Zadania z równań różniczkowych cząstkowych

Załączam adres strony www, na której znajdą Państwo przykładowe zadania z rozwiązaniami:

http://math.uni.lodz.pl/~ karpinw

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:

$xy^2u_x + x^2yu_y = 0,$

$2xu_x + yu_y = 0,$

$yu_x - xu_y = x^3y + xy^3,$

$3u_x + 5u_y + u_z = 2x,$

$zu_x + yu_y + yu_z = x + y + z.$

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienia początkowe:

$yu_x - 4xu_y = 2xy, \quad u(x, 1/x) = x,$

$u_x + 2yu_y - 3u_z = 0, \quad u(0, y, z) = z + 2\sin y,$

$u_x = x\,(u_y + u)\,, \quad u(0, y) = y^2 + 1,$

$yu_x - xu_y = 2xyu, \quad u(x, x) = x,$

$u_x - zu_y + yu_z + 5vu_v = 0, \quad u(0, y, z, v) = yz^2 + v,$

$u_x - xu_y = 2u + y, \quad u(0, y) = 2y^2 + 1,$

$yu_x - 2u_y + zu_z + u = x, \quad u(x, 0, z) = 0,$

$u_x + u_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = x^2 + y^2,$

$xu_x - 2yu_y + u = \mathrm{e}^x, \quad u(x, x^3) = 1,$

$\cos y u_x + \cos x u_y = \cos x \cos y, \quad u(1, y) = -y.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie

$$yu_x + xu_y = x^2$$

z warunkami początkowymi: (i) $u(x, 0) = x^2$,

(ii) $u(x, 0) = |x|^{3/2}$.

Porównać gładkość otrzymanych funkcji.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:

$u^2u_x - u_y = u,$

$u_x + uu_y = 6x,$

$(x - u)u_x + (y - u)u_y = 0,$

$2u_x + 5u_y + u_z = u^2.$

Zadanie 5. Rozwiązać zagadnienia początkowe:

$u_x + yuu_y = -x, \quad u(0, y) = 0,$
$u_x + yuu_y = -x, \quad u(x, x) = 1,$
$u_x + yuu_y = -x, \quad u(x, 0) = x^2,$
$x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \quad u(1, y) = -y,$
$xu_x + uu_y = y, \quad u(2, y) = y + 1,$
$(x + u)u_x + (y + u)u_y = 0, \quad u(x, 1 - 2x) = x.$

Zadanie 6. Następujące równania sprowadzić do postaci kanonicznej:

$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0,$
$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0,$
$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0,$
$y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0,$
$\mathrm{tg}^2 x u_{xx} - 2y\mathrm{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \mathrm{tg}^3 x u_x = 0,$
$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4 u = 0,$
$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0,$
$\mathrm{e}^{2x} u_{xx} + 2\mathrm{e}^{x+y} u_{xy} + \mathrm{e}^{2y} u_{yy} - xu = 0,$
$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)u_{yy} + \cos x u_y = 0.$

Zadanie 7. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie Blacka-Scholesa:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + rsu_s - ru = 0.$$

Stałymi są tu $\sigma > 0$, $r > 0$ - stopa procentowa. Zmiennymi są czas t i s. Podstawmy $x = \ln s$, a następnie $u(x, t) = w(x, t)\mathrm{e}^{ax}$, gdzie a jest tak wybrane, by równanie się uprościło.

Zadanie 8. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:

$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} = \cos x u_y,$
$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$
$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0,$
$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0,$
$u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0.$

Zadanie 9. Rozwiązać zagadnienia początkowe:

$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,\ u(x, 0) = 3x^2,\ u_y(x, 0) = 0,$

$$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 2x,$$

$(1+x^2)u_{xx}-(1+y^2)u_{yy}+xu_x-yu_y=0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_y(x,0)=\psi(x),$

$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0$, $u(x,1)=x^2$, $u_y(x,1)=x^3$.

Zadanie 10. Przy pomocy metody Fouriera rozwiązać zagadnienia brzegowo-początkowe dla równania struny $u_{tt}=c^2u_{xx}$:

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=\sin\frac{2\pi}{l}x,$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x),$$

$$u(0,t)=u_x(l,t)=0, \quad u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x, \quad u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x,$$

$$u_x(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x, \quad u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x,$$

$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \quad u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=1,$$

$$u(0,t)=u_x(l,t)+hu(l,t)=0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x).$$

Zadanie 11. Przy pomocy metody Fouriera rozwiązać zagadnienia brzegowo-początkowe dla równania $u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x)$:

$$u(0,t)=a, \quad u(l,t)=b, \quad u(x,0)=u_t(x,0)=0,$$

$$u_x(0,t)=a, \quad u_x(l,t)=b, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=0.$$

Zadanie 12. Przy pomocy metody Fouriera rozwiązać zagadnienia brzegowo-początkowe:

$$u_t=a^2u_{xx}+t\sin\frac{\pi}{l}x, \quad u(0,t)=u(l,t)=0, \quad u(x,0)=x(l-x),$$

$$u_t=a^2u_{xx}+bu_x+\cos\frac{\pi}{l}x, \quad u_x(0,t)=0=u(l,t), \quad u(x,0)=\varphi(x),$$

Wsk. - zastosować podstawienie $u(x,t)=\mathrm{e}^{rx}v(x,t)$ z tak dobraną stałą r, by wyeliminować składnik z bu_x.

$$u_t=a^2u_{xx}, \quad u(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=t, \quad u(x,0)=\sin\frac{3\pi}{l}x,$$

$$u_t=a^2u_{xx}-bu, \quad u(0,t)=0=u(l,t), \quad u(x,0)=\varphi(x),$$

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = T, \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = U \ \ (h > 0), \quad u(x,0) = 0,$$

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu, \quad u(0,t) = 0 = u_x(l,t), \quad u(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l},$$

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u(0,t) = 0 = u(l,t), \quad u(x,0) = 0.$$

Zadanie 13. Przy pomocy metody Fouriera rozwiązać zagadnienia brzegowe:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = \sin \frac{\pi}{a} x, \quad u(0,y) = A(y), \quad u(a,y) = B(y),$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = u_y(x,l) = 0, \quad u(0,y) = f(y), \quad \lim_{x \to \infty} u(x,y) = 0,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u_x(0,y) = 0 = u_x(p,y), \quad u(x,0) = a, \quad u(x,s) = bx,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = -2, \quad u(x, \pm \frac{b}{2}) = 0, \quad u(0,y) = u(a,y) = 0.$$

Zadanie 14. Znaleźć funkcję harmoniczną w pierścieniu

$$\{(x,y): \ a < x^2 + y^2 < b\},$$

która na wewnętrznym okręgu brzegowym jest stała $u = c$, a na zewnętrznym okręgu brzegowym jest równa $u = d \sin 2\theta$, gdzie θ jest współrzędną kątową punktu.

Zadanie 15. Pokazać, że funkcja harmoniczna nie posiada ekstremum lokalnego.

Zadanie 16. Przy pomocy wzoru Poissona na rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla kuli

$$\Delta u(x) = 0 \ \ x \in K(0,R); \qquad u|\partial K(0,R) = \varphi,$$

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R} \int_{\partial K(0,R)} \frac{R^2 - ||x||^2}{||x-y||^n} \varphi(y)\, dS_y,$$

wykazać, że funkcja harmoniczna na $\mathbb{R}^n$ i ograniczona z góry lub z dołu jest stała. σ_n oznacza tu miarę indukowaną sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$.

Wskazówka. Najpierw wykazać to przy założeniu $u \geq 0$, a następnie wszystko sprowadzić do tego przypadku.

Zadanie 17. Przy pomocy pierwszego wzoru Greena udowodnić, że

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial \nu_y}\, dS_y = -\sigma_n$$

dla $x \in \Omega$. Założenia o zbiorze Ω jak we wzorach Greena.

Zadanie 18. Znaleźć charakterystyki równania

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zadanie 19. Dla funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) :\ x \geq 0\}$, klasy C^2, wyrazić laplasjan $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$ we współrzędnych biegunowych

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 20. Dla funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) :\ x \geq 0\}$, klasy C^2, wyrazić laplasjan $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ we współrzędnych sferyczych

$$x = r\cos\theta\sin\vartheta, \quad y = r\sin\theta\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta,$$

$$r > 0, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Zadanie 21. Znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne w $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych biegunowych zależne tylko od r (mówimy wtedy o funkcjach radialnie symetrycznych). Analogiczne zadanie rozwiązać dla funkcji harmonicznych w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 22. Pokazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej i ograniczonej $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcja

$$u(x,y) = \int_0^\infty f(z) \mathrm{e}^{-zx} \sin(zy)\, dz$$

jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 23. Dla równania Burgersa

$$u_t + uu_x = ku_{xx}$$

znaleźć wszystkie rozwiązania tzw. fale wędrujące

$$u(x,t) = v(x-ct), \quad \text{gdzie} \quad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to-\infty} v(z) = 1, \quad \lim_{t\to+\infty} v(z) = 0.$$

Zadanie 24. Poszukać fal wędrujących dla innych równań rozpatrywanych na wykładach.

Zadanie 25. Niech u bdzie rozwiązaniem równania struny

$$\varrho(x)u_{tt} = au_{xx}$$

($\varrho : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana funkcja ciągła – gęstość) z jednorodnymi warunkami Dirichleta lub Neumanna:

$$u(0,t) = 0 = u(1,t) \qquad \text{lub} \qquad u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t).$$

Energią całkowitą nazywamy funkcję

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\varrho u_t^2 + au_x^2\right)\, dx.$$

Pokazać, że energia całkowita nie zależy od czasu $E'(t) = 0$.

Zadanie 26. (*) Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie Ω jest zbiorem otwartym i ograniczonym o gładkim brzegu. Pokazać, że dla każdej funkcji v klasy $C^2(\Omega)$ ciągłej na $\overline{\Omega}$ i takiej, że $v|_{\partial\Omega} = \varphi$ zachodzi nierówność

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \le \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.$$

Zadanie 27. (*) Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie Ω jest zbiorem otwartym i ograniczonym o gładkim brzegu. Dla każdej funkcji v klasy $C^2(\overline{\Omega})$ takiej, że $\frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi$ zdefiniujmy

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\partial\Omega} \psi v \, dx.$$

Pokazać, że funkcjonał E osiąga minimum na rozwiązaniu u.