Szymon Głąb

Struktury losowe I – Granica Fraisse

Instytut Matematyki,
Politechnika Łódzka

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:
$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że
(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;
(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;
(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:
$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że
(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;
(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;
(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:

$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że

(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;

(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;

(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:
$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że
(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;
(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;
(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:
$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że
(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;
(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;
(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Metoda back–and–forth

Twierdzenie Cantora

Niech $(A, \leq)$ i $(B, \leq)$ będą liniowymi przeliczalnymi porządkami bez końców. Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $f : A \to B$, tzn. f jest bijekcją oraz $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.

Dowód:
$A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy ciąg $f_n : A_n \to B$ taki, że
(i) $A_n \subseteq A$ jest skończony;
(ii) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ dla $x, y \in A_n$;
(iii) $a_n \in A_n$, $b_n \in \operatorname{rng} f_n$.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.

Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.

1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa

L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek

2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.

L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.

3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$

L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.

1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, \ ^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Struktury

Język L składa się z symboli stałych C, relacji R i funkcji F.
Struktura w języku L, to zbiór z realizacjami symboli z L.
1. $L = \{R\}$, R to relacja 2-argumentowa
L-struktury: graf, zbiór z relacją równoważności, liniowy porządek, częściowy porządek
2. Język teorii grup $L = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$.
L-struktury: grupa, półgrupa, grupoid.
3. Język teorii ciał $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$
L-struktury: ciało, pierścień z jedynką.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm = homomorfizm + bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm = homomorfizm + bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm = homomorfizm + bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm = homomorfizm + bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm = homomorfizm + bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm $=$ homomorfizm $+$ bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Homomorfizm L-struktur A i B to funkcja $F : A \to B$ taka, że:
$\bar{x} \in R^A \iff F(\bar{x}) \in R^B$ dla relacji $R \in L$
$F(f^A(\bar{x})) = f^B(F(\bar{x}))$ dla funkcji $f \in L$
$F(c^A) = c^B$ dla stałych $c \in L$.
Zanurzenie to różnowartościowy homomorfizm.
Izomorfizm $=$ homomorfizm $+$ bijekcja.

Pomocny fakt

Załóżmy, że L-struktura A zanurza się w L-strukturę B. Wówczas istnieje struktura A' izomorficzna z B taka, że $A \subseteq A'$.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa
$\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa $\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa $\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa $\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa $\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Wiek struktury

Niech D będzie L-strukturą. Wiek D to klasa
$\mathcal{K} = \{$struktury skończenie generowane, które można zanurzyć w $D\}$. Wiek $Age(D)$ jest przeliczalny, jeśli $\mathcal{K}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele nieizomorficznych struktur.

Przykłady.

1. $Age(\mathbb{N}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
2. $Age(\mathbb{Z}, \leq) = \{$skończone liniowe porządki$\}$
3. Jeśli G to graf pełny na $\mathbb{N}$, to $Age(G) = \{$skończone grafy pełne$\}$.
4. $Age(\mathbb{Z}, +)$ zawiera tylko dwie nieizomorficzne struktury – $\mathbb{Z}$ i grupę trywialną.

Własności wieku struktury

(HP) hereditary property: Jeśli $A \in \mathcal{K}$ i B jest skończenie generowaną podstrukturą A, to $B \in \mathcal{K}$.

(JEP) joint embedding property: Jeśli $A, B \in \mathcal{K}$, to istnieje $C \in \mathcal{K}$ taka, że A i B można zanurzyć w C.

Zadanie 1

Pokazać, że podstruktura struktury skończenie generowanej nie musi być skończenie generowana (rozważyć grupę wolną 2 generatorów i jej podgrupy).

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur mającą (HP) i (JEP). Wówczas $\mathcal{K}$ jest wiekiem pewnej przeliczalnej struktury.

Własności wieku struktury

(HP) hereditary property: Jeśli $A \in \mathcal{K}$ i B jest skończenie generowaną podstrukturą A, to $B \in \mathcal{K}$.
(JEP) joint embedding property: Jeśli $A, B \in \mathcal{K}$, to istnieje $C \in \mathcal{K}$ taka, że A i B można zanurzyć w C.

Zadanie 1

Pokazać, że podstruktura struktury skończenie generowanej nie musi być skończenie generowana (rozważyć grupę wolną 2 generatorów i jej podgrupy).

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur mającą (HP) i (JEP). Wówczas $\mathcal{K}$ jest wiekiem pewnej przeliczalnej struktury.

Własności wieku struktury

(HP) hereditary property: Jeśli $A \in \mathcal{K}$ i B jest skończenie generowaną podstrukturą A, to $B \in \mathcal{K}$.
(JEP) joint embedding property: Jeśli $A, B \in \mathcal{K}$, to istnieje $C \in \mathcal{K}$ taka, że A i B można zanurzyć w C.

Zadanie 1

Pokazać, że podstruktura struktury skończenie generowanej nie musi być skończenie generowana (rozważyć grupę wolną 2 generatorów i jej podgrupy).

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur mającą (HP) i (JEP). Wówczas $\mathcal{K}$ jest wiekiem pewnej przeliczalnej struktury.

Własności wieku struktury

(HP) hereditary property: Jeśli $A \in \mathcal{K}$ i B jest skończenie generowaną podstrukturą A, to $B \in \mathcal{K}$.
(JEP) joint embedding property: Jeśli $A, B \in \mathcal{K}$, to istnieje $C \in \mathcal{K}$ taka, że A i B można zanurzyć w C.

Zadanie 1

Pokazać, że podstruktura struktury skończenie generowanej nie musi być skończenie generowana (rozważyć grupę wolną 2 generatorów i jej podgrupy).

Twierdzenie 1

Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur mającą (HP) i (JEP). Wówczas $\mathcal{K}$ jest wiekiem pewnej przeliczalnej struktury.

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)
(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)

(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)

(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)
(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)
(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Granica Fraisse – granica struktur skończenie generowanych

Jeśli $(L, \leq)$ jest przeliczalnym, nieskończonym liniowym porządkiem, to $Age(L, \leq)$ to skończone liniowe porządki.

Zadanie 2

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele nieizomorficznych liniowych porządków przeliczalnych.

Zatem sklejanie skończenie generowanych struktur nie daje jedynej, z dokładnością do izomorfizmu, struktury (brak jednoznaczności granicy!)
(AM) amalgamation property: Jeśli $A, B, C \in \mathcal{K}$ oraz $e : A \to B$ oraz $f : A \to C$ to zanurzenia, to istnieje $D \in \mathcal{K}$ oraz zanurzenia $g : B \to D$ i $h : C \to D$ takie, że $ge = hf$.

Zadanie 3

$\mathcal{K}_{lin}$ to skończone liniowe porządki, $\mathcal{K}_{graf}$ to skończone grafy, $\mathcal{K}_{poset}$ to skończone częściowe porządki. Pokazać, że te klasy mają (AM).

Bardzo często (JEP) wynika z (AM), ale nie zawsze.

Zadanie 4

Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą ciał skończonych. Pokazać, że $\mathcal{K}$ ma (AM) ale nie ma (JEP).

Powiemy, że struktura D jest **ultrahomogeniczna** jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszerzyć do automorfizmu D.

Z dowodu twierdzenia Cantora wynika, że $(\mathbb{Q}), \leq$ jest ultrahomogeniczna.

Zadanie 5

Pokazać, że $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie jest ultrahomogeniczna.

Powiemy, że struktura D jest **ultrahomogeniczna** jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.
Z dowodu twierdzenia Cantora wynika, że $(\mathbb{Q}), \leq$ jest ultrahomogeniczna.

Zadanie 5

Pokazać, że $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie jest ultrahomogeniczna.

Powiemy, że struktura D jest **ultrahomogeniczna** jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.
Z dowodu twierdzenia Cantora wynika, że $(\mathbb{Q}), \leq$ jest ultrahomogeniczna.

Zadanie 5

Pokazać, że $(\mathbb{Z}, \leq)$ nie jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Twierdzenia Fraisse o granicy struktur skończenie generowanych

D jest ultrahomogeniczna jeśli każdy izomorfizm pomiędzy skończenie generowanymi podstrukturami D daje się rozszeżyć do automorfizmu D.

Twierdzenie Fraisse

Niech L będzie przeliczalnym językiem i niech $\mathcal{K}$ będzie niepustą, przeliczalną rodziną L-struktur skończenie generownych posiadającą (HP), (JEP) oraz (AM). Wówczas istnieje jedyna z sokładnością do izomorfizmu L struktura D taka, że

1. D jest przeliczalna,
2. $\mathcal{K}$ jest wiekiem D,
3. D jest ultrahomogeniczna.

Dowód jedyności

D jest **słabo homogeniczna**, gdy spełnia warunek
(SH) jeśli A, B są skończenie generownymi podstrukturami D, $A \subseteq B$ oraz $f : A \to D$ jest zanurzeniem, to istnieje zanurzenie $g : B \to D$ rozszerzające f.
Struktura ultrahomogeniczna spełnia (SH).

Lemat 1

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi. Załóżmy, że $Age(C) \subset Age(D)$ oraz D jest (SH). Wówczas każde zanurzenie skończenie generowanej podstruktury C w D daje się rozszerzyć do zanurzenia C w D.

Lemat 2

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi o tym samym wieku i własności (SH). Wówczas C i D są izomorficzne. Co więcej każde zanurzenie $f : A \to D$ skończenie generowanej podstruktury A struktury C rozszerza się do izomorfizmu.

Wniosek

Przeliczalna struktura jest ultrahomogeniczna $\iff$ ma włanośś (SH).

Dowód jedyności

D jest **słabo homogeniczna**, gdy spełnia warunek
(SH) jeśli A, B są skończenie generownymi podstrukturami D, $A \subseteq B$ oraz $f : A \to D$ jest zanurzeniem, to istnieje zanurzenie $g : B \to D$ rozszerzające f.
Struktura ultrahomogeniczna spełnia (SH).

Lemat 1

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi. Załóżmy, że $Age(C) \subset Age(D)$ oraz D jest (SH). Wówczas każde zanurzenie skończenie generowanej podstruktury C w D daje się rozszerzyć do zanurzenia C w D.

Lemat 2

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi o tym samym wieku i własności (SH). Wówczas C i D są izomorficzne. Co więcej każde zanurzenie $f : A \to D$ skończenie generowanej podstruktury A struktury C rozszerza się do izomorfizmu.

Wniosek

Przeliczalna struktura jest ultrahomogeniczna $\iff$ ma włanośċ (SH).

Dowód jedyności

D jest **słabo homogeniczna**, gdy spełnia warunek
(SH) jeśli A, B są skończenie generownymi podstrukturami D, $A \subseteq B$ oraz $f : A \to D$ jest zanurzeniem, to istnieje zanurzenie $g : B \to D$ rozszerzające f.
Struktura ultrahomogeniczna spełnia (SH).

Lemat 1

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi. Załóżmy, że $Age(C) \subset Age(D)$ oraz D jest (SH). Wówczas każde zanurzenie skończenie generowanej podstruktury C w D daje się rozszerzyć do zanurzenia C w D.

Lemat 2

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi o tym samym wieku i własności (SH). Wówczas C i D są izomorficzne. Co więcej każde zanurzenie $f : A \to D$ skończenie generowanej podstruktury A struktury C rozszerza się do izomorfizmu.

Wniosek

Przeliczalna struktura jest ultrahomogeniczna $\iff$ ma własność (SH).

Dowód jedyności

D jest **słabo homogeniczna**, gdy spełnia warunek
(SH) jeśli A, B są skończenie generownymi podstrukturami D, $A \subseteq B$ oraz $f : A \to D$ jest zanurzeniem, to istnieje zanurzenie $g : B \to D$ rozszerzające f.
Struktura ultrahomogeniczna spełnia (SH).

Lemat 1

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi. Załóżmy, że $Age(C) \subset Age(D)$ oraz D jest (SH). Wówczas każde zanurzenie skończenie generowanej podstruktury C w D daje się rozszerzyć do zanurzenia C w D.

Lemat 2

Niech C i D będą L-strukturami przeliczalnymi o tym samym wieku i własności (SH). Wówczas C i D są izomorficzne. Co więcej każde zanurzenie $f : A \to D$ skończenie generowanej podstruktury A struktury C rozszerza się do izomorfizmu.

Wniosek

Przeliczalna struktura jest ultrahomogeniczna $\iff$ ma własność (SH).

Dowód istnienia

Lemat 3

Isnieje łańcuch struktur (D_n) w $\mathcal{K}$ (tzn. $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$) spełniający warunek ($\triangle$) jeśli $A \subseteq B$ są strukturami z $\mathcal{K}$ oraz $f : A \to D_i$ jest zanurzeniem, to istnieje $j > i$ oraz zanurzenie $g : B \to D_j$ takie, że $f \subseteq g$.

Lemat 4

Niech $\mathcal{J}$ będzie rodziną skończenie generowanych L-struktur i niech (D_n) będzie łańcuchem L-struktur. Jeśli $Age(D_i) \subseteq \mathcal{J}$ ($Age(D_i) = \mathcal{J}$) dla każdego i, to $Age(\bigcup D_i) \subseteq \mathcal{J}$ ($Age(\bigcup D_i) = \mathcal{J}$).

Literatura:

1. W. Hodges, Model theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Dowód istnienia

Lemat 3

Isnieje łańcuch struktur (D_n) w $\mathcal{K}$ (tzn. $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$) spełniający warunek $(\triangle)$ jeśli $A \subseteq B$ są strukturami z $\mathcal{K}$ oraz $f : A \to D_i$ jest zanurzeniem, to istnieje $j > i$ oraz zanurzenie $g : B \to D_j$ takie, że $f \subseteq g$.

Lemat 4

Niech $\mathcal{J}$ będzie rodziną skończenie generowanych L-struktur i niech (D_n) będzie łańcuchem L-struktur. Jeśli $Age(D_i) \subseteq \mathcal{J}$ $(Age(D_i) = \mathcal{J})$ dla każdego i, to $Age(\bigcup D_i) \subseteq \mathcal{J}$ $(Age(\bigcup D_i) = \mathcal{J})$.

Literatura:

1. W. Hodges, Model theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Dowód istnienia

Lemat 3

Isnieje łańcuch struktur (D_n) w $\mathcal{K}$ (tzn. $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$) spełniający warunek ($\triangle$) jeśli $A \subseteq B$ są strukturami z $\mathcal{K}$ oraz $f : A \to D_i$ jest zanurzeniem, to istnieje $j > i$ oraz zanurzenie $g : B \to D_j$ takie, że $f \subseteq g$.

Lemat 4

Niech $\mathcal{J}$ będzie rodziną skończenie generowanych L-struktur i niech (D_n) będzie łańcuchem L-struktur. Jeśli $Age(D_i) \subseteq \mathcal{J}$ ($Age(D_i) = \mathcal{J}$) dla każdego i, to $Age(\bigcup D_i) \subseteq \mathcal{J}$ ($Age(\bigcup D_i) = \mathcal{J}$).

Literatura:

1. W. Hodges, Model theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.