ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 392, № 2, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 513.8

О СИГНАТУРЕ ТРАНЗИТИВНОГО УНИМОДУЛЯРНОГО АЛГЕБРОИДА ЛИ

© 2003 г. Я. Кубарски, А. С. Мищенко

Представлено академиком Е.Ф. Мищенко 31.03.2003 г.

Поступило 31.03.2003 г.

Алгеброиды Ли возникают как инфинитезимальные объекты для группоидов Ли, главных расслоений, векторных расслоений ([1], см. также [2, 3]), трансверсально полных слоений (TC-слоений), незамкнутых подгрупп Ли [4], многообразий Пуассона и др. Их алгебраические аналоги известны как псевдоалгебры Ли, называемые также алгебрами Ли–Райнхарта.

Алгеброид Ли на многообразии M состоит из тройки $L = (L, [\cdot, \cdot], \gamma_L)$, где L есть векторное расслоение на многообразии M, на пространстве сечений $(\mathrm{Sec}\ L, [\cdot, \cdot])$ которого задана структура $\mathbb{R}$-алгебры Ли, отображение $\gamma_L : L \to TM$, называемое анкером, является линейным гомоморфизмом векторных расслоений, для которого выполняется условие Лейбница

$$[\xi, f \cdot \eta] = f \cdot [\xi, \eta] + \gamma_L(\xi)(f) \cdot \eta,$$

$$f \in C^\infty(M), \quad \xi, \eta \in \mathrm{Sec} L.$$

Анкер сохраняет операцию коммутирования сечений, $\gamma_L \circ [\xi, \eta] = [\gamma_L \circ \xi, \gamma_L \circ \eta]$ [5]. Албеброид Ли называется транзитивным алгеброидом, если анкер γ_L является послойным эпиморфизмом. Для транзитивных алгеброидов Ли имеет место точная последовательность Атья $0 \to \mathbf{g} \hookrightarrow L \xrightarrow{\gamma_L} TM \to 0$, в которой ядро анкера $\mathbf{g} := \ker\gamma_L$ образует векторное расслоение, являющееся расслоением алгебр Ли. Это расслоение называется присоединенным к расслоению L. Слоем $\mathbf{g}_x$ расслоения $\mathbf{g}$ в каждой точке $x \in M$ служит алгебра Ли с естественной операцией коммутирования. Алгебра Ли $\mathbf{g}_x$ называется изотропной алгеброй Ли алгеброида L в точке $x \in M$. Любой транзитивный алгеброид Ли L на стягиваемом многообразии M изоморфен тривиальному алгеброиду Ли [6], [7].

С каждым алгеброидом Ли L связывается алгебра когомологий $H_L(M)$, задаваемая с помощью дифференциальной градуировованной алгебры L-дифференциальных форм $(\Omega_L(M), d_L)$ на пространстве сечений Sec L алгеброида.

Для тривиального алгеброида Ли TM – касательного расслоения многообразия M – дифференциал d_{TM} совпадает с дифференциалом d_M дифференциальных форм на многообразии M.

Нетривиальном примером алгеброида служит расслоение $L = A(P) = TP/G$ для некоторого главного G-расслоения $P \to M$. В этом случае $\Omega_L(M) \cong \cong \Omega^r(P) \hookrightarrow \Omega(P)$, где $\Omega^r(P)$ есть пространство G-правоинвариантных дифференциальных форм на P, а $H_L(M) \cong H(\Omega^r(P))$. Гомоморфизм i является изоморфизмом в случае, когда группа G связана и компактна.

Нас будут интересовать транзитивные алгеброиды Ли, алгебра когомологий $H_L(M)$ которых снабжена двойственностью Пуанкаре [8]. Транзитивные унимодулярные, инвариантно ориентированные (TUIO) алгеброиды Ли [9] являются примерами таких алгеброидов. Пусть $\varepsilon \in \mathrm{Sec} \wedge^n \mathbf{g}$ есть некоторая ориентирующая форма расслоения $\mathbf{g}$. Фундаментальную роль играет послойный интеграл [9] $\int_L : \Omega_L^\star(M) \to (M)\Omega_{dR}^{\star - n}$, который приводит к гомоморфизму в когомологиях

$$\int_L^{\#} : H_L^\star(M) \to H_{dR}^{\star - n}(M).$$

П р и м е р ы. 1. Алгеброид Ли $A(P)$ главного G-расслояния $P \to M$ является TUIO-алгеброидом Ли [9] в случае, когда группа G обладает свойством: $\det(\mathrm{Ad}_G a) = +1$, $a \in G$.

2. Алгеброид Ли $A(M; \mathcal{F})$ трансверсально параллелизуемого слоения на компактном односвязном многообразии является TUIO-алгеброидом Ли.

3. Алгеброид Ли $A(G, H)$ некоторой незамкнутой подгруппы Ли H с группе Ли G (т.е. алгеброид Ли соответствующего трансверсально полного

Институт математики технического университета в Лодзи, Польша

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

слоения левых классов смежности подгруппы H в группе G) является TUIO-алгеброидом Ли. При этом присоединенное расслоение алгебр Ли этого алгеброида Ли $A(G; H)$ является тривиальным расслоением абелевых алгебр Ли [4].

Предположим, что многообразие M связно и ориентированно. Тогда скалярное произведение Пуанкаре

$$H_L^*(M) \times H_{L,c}^{m+n-*}(M) \to \mathbb{R},$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_L^{\#} \alpha \wedge \beta = \int_M \left(\int_L \alpha \wedge \beta \right)$$

является невырожденным, т.е. $H_L(M) \cong (H_{L,c}(M))^*$.

В случае, когда многообразие M является компактным связным ориентированным многообразием и $m + n = 4k$, получается симметрическая квадратичная форма на когомологиях, и ее сигнатура обозначается через $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ и называется сигнатурой алгеброида L. В остальных случаях (т.е. когда $m + n \neq 0 \pmod 4$) по определению полагаем $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

В работе [8] была поставлена задача вычисления сигнатуры $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L)$ и нахождения условия, при которых эта сигнатура тривиальна, $\mathrm{Sign}_\varepsilon(L) = 0$.

Для изучения сигнатуры алгеброида L мы используем технику спектральных последовательностей комплекса Чеха–де Рама K^{**}, дифференциальных форм алгеброида L, аналогичного комплексу Чеха–де Рама для многообразия, и воспользуемся известными методами и утверждениями из работы [10].

Рассмотрим произвольный транзитивный алгеброид Ли L на многообразии M с изотропными алгебрами Ли $\mathbf{g}|_x$, которые изоморфны данной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если открытое подмножество $U \subset M$ диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^m$, то ограничение $L_{|U}$ алгеброида L на подмножество U является тривиальным алгеброидом Ли, точнее, изоморфно тривиальному алгеброиду $TU \times \mathfrak{g}$. Обозначим для краткости алгебру когомологий $H_{L_{|U}}(U)$ через $H_L(U)$. Согласно формуле Кюннета, имеем (см. [8])

$$H_L(U) \cong H(\mathfrak{g}) \otimes H(U) \cong H(\mathfrak{g}).$$

Рассмотрим так называемое хорошее покрытие $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ многообразия M, т.е. когда все множества покрытия U_α и все их непустые конечные пересечения $\bigcap_i U_{\alpha_i}$ диффеоморфны евклидову пространству $\mathbb{R}^m$. Образуем двойной комплекс типа Чеха–де Рама

$$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) := \prod_{\alpha_0 < \ldots < \alpha_p} \Omega_L^q(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}),$$

$p, q \geq 0$, с естественной мультипликативной структурой $\cup$: $K^{p,q} \times K^{r,s} \to K^{p+r,\, q+s}$.

Этот комплекс имеет два естественных граничных гомоморфизма: горизонтальный d и вертикальный δ. Горизонтальный гомоморфизм d: $C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \to C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^{q+1})$ действует как внешнее дифференцирование дифференциальных форм на алгеброиде L: $d = (-1)^p d_L$. Вертикальный гомоморфизм δ: $C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \Omega_L^q)$ действует как кограничный оператор в коцепях покрытия

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \ldots \hat{\imath} \ldots \alpha_{p+1}} \big|U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}}.$$

Гомоморфизмы d и δ являются антидифференцированиями степени +1 по отношению к суммарной градуировке. Поэтому набор $(K, K^{p,q}, \cup, d, \delta)$ образует двойной комплекс первого квадранта с мультипликативной структурой. Суммарный оператор $D = d + \delta$ тоже является антидифференцированием. Комплекс дифференциальных форм алгеброида вкладывается в двойной комплекс K, r: $\Omega_L^* \to K^{0,*} \subset K^{(*)}$ и порождает гомоморфизм когомологий $r^\#$: $H_L^*(M) \to H^{(*)}(K, D)$.

Аргументированная строка в двойном комплексе

$$0 \to \Omega_L^q(M) \xrightarrow{r} K^{0,q} \xrightarrow{\delta} K^{1,q} \xrightarrow{\delta} \ldots$$

является точной. Доказательство стандартно получается использованием разбиения единицы $\{\rho_\alpha\}$, подчиненного покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$, и оператора цепной гомотопии H: $K^{p,q} \to K^{p-1},\ q$, $(H\omega)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \cdot \omega_{\alpha\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}}$. Следовательно, гомоморфизм $r^\#$: $H_L^*(M) \to H^{(*)}(K, D)$ является изоморфизмом градуированных алгебр когомологий.

Рассмотрим убывающую фильтрацию $K_j = \bigoplus_{p \geq j,\, q \geq 0} K^{p,q}$. Согласно общей конструкции спектральной последовательности (см, например, [11, 1.4.2]), для указанной фильтрации можно построить спектральную последовательность градуированных дифференциальных колец $(E_s^{p,q}, d_s)$, d_s: $E_s^{p,q} \to E_s^{p+s,\, q-s+1}$ для которых $E_{s+1}^{p,q} = H(E_s^{p,q}, d_s)$, причем кольцо $E_\infty^{p,q}$ присоединено к кольцу когомологий $H(K, d)$ по отношению к фильтрации, индуцированной фильтрацией $\{K_j\}$

Первые два члена спектральной последовательности (E_s, d_s) выглядят следующим образом: $(E_0^{p,q} = K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega_L^q)$, $d_0 = d = (-1)^j d_L$; $E_1^{p,q} = H^{p,q}(K, d) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q)$, $d_1 = \delta^{\#}$: $E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$, где $\mathcal{H}_L^* = (U \mapsto H_L^*(U))$ есть предпучок когомологий типа Лере, являющийся локально-постоянным пучком на хорошем покрытии со значением в группе (точнее, в алгебре) $H^*(\mathfrak{g})$. Следовательно, второй член спектральной последовательности $E_s^{j,i}$ вычисляется по формуле

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(H(K, D), \delta^{\#}) = H_{\delta^{\#}}^j(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^q).$$

В присоединенном расслоении **g** со слоем изотропная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ функции склейки λ_x на пересечении карт являются непрерывными функциями со значением в структурной группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, топология в которой отлична от классической и задается по следующему правилу. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ – произвольный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а φ^*: $H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathfrak{g})$ обозначает индуцированный автоморфизм групп когомологий. Через $\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$ обозначим стационарную подгруппу действия в когомологиях, т.е. подгруппу таких автоморфизмов $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, для которых $\varphi^* = \mathrm{Id}$. Изменим топологию в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, добавив к открытым множествам еще одно – подгруппу $\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$. Группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ с новой топологией обозначим через $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})$. Ясно, что фактор-группа $\mathrm{Aut}^s(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_h(\mathfrak{g})$ является дискретной группой, а расслоение $H^*(\mathbf{g})$ является плоским расслоением, т.е. все функции склейки являются локально-постоянными функциями.

Предположим, что предпучок $\mathcal{H}_L^*$ является постоянным на некотором хорошем покрытии $\mathfrak{U}$, т.е. представление монодромии фундаментальной группы многообразия M для присоединенного расслояния изотропных алгебр Ли тривиально. Тогда

$$E_2^{j,i} = H_{\delta^{\#}}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_L^i) \cong H^i(\mathfrak{U}, H^i(\mathfrak{g})) \cong$$
$$\cong H^i(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \otimes H^i(\mathfrak{g}) \cong H_{dR}^i(M) \otimes H^i(\mathfrak{g}).$$

Л е м м а 1. [10]. *Если дифференциальная градуированная алгебра* $(A^*, \cup, d)$ *является алгеброй Пуанкаре, дифференциал которой является дифференциалом Пуанкаре, то ее градуированная алгебра когомологий* $(H^*(A), \cup)$ *является алгеброй Пуанкаре относительно того же элемента* $0 \neq \xi \in A^{n_0} = H^{n_0}(A, d)$ *и выполнено равенство* $\mathrm{Sigh}A = \mathrm{Sign}H(A)$.

Отсюда следует, что если L есть транзитивный алгеброид Ли на компактном ориентированном многообразии M, у которого изотропные алгебры Ли $\mathfrak{g}|_x \cong \mathfrak{g}$ унимодулярны, а монодромия в когомологиях присоединенного расслоения **g** изотропных алгебр Ли тривиальна, то для спектральной последовательности хорошего покрытия имеют место равенства

$$0 = \mathrm{Sign}M \cdot \mathrm{Sign}\mathfrak{g} = \mathrm{Sign}E_2 = \ldots = \mathrm{Sign}E_\infty.$$

Осталось доказать равенство $\mathrm{Sign}E_\infty = \mathrm{Sign}H_L(M)$, которое следует из сравнения убывающей фильтрации с присоединенной градуировкой. В результате имеет место следующая

Т е о р е м а 2 (теорема Черна–Хирцебруха–Серра для транзитивных алгеброидов Ли). *Пусть* L *– произвольный транзитивный унимодулярный инвариантно ориентированный алгеброид Ли на компактном ориентированном связном многообразии, у которого изотропная алгебра Ли равна* $\mathfrak{g}$, *а группа монодромий тривиальна. Тогда*

$$\mathrm{Sign}L = \mathrm{Sign}E_2 = \mathrm{Sign}M \cdot \mathrm{Sign}\mathfrak{g} = 0.$$

В частности, теорема 2 выполняется в следующих случаях:

1) многообразие M является односвязным,

2) изотропная алгебра Ли **g** есть простая алгебра одного из типов B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2 (см. [12, добавление Д. 8]),

3) присоединенное расслоение алгебр Ли **g** тривиально по отношению к структурной группе $\mathrm{Aut}^s(\mathbf{g})$. Например, когда алгеброид Ли $A(G; H)$ есть алгеброид Ли трансверсально полного слоения левых классов смежности незамкнутой подгруппы Ли H в произвольной группе Ли G.

Полное изложение будет опубликовано позже, где будет показано, что сигнатура транзитивного унимодулярного алгеброида Ли тривиальна и в случае конечной монодромии, а также приведен пример алгеброида Ли (с бесконечной монодромией) с нетривиальной сигнатурой.

Работа была частично представлена на Международном конгрессе математиков в Пекине (август 2002 г.)

Первый автор работал при поддержке гранта, присужденного факультетом технической физики, вычислительной техники и прикладной математики Технического университета Лодзи (Польша), второй автор – при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–00574) и фонда “Университеты России” (контракт УР.04.03.009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pradines J.* // Atti Convegno Intern. Geom. Differnz. 1967. V. 9. P. 1–4.
2. *Kubardki J.* In: Publ. Dep. Math. Univ. de Lyon 1. Lyon: 1989. V. 1/A. P. 1–66.
3. *Kubarskii J.* // Trans. AMS. 1996. V. 348. № 6. P. 2151–2167.
4. *Kubarski J.* // Rev. mat. Univ. comput. Madrid. 1991. V. 4. № 2/3. P. 159–176.
5. *Balcerzak B., Kubarski J., Walas W.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differntial Geometry. Banach Center Publ.; W-wa: 2001. Inst. Math. Polish Acas. Sci. V. 54. P. 71–97.
6. *Mackenzie K.* Lie Groupoides and Lie Algebroids in Differential Geometry. Lect. Note Ser. Cambridge: London Math. Soc. 1987. V. 124.
7. *Kubarski J.* In: Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometrey. W-wa: 2001. Sci. Banach Center Publ.; Inst. Math. Polish Acad. V. 54. P. 135–173.
8. *Kubarskii J.* // Topol. and Its Appl. 2002. V. 121. P. 333–355.
9. *Kurarsi J.* In.: Proc. Conf. on Differential Geometry. New Developments in Differential Geometry. Budapest. 27–30 July 1996. N.Y.: Kluwer, 1999. P. 173–202.
10. *Chern S.S., Hirzebruch F., Serre J.-P* // Proc. AMS. 1957. V. 8. P. 587–596.
11. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит. 1961.
12. *Humphreys J.E.* Linear Algebraic Groups. N.Y.: Springer, 1975.