Równanie Lorenza

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie stałe dodatnie σ, r i b mają interpretację fizyczną (stałe Prandtla i Rayleigha). Lorenz przyjął $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

$$V(x, y, z) := rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

– jej pochodna wzdłuż trajektorii:

$$\dot{V} = -2\sigma(rx^2 + ry^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

$\dot{V} < 0$ na zewnątrz elipsoidy $E := \{(x, y, z) : \, rx^2 + ry^2 + b(z - r)^2 \leq br^2\}$. Wprowadźmy oznaczenia $m := \sup_E V$ i dla $\varepsilon > 0$

$$E_\varepsilon := \{(x, y, z) : \, V(x, y, z) \leq m + \varepsilon\}.$$

Wtedy $E \subset \operatorname{int} E_\varepsilon$ i $\sup_{\mathbb{R}^3 \setminus E_\varepsilon} \dot{V} := -\delta < 0$, więc wartość funkcji V wzdłuż trajektorii startującej na zewnątrz E_ε maleje, aż do chwili, gdy trajektoria ta ,,wejdzie" do tej elipsoidy. Ponieważ $\dot{V} \leq 0$ na $E_\varepsilon \setminus E$, więc trajektoria ta nigdy już nie opuści zbioru E_ε. Zatem $\overline{\mathcal{O}^+(\mathcal{P})}$ jest zbiorem zwartym dla każdego $P \in \mathbb{R}^3$ i tym samym zbiór $\omega(P)$ jest niepusty, zwarty i spójny.

Punkty stałe układu: dla $r \leq 1$ jest tylko jeden punkt stały $p_0 = (0, 0, 0)$, a dla $r > 1$ pojawiają się jeszcze dwa

$$p_\pm = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r - 1 \right).$$

Z analizy stabilności punktów stałych:
dla $r > r_H$, gdzie

$$r_H := \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1},$$

wszystkie punkty stałe są niestabilne. Dla $r = r_H$ mamy jedną rzeczywistą wartość własną przybliżenia liniowego układu w punktach $p_\pm$ i dwie sprzężone, czysto urojone: ma miejsce bifurkacja Hopfa.

Dywergencja pola wektorowego danego przez prawą stronę układu Lorenza:

$$f(x,y,z) := [\sigma(y-x), rx-y-xz, xy-bz], \qquad \operatorname{div} f = -(\sigma+b+1) < 0.$$

Na podstawie tw. o dywergencji, jeśli weźmiemy dowolny zbiór mierzalny $D \subset \mathbb{R}^3$, przez $D(t)$ oznaczymy zbiór

$$\{(x(t), y(t), z(t)) : (x(0), y(0), z(0)) \in D\},$$

a przez $O(t)$ jego objętość, to $O'(t) = -(\sigma+b+1)O(t)$, czyli

$$O(t) = O(0) \cdot \exp(-(\sigma+b+1)t) \longrightarrow 0$$

przy $t \to +\infty$. Zatem mamy zbiór

$$A := \lim_{t\to+\infty} D(t) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} D(s)},$$

gdzie $D(0) = D = E_\varepsilon$ z wcześniejszych rozważań. Zbiór A jest domknięty, niezmienniczy i ma objętość 0. Jest on globalnym atraktorem dla układu Lorenza.

K. Mishaikov, M. Mrozek: *Chaos in the Lorenz equations, a computer assisted proof,* Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1995), 66–72.

K. Mishaikov, M. Mrozek, A. Szymczak: *Chaos in the Lorenz equations, a computer assisted proof, part II – details,* Mathematics of Computations **67** (1998), 1023–1046.

Układ dynamiczny Lorenza zredukowany do atraktora A ma dwie następujące cechy:

1) *topologiczną tranzytywność*, tzn. dla dowolnych zbiorów otwartych $U, V \subset A$ istnieje $t > 0$ takie, że

$$\pi(t, U) \cap V \neq \emptyset;$$

2) *wrażliwość na warunki początkowe*, tzn. istnieje dodatnia liczba M taka, że dla dowolnego $p \in A$ istnieją ciągi $p_n \to p$ i $(t_n) \in (0, \infty)$ o własności

$$||\pi(t_n, p_n) - \pi(t_n, p)|| \geq M.$$

Warunek 1) gwarantuje niepodzielność zbioru A na mniejsze zbiory domknięte i niezmiennicze. W szczególności jest on spełniony, gdy istnieje trajektoria, która jest gęstym podzbiorem A. Byłby też spełniony, gdyby cały zbiór A był jedną trajektorią okresową.

Warunek 2) oznacza, że żadne rozwiązanie o trajektorii zawartej w A nie jest stabilne nawet po redukcji układu do zbioru A. Gdyby A był trajektorią okresową, to ten warunek nie byłby spełniony. Niektórzy autorzy do tych dwóch warunków dokładają jeszcze

3) gęstość zbioru trajektorii okresowych w zbiorze A.

układ Rösslera

$$\begin{cases} x' = -(y+z) \\ y' = x + ay, \qquad\qquad a = b = 0.2, \quad c > 6, \\ z' = b + xz - cz \end{cases} \tag{2}$$

układ Chua

$$\begin{cases} x' = a(y - x - g(x)) & \qquad g(x) = cx + \frac{d-c}{2}(|x+1| - |x-1|) \\ y' = x - y + z, & \qquad a = 15, \quad b = 25.58, \\ z' = -by & \qquad c = -\frac{5}{7}, \quad d = -\frac{8}{7}. \end{cases} \tag{3}$$