli $M \models T$, to $M \models \varphi$.

np. zdanie $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ nie jest logiczną konsekwencją aksjomatów teorii grup.

Teoria grafu losowego

Rozważmy następującą teorię T składającą się ze zdań teorii grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$
oraz zdań ψ_n postaci

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \implies \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i Rz \wedge \neg y_i Rz))$$

Udowodniliśmy, że jeśli $\mathcal{R}$ jest grafem losowym, to $\mathcal{R} \models \psi_n$, czyli $\mathcal{R} \models T$ oraz jeśli graf $\mathcal{X} \models T$, to $\mathcal{X}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}$. Zatem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem. Wówczas $\mathcal{R}$ jest grafem losowym $\iff \mathcal{R} \models T$.

Możemy więc T uznać za aksjomaty teorii grafu losowego, bo każde zdanie φ prawdziwe w $\mathbb{G}$ jest logiczną konsekwencją T.

Teoria grafu losowego

Rozważmy następującą teorię T składającą się ze zdań teorii grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$
oraz zdań ψ_n postaci

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \implies \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i Rz \wedge \neg y_i Rz))$$

Udowodniliśmy, że jeśli $\mathcal{R}$ jest grafem losowym, to $\mathcal{R} \models \psi_n$, czyli $\mathcal{R} \models T$ oraz jeśli graf $\mathcal{X} \models T$, to $\mathcal{X}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}$. Zatem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem. Wówczas $\mathcal{R}$ jest grafem losowym $\iff$ $\mathcal{R} \models T$.

Możemy więc T uznać za aksjomaty teorii grafu losowego, bo każde zdanie φ prawdziwe w $\mathbb{G}$ jest logiczną konsekwencją T.

Teoria grafu losowego

Rozważmy następującą teorię T składającą się ze zdań teorii grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$
oraz zdań ψ_n postaci

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \implies \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i Rz \wedge \neg y_i Rz))$$

Udowodniliśmy, że jeśli $\mathcal{R}$ jest grafem losowym, to $\mathcal{R} \models \psi_n$, czyli $\mathcal{R} \models T$ oraz jeśli graf $\mathcal{X} \models T$, to $\mathcal{X}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}$. Zatem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem. Wówczas $\mathcal{R}$ jest grafem losowym $\iff$ $\mathcal{R} \models T$.

Możemy więc T uznać za aksjomaty teorii grafu losowego, bo każde zdanie φ prawdziwe w $\mathbb{G}$ jest logiczną konsekwencją T.

Teoria grafu losowego

Rozważmy następującą teorię T składającą się ze zdań teorii grafów
$\forall x \ \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \ (xRy \implies yRx)$
oraz zdań ψ_n postaci

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \implies \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i R z \wedge \neg y_i R z))$$

Udowodniliśmy, że jeśli $\mathcal{R}$ jest grafem losowym, to $\mathcal{R} \models \psi_n$, czyli $\mathcal{R} \models T$ oraz jeśli graf $\mathcal{X} \models T$, to $\mathcal{X}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}$. Zatem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem. Wówczas $\mathcal{R}$ jest grafem losowym $\iff \mathcal{R} \models T$.

Możemy więc T uznać za aksjomaty teorii grafu losowego, bo każde zdanie φ prawdziwe w $\mathbb{G}$ jest logiczną konsekwencją T.

Teoria grafu losowego

Rozważmy następującą teorię T składającą się ze zdań teorii grafów
$\forall x \;\; \neg(xRx)$
$\forall x \forall y \;\; (xRy \implies yRx)$
oraz zdań ψ_n postaci

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \implies \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i Rz \wedge \neg y_i Rz))$$

Udowodniliśmy, że jeśli $\mathcal{R}$ jest grafem losowym, to $\mathcal{R} \models \psi_n$, czyli $\mathcal{R} \models T$ oraz jeśli graf $\mathcal{X} \models T$, to $\mathcal{X}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}$. Zatem

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem. Wówczas $\mathcal{R}$ jest grafem losowym $\iff$ $\mathcal{R} \models T$.

Możemy więc T uznać za aksjomaty teorii grafu losowego, bo każde zdanie φ prawdziwe w $\mathbb{G}$ jest logiczną konsekwencją T.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \dots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N \to \infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Skończone grafy losowe

Niech $\mathcal{G}_N$ będzie rodziną wszystkich grafów o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, N\}$. Na $\mathcal{G}_N$ rozważmy miarę probabilistyczną przyporządkowującą wszystkim grafom to samo prowdopodobieństwo, tzn.

$$P(\{G\}) = \frac{1}{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Dla dowolnego L-zdania φ niech

$$p_N(\varphi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \varphi\}|}{|\mathcal{G}_n|}.$$

Jest to prawdopodobieństwo, że losowy element z $\mathcal{G}_N$ spełnia φ.

Lemat

$\lim_{N \to \infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Prawo $0-1$ dla grafów

Dla dowolnego zdania φ w języku teorii grafów mamy

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 0 \text{ lub } \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1.$$

Ponadto teoria grafu losowego aksjomatyzuje zbiór zdań $\{\varphi : \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1\}$.

Literatura:

1. D. Marker, Model theory. An introduction. Graduate Texts in Mathematics, 217. Springer-Verlag, New York, 2002.

Lemat

$\lim_{N\to\infty} p_N(\phi_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Prawo $0 - 1$ dla grafów

Dla dowolnego zdania φ w języku teorii grafów mamy

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 0 \text{ lub } \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1.$$

Ponadto teoria grafu losowego aksjomatyzuje zbiór zdań $\{\varphi : \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1\}$.

Literatura:

1. D. Marker, Model theory. An introduction. Graduate Texts in Mathematics, 217. Springer-Verlag, New York, 2002.