

Podstawowe prawa mechaniki nieba.
Materiały pomocnicze do podręcznika
„Teoria i praktyka równań różniczkowych
zwykłych”

Bogdan Przeradzki

Dość typowy pogląd, że odkrycia Kopernika stanowią początek współczesnej astronomii, jest z gruntu fałszywy. Po pierwsze, umieszczenie Słońca w centrum wszechświata było tylko powrotem do poglądów wielu astronomów starożytnych. Po drugie, centralność tej gwiazdy jest prawdziwa jedynie w odniesieniu do lokalnego systemu planetarnego, a stwierdzenie, że planety poruszają się po okręgach o środkach w środku Słońca jest fałszywe. Po trzecie wreszcie, opis ruchu planet wymaga jakiegoś uzasadnienia, a u Kopernika jest czysto fenomenologiczny. W prawie 100 lat później Johann Kepler na bazie obserwacji Tycho Brahe poprawił model Kopernika. W opisie Keplera planety poruszają się po elipsach, a Słońce znajduje się w ognisku każdej z elips. Ponadto Kepler sformułował ilościowe prawa ruchu po tych elipsach, wyjaśniając zmiany prędkości ruchu w różnych punktach toru planety i związku między okresem ruchu a rozmiarami elipsy. Nadal jednak brakowało uzasadnienia tych praw i jakiejś ich uniwersalności. Wiedziano już bowiem, że Układ Słoneczny jest tylko niewielkim fragmentem wszechświata i, być może są w nim jeszcze inne układy planetarne. Dopiero fundamentalne dzieło Izaaka Newtona z 1687 roku wypełniło brakującą lukę. Newton założył, że pomiędzy każdymi dwoma ciałami działa siła zwana siłą grawitacji i podał ilościowy wzór na tę siłę. Konsekwencją działania tej siły okazały się prawa Keplera. W późniejszych latach zaobserwowano pewne odchylenia ruchu planet od praw Keplera, ale było to tylko potwierdzeniem teorii Newtona, ponieważ prawa Keplera otrzymuje się przy założeniu, że jedyną siłą działającą na daną planetę jest siła przyciągania grawitacyjnego Słońca zaniedbując fakt, że przecież pomiędzy planetami także działają siły grawi-

tacji. Ponieważ siła grawitacji zgodnie ze wzorem Newtona jest proporcjonalna do mas oddziałujących ciał, nieuwzględnianie oddziaływań między planetami jest uzasadnione tym, że masy planet są znikomo małe w porównaniu z masą Słońca. Zagadnienie ruchu dwóch ciał pod wpływem siły grawitacji według wzoru Newtona nazywane jest zagadnieniem dwóch ciał i jest przedmiotem niniejszego opracowania. Jeśli zamiast dwóch rozważamy N ciał, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem N ciał stanowiącym do dziś siłę napędową dużych fragmentów matematyki (teorii równań różniczkowych zwyczajnych, teorii układów dynamicznych, teorii chaosu). Nawet dla $N = 3$ ciągle pojawiają się nowe zaskakujące rezultaty jakościowe i ilościowe.

Założmy, że mamy dwa ciała: jedno o masie M i drugie o masie m . Będziemy zakładać, że ciała mają zaniedbywalnie małe (w stosunku do odległości między nimi) rozmiary, są punktowe. Jeśli początek kartezjańskiego układu współrzędnych w \mathbb{R}^3 umieścimy w ciele M , wtedy wzór na siłę grawitacji działającą na ciało m ma postać:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} (x, y, z),$$

gdzie G jest pewną uniwersalną stałą fizyczną (stałą grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N m^2/kg^2$), a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ odległością między ciałami. Znak $-$ powoduje, że jest to siła przyciągająca, a po łatwym sprawdzeniu widzimy, że

$$\|\vec{F}\| = G \frac{Mm}{r^2}$$

co odpowiada naszym szkolnym nawykom. W rzeczywistości początek układu współrzędnych powinniśmy umieścić w środku masy układu obu ciał, ale przy założeniu, że masa m jest znacznie mniejsza niż M , środek układu leży bardzo blisko większej masy. Jeśli w chwili początkowej mamy zadane położenie ciała m i jego prędkość, wówczas można pokazać, że dalszy ruch odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez ten punkt i wektor.

Na tej płaszczyźnie będziemy używać notacji zespolonej i współrzędnych biegunowych do opisu położenia punktu. Niech więc położenie ciała m w chwili t będzie oznaczone $z(t)$ i

$$z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \tag{1}$$

gdzie $r(t)$ oznacza odległość między ciałami w chwili t i $\theta(t) \in \mathbb{R}$ jest argumentem położenia $z(t)$. Przypomnijmy teraz drugą zasadę dynamiki Newtona, która mówi, że jeśli na punkt o masie m działa siła \vec{F} , to punkt ten

porusza się w ten sposób, że jego przyspieszeniem jest wektor \vec{a} , przy czym

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Oczywiście zarówno siła, jak i przyspieszenie są tu wielkościami zmieniającymi się w czasie, a więc funkcjami zmiennej t . Przypomnijmy jeszcze, że przyspieszenie jest pochodną funkcji prędkości punktu, a ta z kolei jest pochodną funkcji położenia – tutaj $t \mapsto z(t)$:

$$a(t) = v'(t), \quad v(t) = z'(t).$$

W dalszym ciągu będziemy opuszczać argument t we wszystkich funkcjach dla uproszczenia zapisu. Tak więc zachodzi związek

$$ma = -G \frac{Mm}{r^2} e^{i\theta}.$$

Jest to w istocie równanie różniczkowe rzędu drugiego w \mathbb{C} :

$$z'' = -G \frac{M}{r^2} e^{i\theta}.$$

Korzystając z (1) dostaniemy

$$\begin{aligned} z' &= ire^{i\theta}\theta' + e^{i\theta}r', \\ z'' &= ir'e^{i\theta}\theta' - re^{i\theta}(\theta')^2 + ire^{i\theta}\theta'' + \\ &\quad + ie^{i\theta}\theta'r' + e^{i\theta}r'' = \\ &= -re^{i\theta}(\theta')^2 + e^{i\theta}r'' + i(re^{i\theta}\theta'' + 2e^{i\theta}\theta'r'). \end{aligned}$$

Zatem dostajemy równanie różniczkowe:

$$-GM \frac{1}{r^2} e^{i\theta} = -re^{i\theta}(\theta')^2 + e^{i\theta}r'' + i(re^{i\theta}\theta'' + 2e^{i\theta}\theta'r'),$$

które po podzieleniu przez $e^{i\theta}$ przyjmuje postać

$$-GM \frac{1}{r^2} = -r(\theta')^2 + r'' + i(r\theta'' + 2\theta'r').$$

Porównując części rzeczywiste i urojone dostaniemy układ równań:

$$-GM \frac{1}{r^2} = -r(\theta')^2 + r'', \tag{2}$$

$$0 = r\theta'' + 2\theta'r'. \quad (3)$$

Po pomnożeniu obu stron (3) przez r zauważamy, że prawa strona jest pochodną funkcji $r^2\theta'$, więc równanie (3) przyjmuje postać

$$(r^2\theta')' = 0$$

czyli funkcja $r^2\theta'$ jest całką pierwszą układu. Stąd

$$r^2\theta' = c,$$

gdzie c jest pewną stałą. Zauważmy, że dla $c = 0$ mamy wtedy $\theta' = 0$, co daje nam ruch wzdłuż promienia wodzącego. Z pierwszego równania (2) widzimy, że jest to ruch spełniający zależność

$$r'' = -GM \frac{1}{r^2}.$$

Nie będziemy szukać jawnych rozwiązań tego ostatniego równania, choć jest to możliwe. Zauważymy tylko, że jeśli w chwili początkowej $r'(0) \leq 0$, to ruch jest od początku dośrodkowy z rosnącym przyśpieszeniem, aż do osiągnięcia osobliwości $r = 0$, a jeśli $r'(0) > 0$, to początkowo r rośnie coraz wolniej, następnie zatrzymuje się i dalszy ruch odbywa się według poprzedniego scenariusza.

Ciekawszy jest przypadek, gdy $c \neq 0$. Możemy zakładać $c > 0$, bo przypadek $c < 0$ jest symetryczny i odpowiada zmianie orientacji płaszczyzny. Podstawmy do równania (2) $s = r^{-1}$. Wtedy

$$r' = -\frac{1}{s^2}s'(t) = -\frac{1}{s^2}s'(\theta)\theta'(t) = -cs'(\theta)$$

– tutaj musieliśmy już wstawić argumenty, aby nie doprowadzić do nieporozumienia. Po drugim zróżniczkowaniu mamy

$$r'' = -cs''(\theta)\theta'(t) = -c^2s^2s''(\theta)$$

i możemy wstawić to do równania (2)

$$-GMs^2 = -s^{-1}(cs^2)^2 - c^2s^2s''(\theta).$$

Po podzieleniu obu stron przez $-c^2s^2$ otrzymamy równanie

$$s''(\theta) + s = \frac{GM}{c^2}. \quad (4)$$

Jest to proste równanie liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach. Rozwiązaniami równania jednorodnego są funkcje $\theta \mapsto a \sin \theta + b \cos \theta$, a jedno z rozwiązań równania niejednorodnego łatwo odgadujemy – jest to funkcja stała $\frac{GM}{c^2}$. Zatem dowolne rozwiązanie równania (4) ma postać

$$s(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta + \frac{GM}{c^2},$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Jeśli weźmiemy θ_0 takie, że

$$\sin \theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

to kładąc $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ wobec wzoru

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0,$$

otrzymamy

$$s(\theta) = k \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{c^2}.$$

Wracając do funkcji r , otrzymamy

$$r(\theta) = \frac{c^2}{c^2 k^2 \cos(\theta - \theta_0) + GM}$$

czyli po wstawieniu nowych stałych $\alpha = \frac{c^2}{GM}$, $\varepsilon = \alpha k$ mamy

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (5)$$

gdzie $\alpha > 0$, natomiast $\varepsilon \geq 0$. Możemy przyjąć, że $\theta_0 = 0$ odpowiednio wybierając oś rzeczywistą na naszej płaszczyźnie zespolonej ($\theta = \theta_0$ – równanie dodatniej półosi rzeczywistej). Jeśli w równaniu (5) przejść do współrzędnych kartezjańskich $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, to zapisze się ono w postaci

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\alpha \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x}$$

i po prostych przekształceniach

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha - \varepsilon x,$$

skąd po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy równanie kwadratowe

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\alpha\varepsilon x - \alpha^2 = 0. \quad (6)$$

Jak wiadomo, równania kwadratowe opisują krzywe rzędu drugiego, czyli okrąg, elipsę, parabolę lub hiperbolę. Taki jest więc kształt trajektorii ruchu ciała m .

Zobaczmy teraz, że o kształcie trajektorii decyduje nieujemny współczynnik ε zwany mimiśrodem. Niech najpierw $\varepsilon = 0$. Wtedy równanie (5) przyjmuje postać $r = \alpha$ – równanie okręgu. Jeżeli $\varepsilon \in (0, 1)$, to w (5) mianownik nie znika dla żadnego kąta θ , czyli jest to równanie krzywej zamkniętej (okresowość funkcji cosinus). Taką krzywą spośród wymienionych powyżej jest elipsa. Nietrudno zauważyć, że stosunek długości pólki tej elipsy wynosi $1 - \varepsilon$, dąży więc do 1 przy $\varepsilon \rightarrow 0$ – wtedy elipsa zbliża się do okręgu. Przy rosnącym do 1 ε , elipsa coraz bardziej się spłaszcza.

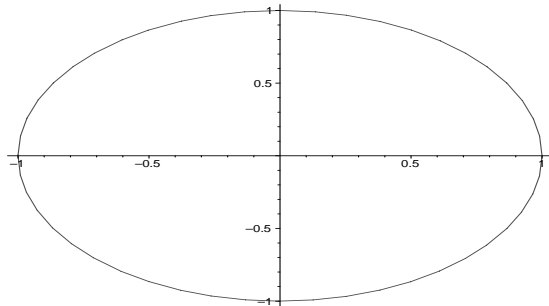
Dla $\varepsilon = 1$ równanie nasze przyjmuje postać we współrzędnych kartezjańskich

$$y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = 0$$

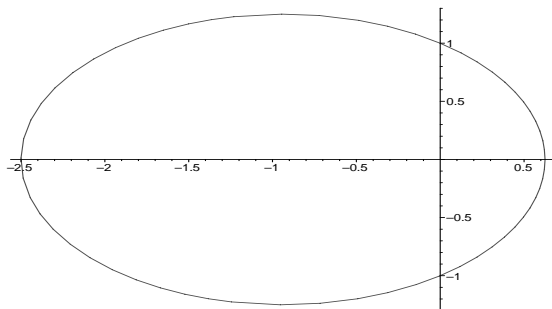
i oczywiście opisuje parabolę. Nie jest to już krzywa zamknięta, ciało m zbliża się do centrum, aby następnie uciec do nieskończoności. Ośią symetrii toru jest oś x , a tor ten przecina się z osią x w punkcie $\alpha/2$, a z osią y w punktach $\pm\alpha$. Dla $\varepsilon > 1$ równanie toru ruchu opisuje hiperbolę. Możemy zaobserwować, że początek układu współrzędnych znajduje się w ognisku jednej z dwóch gałęzi tej hiperboli.

Poniżej przedstawiamy obrazy trajektorii otrzymane przy pomocy MAPLE dla różnych wartości parametru ε .

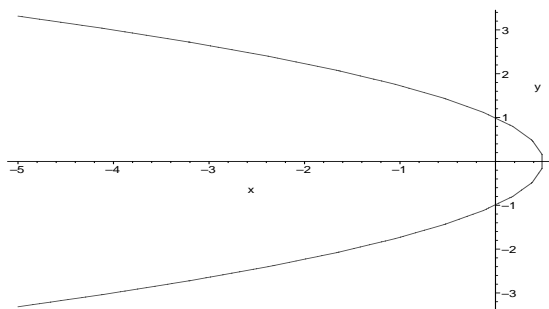
```
alpha:=1: varepsilon:=0:
plot(alpha/(1+epsilon*cos(theta)),theta= 0..6.28,coords=polar);
```



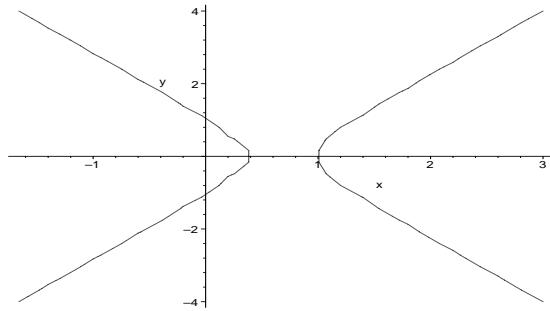
```
alpha:=1: epsilon:=0.6:
plot(alpha / (1+epsilon*cos(theta)), theta= 0..6.28, coords=polar);
```



```
alpha:=1: epsilon:=1:
plots[implicitplot](y^2+2*alpha*x-alpha^2=0, x=-5..0.6, y=-4..4);
```



```
alpha:=1: epsilon:=2:
plots[implicitplot]((1-epsilon^2)*x^2+y^2+2*alpha*epsilon*x-alpha^2=0,x=-5..
```



Wróćmy do równań (2) i (3). Przypomnijmy, że drugie z nich prowadzi do całki pierwszej $r^2\theta'$; przypomnijmy też wzór na pole obszaru ograniczonego krzywą zadaną we współrzędnych biegunowych wzorem $\theta \mapsto r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ oraz pólprostymi $\theta = \theta_1$ i $\theta = \theta_2$:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta.$$

Skoro θ jest funkcją czasu możemy zbudować funkcję $t \mapsto S(t)$ przyjmując we wzorze na pole $\theta_1 = \theta(0)$ i $\theta_2 = \theta(t)$. Pamiętamy, że funkcja $t \mapsto \theta(t)$ jest rosnąca (malejąca), a dla dużych t , gdy będziemy mieli $|\theta(t) - \theta_1| > 2\pi$, pola zakreślone po całym obrocie należy liczyć powtórnie. Zatem

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta(t)} r(\theta)^2 d\theta$$

i stąd

$$S'(t) = r(\theta(t))^2\theta'(t) = c.$$

Oznacza to, że funkcja $t \mapsto S(t)$ jest liniowa: $S(t) = c_1t + c_2$. Kepler zauważał stąd, że gdy przedziały czasowe $[t_1, t_2]$ i $[t_3, t_4]$ mają równą długość, to

$$S(t_2) - S(t_1) = c_1(t_2 - t_1) = c_1(t_4 - t_3) = S(t_4) - S(t_3)$$

i formułował to w postaci zwanej dzisiaj *drugim prawem Keplera*:

Pola zakreślane przez promień wodzący planety w równych odstępach czasu są równe.

(Arnold pisze o stałej prędkości polowej c , która jest bezpośrednio związana z momentem pędu.)

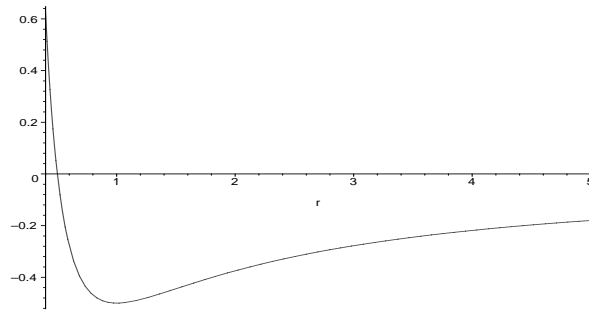
Przypomnijmy teraz równanie (2) z uwzględnieniem stałości prędkości polowej c :

$$r'' = \frac{c}{r^3} - GM \frac{1}{r^2}. \quad (7)$$

Według terminologii stosowanej przez Arnolda jest to układ zachowawczy z jednym stopniem swobody. Teoria takich układów jest omówiona w [1, 8]. Wprowadza się funkcję zwaną potencjałem; jest to dowolna funkcja pierwotna dla –prawyj strony równania (7), czyli tutaj

$$U(r) = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}.$$

Poniżej przedstawiamy kształt wykresu potencjału.



Potencjał wyznacza drugą całkę pierwszą – energię (całkowitą):

$$E = \frac{1}{2}r'^2 + U(r).$$

Z tego wykresu możemy wywnioskować, że dla energii ujemnych mamy trajektorie zamknięte (wobec wcześniejszych rozważań elipsy lub okręgi). Minimum potencjału łatwo znaleźć – jest ono dla $r = r_0 = \frac{c^2}{GM}$. Dla tej wartości promienia otrzymujemy orbitę kołową. Odpowiada ona energii $E_0 = U(r_0) = -\frac{G^2M^2}{2c^2}$. Dla energii ujemnych, ale większych od E_0 mamy dwa rozwiązania równania $U(r) = E$:

$$r_1 = \frac{GM - \sqrt{G^2M^2 - 2|E|c^2}}{2|E|}, \quad r_2 = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 - 2|E|c^2}}{2|E|}.$$

Okres obiegu trajektorii zamkniętej odpowiadającej energii E jest równy (por. [8])

$$T = \sqrt{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}. \quad (8)$$

Po prostym całkowaniu dostaniemy

$$T = \frac{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}{E} - GM \frac{\arctg \frac{\sqrt{-2E}(r+GM)}{2E\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}}{E\sqrt{-2E}} \Big|_{r_1}^{r_2}$$

i po uwzględnieniu tego, że $\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}$ znika dla $r = r_1$ i $r = r_2$, dostaniemy

$$T = \frac{GM\pi}{\sqrt{2}|E|^{3/2}}. \quad (9)$$

Znajdziemy teraz długości póloli elipsy w zależności od energii. Z równania (2) dostaniemy $r' = \sqrt{2(E - U(r))}$ i stąd

$$\theta'(r) = \frac{\theta'(t)}{r'(t)} = \frac{c}{r\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}.$$

Po scałkowaniu będziemy mieli

$$\theta(r) = \arccos \frac{\frac{c^2}{r} - GM}{r\sqrt{2Ec^2 + G^2M^2}}.$$

Jeśli teraz rozwikłamy to równanie obliczając z niego r , to otrzymamy

$$r = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 + \sqrt{1 + 2E\frac{c^2}{G^2M^2} \cos \theta}},$$

które możemy porównać z równaniem trajektorii (5) (już wcześniej wybraliśmy $\theta_0 = 0$ odpowiednio obracając układ współrzędnych). Mamy więc

$$\alpha = \frac{c^2}{GM}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2E\frac{c^2}{G^2M^2}}.$$

Po przejściu do współrzędnych kartezjańskich mamy (6) i dalej

$$\left(x - \frac{\alpha\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2}y^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Stąd długościami obu póloli elipsy są

$$\hat{a} = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2}, \quad \check{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Oczywiście dłuższa jest \hat{a} . Wstawiając teraz wartości współczynników, dostaniemy

$$\hat{a} = \frac{\frac{c^2}{GM}}{1 - 1 - 2E \frac{c^2}{G^2 M^2}} = \frac{GM}{2|E|}.$$

Porównując ten wynik z (9) otrzymamy

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \hat{a}^{3/2}.$$

Kepler wyrażał to w postaci nazywanej dzisiaj *trzecim prawem Keplera*:

Kwadraty okresów obiegu planet mają się do siebie tak, jak sześciiany dużych póloli elips, po których te planety się poruszają.

Bibliografia

- [1] W. Arnold: *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.
- [2] W. Arnold: *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- [3] F. Diacu, P. Holmes: *Celestial Encounters, The Origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press, Princeton 1996.
- [4] S. Lynch: *Dynamical Systems with Applications using MAPLE*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin 2001.
- [5] N. M. Matwiejew: *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.
- [6] J. Ombach: *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1999.
- [7] A. Palczewski: *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

- [8] B. Przeradzki: *Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2003.