

# Analiza układów dynamicznych

Bogdan Przeradzki

21 stycznia 2008

## Literatura

- [1] B. Przeradzki „Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych”
- [2] M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney „Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos”
- [3] S. Strogatz „Nonlinear Dynamics and Chaos”
- [4] H. Schuster „Chaos deterministyczny”
- [5] I. Stewart „Czy Bóg gra w kości”
- [6] R. Temam „Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics”
- [7] I. D. Chueshov „Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Systems”

## 1 Układy dynamiczne – przykłady

Niech  $X$  będzie zbiorem. *Układem dynamicznym* w  $X$  nazywamy dowolną rodzinę  $\{S_t : t \geq 0\}$  odwzorowań  $X$  w siebie taką, że

- (i)  $S_0 = \text{id}_X$ ,
- (ii)  $S_t \circ S_\tau = S_{t+\tau}$  dla dowolnych  $t, \tau \geq 0$ .

Istnieje bogata teoria, w której na  $X$  zadana jest miara, a odwzorowania  $S_t$  ją zachowują (teoria ergodyczna). Tu będziemy rozważać teorię, w której  $X$  jest przestrzenią metryczną, a odwzorowanie

$$[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S_t(x)$$

jest ciągłe. Przestrzeń  $X$  nazywamy *przestrzenią fazową* układu dynamicznego. Jak widać rodzina  $S_t$ ,  $t \geq 0$  stanowi półgrupę ciągłych odwzorowań  $X$  w siebie. Czasami (np. w [1]) przez układ dynamiczny rozumie się grupę  $S_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  spełniającą powyższe warunki. Zauważmy, że pociąga to za sobą odwracalność wszystkich  $S_t$ , bo

$$S_t \circ S_{-t} = S_{-t} \circ S_t = \text{id}_X$$

wszystkie te odwzorowania stają się homeomorfizmami przestrzeni  $X$  na siebie.

**Przykład 1.** Rozważmy autonomiczne równanie różniczkowe zwyczajne:

$$x' = f(x),$$

gdzie  $f : \mathbb{R}^k \supset X \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest odwzorowaniem lipschitzowsko ciągłym (tzn. lokalnie spełniającym warunek Lipschitza) na otwartym zbiorze  $X$ , przy czym jedyne rozwiązanie dowolnego zagadnienia początkowego dla tego równania jest przedłużalne na całą prostą. Jeśli  $f$  nie gwarantuje tego ostatniego, to istnieje funkcja skalarna  $\alpha : X \rightarrow (0, \infty)$  taka, że pole wektorowe  $\alpha f$  już ten warunek spełnia (por. [1], str. 85-6). Niech  $S_t(x_0)$  dla  $x_0 \in X$  oznacza wartość rozwiązania zagadnienia początkowego  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  w chwili  $t$ . Ciągłość odwzorowania  $(t, x) \rightarrow S_t(x)$  wynika z tw. o ciągłej zależności rozwiązania od warunku początkowego, warunek (i) jest oczywiście spełniony, a warunek (ii) jest konsekwencją jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego. Tutaj  $S_t$  jest określone dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ .

**Przykład 2.** Rozważmy autonomiczne równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem:

$$x' - Ax = f(x(t-r)),$$

gdzie  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $A$  jest odwzorowaniem liniowym  $\mathbb{R}^k$  w siebie,  $r > 0$ , a  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest ciągłe. Równanie takie rozpatruje się wraz z warunkiem początkowym

$$x|_{[-r,0]} = \phi,$$

gdzie  $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^k)$  jest ustaloną funkcją ciągłą. Nietrudno zauważyć (wzór na uzmiennianie stałych), że rozwiązaniem dla  $t \in [0, r]$  jest

$$x(t) = \exp tA\phi(0) + \int_0^t \exp(t-s)Af(\phi(s-r)) ds.$$

Powtarzając ten argument dla przedziałów o długości  $r$   $[r, 2r]$ ,  $[2r, 3r]$ , i.t.d. możemy otrzymać rozwiązanie dla wszystkich  $t \geq 0$ . Zdefiniujmy przy pomocy tego rozwiązania  $x$  rodzinę odwzorowań

$$S_t(\phi)(s) = x(t+s), \quad t \geq 0,$$

dla  $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^k)$  i  $s \in [-r, 0]$ . Otrzymaliśmy układ dynamiczny w przestrzeni  $X = C([-r, 0], \mathbb{R}^k)$ . Poza tym, że tym razem  $S_t$  nie muszą być odwracalne i  $S_t$  jest określone dla  $t \geq 0$  mamy tu jeszcze  $\dim X = \infty$  w odróżnieniu od poprzedniego przykładu, gdzie  $\dim X = k$ .

**Przykład 3.** Rozważmy paraboliczne równanie różniczkowe cząstkowe postaci:

$$u_t = \mu \Delta u + f(x, u),$$

gdzie  $\mu > 0$ ,  $\Delta$  oznacza laplasjan we współrzędnych przestrzennych

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i},$$

a  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą,  $\Omega$  – otwarty i ograniczony podzbiór  $\mathbb{R}^n$  o dostatecznie gładkim brzegu. Rozpatrywane równanie jest nielinowe

w odróżnieniu od badanych w poprzednim semestrze, o ile zależność  $f$  od  $u$  nie jest liniowa. Poszukujemy rozwiązań spełniających warunek brzegowy Dirichleta lub Neumanna – weźmy ten drugi;

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0,$$

oraz pewien warunek początkowy

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

gdzie  $\phi \in L^2(\Omega)$  jest ustaloną funkcją. Można pokazać, że jeśli  $f$  spełnia warunek Lipschitza względem  $u$ , to równanie to (z warunkiem brzegowym i początkowym) posiada dokładnie jedno rozwiązanie, które spełnia równanie całkowe

$$u(x, t) = \mathcal{F}_t(\phi) + \int_0^t \mathcal{F}_{t-s}f(x, u(x, s)) ds,$$

gdzie  $\mathcal{F}_t(\psi)$  jest rozwiązaniem zagadnienia liniowego

$$u_t = \mu\Delta u, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(\cdot, 0) = \psi,$$

(por. [7]). Rozwiązanie to jest określone dla wszystkich  $t \geq 0$  i  $u(\cdot, t)$  jest stale funkcją z  $L^2(\Omega)$ . W ten sposób powstaje układ dynamiczny  $S_t(\phi) = u(\cdot, t)$  w przestrzeni (znowu nieskończenie wymiarowej)  $L^2(\Omega)$ . Teoria przenosi się bez zmian na przypadek nieliniowych układów parabolicznych, tzn. funkcja  $u$  może przyjmować wartości wektorowe  $\mathbb{R}^k$ .

Powyższe trzy przykłady uzasadniają znaczenie teorii układów dynamicznych. Podamy jeszcze przykład ważny teoretycznie.

**Przykład 4.** Niech  $X$  będzie przestrzenią funkcji ciągłych i ograniczonych  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  z normą

$$\|x\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |x(\tau)|$$

(zbieżność jednostajna). Rozważmy rodzinę  $S_t : X \rightarrow X$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , daną wzorem

$$S_t(x)(\tau) = x(t + \tau).$$

Stanowi ona układ dynamiczny w  $X$ . W tym przykładzie przestrzeń  $X$  możemy wybrać inaczej: przestrzeń funkcji okresowych z tą samą normą lub przestrzeń  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Jeżeli w definicji układu dynamicznego zastąpimy  $t \in [0, \infty)$  przez  $t \in \mathbb{N}$ , to otrzymamy tzw. *dyskretny układ dynamiczny*. Nietrudno zauważyć, że jest on zadany tylko przez podanie  $S_1 : X \rightarrow X$ , bowiem  $S_n = S_1 \circ \dots \circ S_1$  ( $n$  złożeń) dla  $n > 1$ , a  $S_0 = \text{id}_X$ .

Jeżeli mamy układ dynamiczny z czasem ciągłym  $S_t$ ,  $t \geq 0$ , i ustalimy „jednostkę” czasu  $T$ , to otrzymamy dyskretny układ dynamiczny  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dany wzorem  $V_n = S_{nT}$ .

## 2 Podstawowe pojęcia teorii układów dynamicznych

Niech  $S_t$ ,  $t \geq 0$  będzie układem dynamicznym w  $X$  (z czasem ciągłym). *Trajektorią* punktu  $x$  nazywamy każdy zbiór postaci  $\gamma(x) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , gdzie  $S_t u(\tau) = u(t + \tau)$  dla  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  i  $u(0) = x$ . *Półtrajektorią dodatnią* tego punktu nazywamy część trajektorii  $\gamma^+(x) = \{u(t) : t \geq 0\}$  –  $u$  określona powyżej, a *półtrajektorią ujemną* – część trajektorii  $\gamma^-(x) = \{u(t) : t \leq 0\}$ .

Zauważmy, że półtrajektoria dodatnia jest określona jednoznacznie przez wybór punktu  $x : \gamma^+(x) = \{S_t(x) : t \geq 0\}$ , a półtrajektoria ujemna niekoniecznie. Cała trajektoria jest jednoznacznie wyznaczona przez  $x$ , o ile  $S_t$  są homeomorfizmami  $X$  na siebie. Wystarczy zresztą, aby  $S_{t_0}$  był homeomorfizmem dla pewnego  $t_0 > 0$ , by wszystkie  $S_t$ ,  $t \geq 0$  były takie i można dookreślić  $S_t$  dla  $t < 0$  wzorem  $S_t = S_{-t}^{-1}$ . Trajektorią punktu  $x$  jest wtedy  $\gamma(x) = \{S_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Analogiczne definicje i uwagi można powtórzyć dla układów z czasem dyskretnym zastępując  $\mathbb{R}$  przez  $\mathbb{Z}$  i  $[0, \infty)$  przez  $\mathbb{N}$ .

Wyróżnione są dwa rodzaje trajektorii: *punkty stałe* (inaczej stacjonarne)  $\gamma^+(x) = \{x\}$  oraz *trajektorie okresowe*  $\gamma(x) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  takie, że dla pewnego  $T \neq 0$  mamy  $u(t + T) = u(t)$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ . Liczbę  $T$  nazywamy wtedy okresem trajektorii. Zbiór okresów danej trajektorii stanowi podgrupę grupy liczb rzeczywistych z dodawaniem; jeśli ta podgrupa pokrywa się z  $\mathbb{R}$ , to  $x$  jest punktem stałym, w przeciwnym razie istnieje najmniejszy okres dodatni zwany okresem podstawowym. W układach dynamicznych, dla których  $S_t$  nie są homeomorfizmami mogą się pojawić także trajektorie granicznie stałe i granicznie okresowe. Granicznie stała jest trajektoria  $\gamma(x) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  taka, że  $u(t) = \text{const}$  dla dostatecznie dużych  $t$ , a trajektoria granicznie okresowa spełnia  $u(t + T) = u(t)$  dla pewnego ustalonego  $T$  i dostatecznie dużych  $t$ . W „pełnych” układach dynamicznych takich możliwości nie ma.

Zbiór  $A \subset X$  nazywamy *niezmienniczym* (dla ustalonego układu dynamicznego w  $X$ ), jeśli

$$S_t(A) = A, \quad \text{dla każdego } t \geq 0,$$

*dodatnio niezmienniczym*, jeśli

$$S_t(A) \subset A, \quad \text{dla każdego } t \geq 0,$$

i *ujemnie niezmienniczym*, jeśli

$$S_t(A) \supset A, \quad \text{dla każdego } t \geq 0.$$

Łatwo zauważyć, że trajektorie  $\gamma(x)$  są zbiorami niezmienniczymi, półtrajektorie dodatnie (odp. ujemne) są zbiorami dodatnio (odp. ujemnie) niezmienniczymi.

Zbiorem  $\omega$ -granicznym punktu  $x$  nazywamy zbiór wszystkich granic ciągów zbieżnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n}(x), \quad \text{gdzie } t_n \rightarrow +\infty;$$

oznaczamy go  $\omega(x)$ . Inaczej

$$\omega(x) = \overline{\bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} S_t(x)}.$$

Ta druga równoważna definicja pozwala na proste uogólnienie, gdy zbiór  $\{x\}$  zastąpimy przez dowolny podzbiór  $A \subset X$  :

$$\omega(A) = \overline{\bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} S_t(A)}.$$

Można też odwrócić kierunek czasu określając zbiory  $\alpha$ -graniczne punktu i zbioru np.

$$\alpha(A) = \overline{\bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} S_t^{-1}(A)}.$$

Gdy  $S_t$  są homeomorfizmami możemy powiedzieć, że zbiór  $\alpha(x)$  jest zbiorem granic ciągów zbieżnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n}^{-1}(x) = S_{-t_n}(x), \quad \text{gdzie } t_n \rightarrow +\infty.$$

Warto zauważyć, że zbiory graniczne mogą być (i często są) puste. Zbiory  $\omega(A)$  są dodatnio niezmiennicze, a gdy  $S_t$  są homeomorfizmami, także niezmiennicze. W tym drugim przypadku także zbiory  $\alpha(A)$  są niezmiennicze.

Łatwo znaleźć zbiory graniczne dla punktu stałego i trajektorii okresowej.

Wszystkie definicje i uwagi pozostają w mocy dla układów dyskretnych, gdy argument rzeczywisty  $t$  zastąpimy przez całkowity.

**Przykład.** Rozważmy równanie autonomiczne na płaszczyźnie:

$$\begin{cases} x' = x - y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = x + y - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

albo po zamianie na współrzędne biegunowe  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

To ostatnie łatwo rozwiązać, bo zmienne  $r$  i  $\theta$  są odseparowane. Nawet bez znajdowania jawnej postaci rozwiązania widzimy, że  $r(t) = 0$  i  $r(t) = 1$  są dwoma rozwiązaniami stałymi  $r' = r(r - 1)$  co wraz z

$\theta(t) = t - \text{const}$  daje dwie trajektorie wyjściowego układu: punkt stały w początku układu współrzędnych i trajektorię okresową – okrąg  $r = 1$ . Dla  $r(t_0) \in (0, 1)$   $r'(t_0) > 0$ , więc  $r$  jest funkcją rosnącą. Ponieważ trajektorie nie mogą się przecinać,  $r(t)$  zbliża się do okręgu  $r = 1$  przy  $t \rightarrow +\infty$ . Analogicznie  $r(t) \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow -\infty$ . Jeżeli  $r(t_0) > 1$ , wówczas  $r$  jest malejąca i znowu  $r(t) \rightarrow 1$  przy  $t \rightarrow +\infty$  i  $r(t) \rightarrow \infty$  przy  $t \rightarrow -\infty$ . W rezultacie dla punktów koła otwartego  $K(0, 1)$  z wyciętym środkiem zbiorem  $\alpha$ -granicznym jest  $\{(0, 0)\}$ , a zbiorem  $\omega$ -granicznym okrąg  $\partial K(0, 1)$ , a dla punktów z  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{K(0, 1)}$  zbiór  $\alpha$ -graniczny jest pusty, a zbiorem  $\omega$ -granicznym jest ten sam okrąg  $\partial K(0, 1)$ . Domkniętymi zbiorami niezmienniczymi są: początek uk. wsp.  $(0, 0)$ , koło  $\overline{K(0, 1)}$ , oraz jego brzeg (no i cała płaszczyzna).

### 3 Atraktory – różne definicje

Zbiór ograniczony  $A \subset X$  nazywamy *atraktorem globalnym* (dla określonego w  $X$  układu dynamicznego), jeśli  $A$  jest niezmienniczy i spełnia warunek jednostajnego przyciągania zbiorów ograniczonych tzn. dla każdego zbioru ograniczonego  $B \subset X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} d(S_t(x), A) = 0,$$

gdzie  $d(y, C) = \inf_{z \in C} d(y, z)$  oznacza odległość punktu  $y$  od zbioru  $C$  daną przez metrykę  $d$  w  $X$ . Globalny atraktor jest jednoznacznie określony (o ile istnieje) – wystarczy zastosować warunek jednostajnego przyciągania najpierw dla  $B = A_1$  i  $A = A_2$ , a później odwrotnie uwzględniając niezmienniczość obu zbiorów. Ponadto dla każdego zbioru ograniczonego  $B$ ,  $\omega(B) \subset A$ .

Założmy, że istnieje atraktor globalny  $A$ . Rozważmy rodzinę zbiorów domkniętych i dodatnio niezmienniczych  $C \subset A$  takich, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(S_t(x), C) = 0$  dla każdego  $x \in X$ . Rodzina ta jest niepusta – zawiera atraktor globalny  $A$  i przecięcie wszystkich zbiorów tej rodziny należy do rodziny i jest jej najmniejszym zbiorem. Ten zbiór nazywamy *minimalnym atraktorem globalnym*. Ten rodzaj atraktora zawiera zbiory  $\omega$ -graniczne wszystkich punktów przestrzeni.

Jeżeli w przestrzeni  $X$  zadana jest pewna miara borelowska  $\mu$ , to *atraktorem Milnora* nazywamy minimalny zbiór domknięty i niezmienniczy  $A$  taki, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(S_t(x), A) = 0$  dla prawie każdego (ze względu na miarę  $\mu$ )  $x \in X$ . Znowu istnienie takiego zbioru minimalnego pokazuje się biorąc przecięcie wszystkich zbiorów o tych własnościach.

Nadal w  $X$  zadana jest pewna miara borelowska  $\mu$ . Ustalmy zbiór otwarty  $U \subset X$ . Średnim czasem przebywania punktu  $x$  w zbiorze  $U$  nazywamy granicę górną

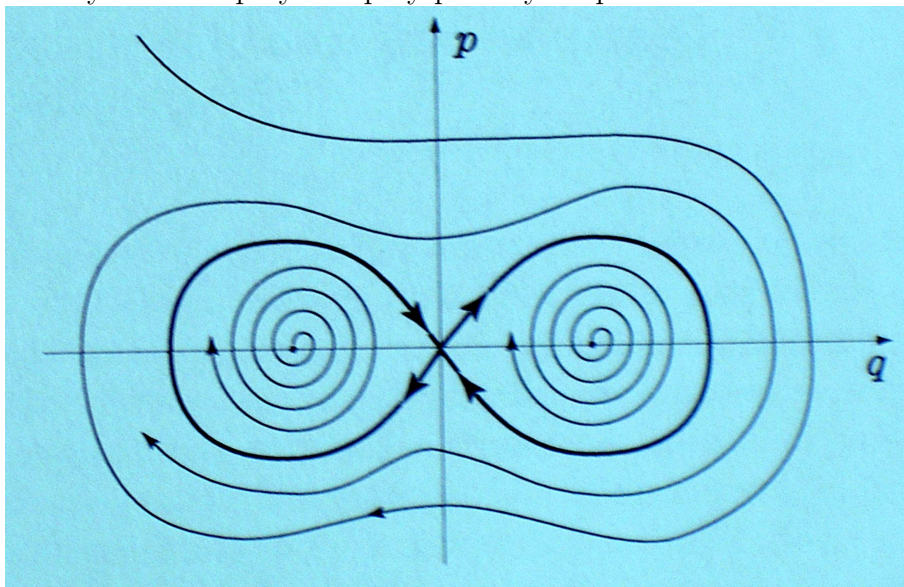
$$\tau(x, U) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_U(S_t(x)) dt.$$

$\chi_U$  oznacza tutaj funkcję charakterystyczną zbioru  $U$ . Zbiór  $U$  nazywamy nieistotnym, gdy dla prawie wszystkich  $x \in X$  średni czas przebywania  $x$  w zbiorze  $U$  jest równy 0. Oczywiście jeśli  $U_1 \subset U_2$  i  $U_2$  jest nieistotny, to i  $U_1$  jest taki. Ponadto przeliczalna suma zbiorów nieistotnych jest zbiorem nieistotnym. Zatem istnieje maksymalny zbiór nieistotny. Jego dopełnienie jest zbiorem domkniętym zwanym *atraktorem Iljaszenki*.

**Przykład.** Niech  $H(p, q) = 1/2p^2 + q^4 - q^2$  i  $a > 0$ . Portret fazowy układu

$$\begin{cases} q' = \frac{\partial H}{\partial p} - aH \frac{\partial H}{\partial q} \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial q} - aH \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

łatwo narysować na przykład przy pomocy Maple:



Para trajektorii homoklinicznych z punktu  $(0, 0)$  tworząca „ósemkę” jest zbiorem miejsc zerowych funkcji  $H$ , zbiór przez nie ograniczony to zbiór, gdzie  $H$  jest ujemna. Atraktoem globalnym jest tu zbiór

$$\{(p, q) : H(p, q) \leq 0\},$$

minimalnym atraktoem globalnym zbiór

$$\{(p, q) : H(p, q) = 0\} \cup \{(p, q) : \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0\},$$

atraktoem Milnora zbiór  $\{(p, q) : H(p, q) = 0\}$ , a atraktoem Iljaszenki tylko początek układu współrzędnych.

## 4 Układy dyssypatywne

Globalne atraktory nie zawsze występują w układach dynamicznych np. jeśli choć jedna trajektoria ucieka do nieskończoności. *Układ dynamiczny*

nazywamy *dyssypatywnym* jeśli istnieje zbiór ograniczony  $B_0 \subset X$  pochłaniający wszystkie zbiory ograniczone  $B \subset X$  tzn.

$$\forall B \exists t_0 \forall t \geq t_0 S_t(B) \subset B_0.$$

W zastosowaniach zwykle  $X$  jest przestrzenią Banacha i zbiorem pochłaniającym jest kula o środku 0 i dostatecznie dużym promieniu. Dyssypatywność układu sprawdza się odgadując pewną funkcję  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  (modyfikacja pomysłu funkcji Lapunowa). Ma ona być

- (i) ograniczona na zbiorach ograniczonych,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = +\infty$ ,
- (iii) dla dowolnego  $x \in X$  funkcja  $t \rightarrow U(S_t(x))$  jest różniczkowalna i

$$\frac{d}{dt}U(S_t(x)) + \alpha U(S_t(x)) \leq \beta$$

dla pewnych stałych nieujemnych  $\alpha, \beta$ .

Dla dowodu oznaczmy  $\gamma(t) = \frac{d}{dt}U(S_t(x)) + \alpha U(S_t(x))$ . Wtedy ze wzoru na uzmiennianie stałych

$$U(S_t(x)) = e^{-\alpha t}U(x) + \int_0^t e^{\alpha(s-t)}\gamma(s) ds$$

i z założenia

$$\begin{aligned} U(S_t(x)) &\leq e^{-\alpha t} \sup_{x \in B} |U(x)| + \beta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds \\ &\leq e^{-\alpha t} \sup_{x \in B} |U(x)| + \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

W rezultacie znajdziemy  $t_0$  (zależne od  $B$ ) takie, że  $U(S_t(x)) \leq 2\frac{\beta}{\alpha}$ , i z (ii) wynika teza.

W zastosowaniach mechanicznych funkcja  $U$  jest zwykle energią całkowitą układu i jego dyssypatywność oznacza, że w trakcie ruchu następuje utrata energii. W innych zastosowaniach należy zawsze posługiwać się interpretacją występujących w modelu wielkości, aby odgadnąć postać funkcji  $U$ .

Przykładowo dyssypatywne są: układ prawie hamiltonowski (rysunek atraktorów) z funkcją  $U = H^2$ , układ autonomiczny  $x' = f(x)$ , gdzie  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest funkcją lipschitzowsko ciągłą, przy czym

$$(x, f(x)) \leq -\alpha \|x\|^2 + C, \quad \alpha > 0, \quad C \in \mathbb{R},$$

układ Lorenza:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y, \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = -bz + xy, \end{cases}$$



gdzie  $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$ .

W zastosowaniach zwykle  $t \mapsto S_t(x)$  jest różniczkowalna, dla różniczkowalności złożenia z  $U$  musimy więc jedynie zadbać o różniczkowalność funkcji  $U$ .

Sama dyssypatywność układu w przypadku nieskończenie wymiarowym (tzn.  $\dim X = \infty$ ) nie gwarantuje istnienia globalnego atraktora. Dopiero, gdy założymy tzw. asymptotyczną zwartość układu, tak będzie. Układ nazywamy *asymptotycznie zwartym*, gdy istnieje zwarty podzbiór  $K \subset X$  taki, że dla dowolnego zbioru ograniczonego  $B \subset X$  zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} d(S_t(x), K) = 0.$$

Jeśli  $\dim X < \infty$ , to wszystkie kule domknięte są zbiorami zwartymi i za  $K$  można wziąć kulę domkniętą pochłaniającą wszystkie zbiory ograniczone. W ogólnym przypadku zachodzi podstawowe twierdzenie o istnieniu globalnego atraktora.

**Twierdzenie.** Jeżeli układ dynamiczny jest dyssypatywny i asymptotycznie zwarty, a  $B$  jest zbiorem pochłaniającym wszystkie zbiory ograniczone, to zbiór  $\omega(B)$  jest niepustym, zwartym i spójnym atraktorem globalnym układu.

Istnienie minimalnego atraktora globalnego wynika wtedy z wcześniejszych uwag.

W przykładach nieskończenie wymiarowych układów dyssypatywnych istniejące atraktory globalne zwykle nie tylko są zwarte, ale mają pewne własności skończenie wymiarowe. Zachowanie graniczne takiego układu sprowadza się do jego dynamiki na wspomnianym skończenie wymiarowym atraktorze. Nie będziemy tu wyjaśniać, co rozumiemy przez skończony wymiar atraktora (teoria wymiaru Hausdorffa albo wymiaru fraktalnego znajduje się w wielu podręcznikach, np. [6,7]). Często atraktor ten składa się wyłącznie z punktów stałych i trajektorii okresowych, ale czasami jego struktura jest bardzo złożona – tzw. dziwny atraktor.

## 5 Budowanie modelu

Różne zjawiska realne mogą być modelowane matematycznie. Zwykle chodzi o to, by móc przewidywać zmianę w czasie różnych wielkości na podstawie znajomości tych wielkości w chwili początkowej i praw rządzących tą ewolucją. Te ostatnie są równaniami zwykle różniczkowymi, ale także z opóźnionym argumentem, czy też różniczkowo-całkowymi. Problemem jest konstrukcja takich równań. W zasadzie tylko fizyka dysponuje ogólnymi modelami zjawisk. Procesy biologiczne czy społeczne są zbyt skomplikowane i w każdej sytuacji należy próbować takie równanie ewolucyjne ułożyć, pomijając czynniki naszym zdaniem nieistotne. To, czy nasz model jest adekwatny do rzeczywistości można później zbadać, porównując ewolucję wielkości realnych z przewidywaną przez model.

Ten proces prześledzimy teraz na przykładzie modelowania rozwoju pewnej populacji biologicznej.

Na początek założymy, że mamy jeden gatunek, nie uwzględniamy różnic między osobnikami starymi i młodymi i nie badamy rozmieszczenia osobników w przestrzeni. Tak więc zmieniającą się wielkością jest liczba osobników  $u$  zależna tylko od czasu. Oczywiście, funkcja  $t \mapsto u(t)$  jest realnie funkcją zmieniającą się skokowo (w chwilach narodzin nowych i śmierci starych osobników), ale gdy liczba osobników jest duża, wtedy przedziały, na których funkcja jest stała są bardzo krótkie, a zmiana wartości  $u$  o 1 jest bardzo niewielka w stosunku do wartości bezwzględnej  $u(t)$ . Na realnym wykresie widzimy więc funkcję ciągłą, a nawet gładką. W najprostszym przybliżeniu prędkość zmiany  $u$  czyli pochodna  $u'(t)$  zależy od liczby osobników w danej chwili  $u(t)$  – im ta ostatnia jest większa, tym większa jest prędkość – możemy przyjąć, że są to wielkości proporcjonalne:

$$u'(t) = ru(t).$$

Otrzymaliśmy najprostszy model ewolucji jednorodnej populacji – *model Malthusa*. Równanie to łatwo rozwiązać  $u(t) = u(t_0)e^{r(t-t_0)}$ . Populacja rośnie w czasie wykładniczo. Malthus wyrażał to nieco inaczej: jeśli ustalimy jednostkę czasu  $T$  i obliczymy  $u(t_0 + nT)$  dla kolejnych chwil, to otrzymamy

$$u(t_0 + nT) = u(t_0) (e^{rT})^n,$$

a więc ciąg geometryczny. W rzeczywistości współczynnik  $r$  nie jest znany, ale ten jakościowy opis nie zależy od  $r$ . Aby zbadać prawdziwość modelu np. dla populacji ludzkiej na Ziemi wystarczy wziąć oszacowaną liczbę jej mieszkańców w latach 1600, 1700, 1800, 1900, 2000:

lata	ludność w milionach
1600	205
1700	210
1800	280
1900	610
2000	6070

Otrzymany ciąg nie jest ściśle geometryczny, ale różnice nie są zbyt duże i być może odchylenia są spowodowane niewłaściwym oszacowaniem liczby mieszkańców w odległej przeszłości. Były czynione inne próby analizowania danych. Liczba ludności Londynu była znana dość dokładnie od dawna i dla tych danych J. Graunt zaobserwował wzrost geometryczny. Wzrost ten charakteryzuje się stałym okresem podwojenia liczby ludności. Wg danych Graunta (1662 r.) okres ten wynosi 64 lata. Gdyby dotyczyło to ludności całego globu, a wg biblistów data pojawienia się Adama i Ewy na Ziemi to 4000 lat p.n.e., to w roku tych analiz – 1662

– liczba ludności Ziemi wynosiłaby

$$2^{(1662+4000)/64} \approx 2,5 \cdot 10^{26}$$

co daje około 200 milionów ludzi na 1 cm<sup>2</sup>. Pokazuje to wszystkie niedostatki modelu Malthusa.

Pierwszy pomysł poprawienia modelu polega na uwzględnieniu pojemności środowiska. Jest to liczba osobników populacji, którą środowisko może „wyżywić” – oznaczmy ją przez  $a$ . Przypuszczamy, że jeśli  $u(t) < a$ , to funkcja  $u$  w chwili  $t$  nadal rośnie prawie proporcjonalnie do  $u(t)$ , ale tym wolniej im  $u(t)$  jest bliskie  $a$ . Jeśli  $u(t) > a$ , to funkcja  $u$  w chwili  $t$  maleje tym gwałtowniej, im większa jest różnica między  $u(t)$  i pojemnością  $a$ . W rezultacie dostajemy równanie

$$u'(t) = ru(t) \left(1 - \frac{u(t)}{a}\right)$$

zwane *równaniem logistycznym* (Verhulst 1845). Równanie to ma dwa rozwiązania stacjonarne  $u(t) \equiv 0$  i  $u(t) \equiv a$ . Wszystkie rozwiązania z warunkiem początkowym  $u(t_0) \in (0, a)$  są funkcjami rosnącymi z  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = a$ , a wszystkie rozwiązania z  $u(t_0) > a$  są malejące z tą samą granicą. Gdyby ten model był odpowiedni dla przewidywania liczby ludności Ziemi, to obecna liczba ponad 6 miliardów ludzi byłaby znacznie mniejsza od pojemności  $a$ , bowiem z wykresu danych wynika, że funkcja  $u$  jest nadal wypukła, natomiast z modelu  $u$  ma punkt przegięcia wtedy, gdy  $u = a/2$ .

Z powyższego wynika, że rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne przy  $t \rightarrow -\infty$ . Jednakże w wielu przypadkach obserwacje pokazują, że jest dokładnie odwrotnie: dla małej populacji początkowej liczba osobników maleje do 0 przy  $t \rightarrow +\infty$ . Aby model to uwzględnił należy prawą stronę równania pomnożyć przez czynnik zależny od  $u$  ujemny dla  $u = 0$ , ale dodatni dla nieco większych  $u$ . Dostajemy

$$u' = ru \left(1 - \frac{u}{a}\right) \left(\frac{u}{b} - 1\right),$$

gdzie  $0 < b < a$ . Tutaj pojawia się trzecie rozwiązanie stacjonarne  $u(t) \equiv b$ , a analizę zachowań wszystkich rozwiązań w zależności od początkowej liczby osobników łatwo przeprowadzić.

Można uwzględniać także inne efekty np. fakt, że osobniki mogą się rozmnażać po odpowiednim czasie znajduje odzwierciedlenie we wprowadzeniu opóźnienia do prawej strony równania, albo w podzieleniu populacji na grupy np. osobników niedojrzałych, osobników zdolnych do rozmnażania i osobników „starych”. Wtedy otrzymuje się układy równań różniczkowych zwyczajnych.

## 6 Budowanie modelu – ciąg dalszy

Zajmiemy się teraz modelem rozwoju populacji, ale z uwzględnieniem niejednorodnego rozłożenia jej w przestrzeni. Jeśli populacja zamieszkuje pewien obszar płaski  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , to znając funkcję gęstości rozkładu

$$\Omega \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in [0, \infty)$$

możemy znaleźć liczbę osobników na danym podobszarze  $V \subset \Omega$  w chwili  $t$ :

$$\int_V u(x, t) dx.$$

Prędkość zmiany tej liczby czyli jej pochodna względem  $t$  zależy od czynników opisanych w poprzednich modelach, tym razem jednak współczynniki  $r$ ,  $a$ , czy  $b$  mogą zależeć od  $x$  zatem dla obszaru  $V$  należy funkcję  $f$  – prawą stronę równania w poprzednich modelach scałkować względem  $x$  po  $V$ . Z drugiej strony zmiana liczby osobników w zbiorze  $V$  może się też odbywać przez migrację do i z tego zbioru. Jeżeli przez  $\vec{J}$  oznaczymy pole wektorowe prędkości zmiany  $u$ , to sumaryczna prędkość migracji do obszaru  $V$  w chwili  $t$  wynosi  $-\int_{\partial V} (\vec{J}, n) dS$ , gdzie  $n$  jest wektorem normalnym zewnętrznym do brzegu w danym punkcie – rzutujemy pole  $\vec{J}$  na kierunek prostopadły (składowa styczna pola nie wpływa na migrację); znak minus pochodzi stąd, że wzrost liczby osobników wewnątrz  $V$  następuje, gdy pole to jest skierowane do wewnątrz, a nie na zewnątrz, jak wektor  $n$ . W rezultacie

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x, t) dx = \int_V f dx - \int_{\partial V} (\vec{J}, n) dS.$$

Twierdzenie o dywergencji (Greena-Gaussa-Ostrogradskiego) zamienia tę ostatnią całkę na całkę z dywergencji pola  $\vec{J}$  po zbiorze  $V$ . Mamy więc równość całek

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = \int_V (f - \operatorname{div} \vec{J}) dx$$

i z dowolności  $V \subset \Omega$  zachodzi równość

$$u_t = f(x, u) - \operatorname{div} \vec{J}.$$

To tzw. równanie ciągłości pojawia się także w fizyce w wielu miejscach jednak z innymi funkcjami  $f$  zwykle nie zależącymi od  $u$ . Kluczowy jest teraz wybór postaci pola  $\vec{J}$ . W naszym przypadku można postulować, że pole to jest proporcjonalne do gradientu funkcji  $u$  z ujemnym współczynnikiem proporcjonalności. Jest bowiem jasne, że kierunkiem migracji jest kierunek, w którym  $u$  najszybciej maleje i szybkość tej migracji jest tym większa, im większa jest różnica gęstości rozkładu populacji w tym kierunku. Zatem

$$u_t = f(x, u) + \nu \operatorname{div} \nabla u.$$

Pozostaje tylko policzyć  $\operatorname{div} \nabla \vec{J} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$  i dostajemy równanie opisujące ewolucję układu:

$$u_t = \nu \Delta u + f(x, u).$$

Jest to nieliniowe równanie paraboliczne, które rozwiązujemy postulując pewien warunek brzegowy na brzegu  $\Omega$  i zadając początkową wartość rozkładu  $u((x, y), 0)$ . Są dwa naturalne wybory postulowanego warunku brzegowego. Jeżeli przyjmiemy, że nie następuje migracja populacji przez brzeg zbioru  $\Omega$ , to

$$\frac{\partial u}{\partial n}((x, y), t) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0,$$

a jeśli przyjmiemy, że na zewnątrz osobniki giną, to

$$u((x, y), t) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

Są to odpowiednio warunki Neumanna i Dirichleta. Wstawiając odpowiednie funkcje  $f$  otrzymamy różne równania:

$$f(x, u) = ru, \quad = ru\left(1 - \frac{u}{a}\right), \quad = ru\left(1 - \frac{a}{u}\right)\left(\frac{u}{b} - 1\right).$$

Można też zadawać bardziej wyrafinowaną postać dyfuzji. Można np. postulować, że ruch populacji odbywa się przez zadany sygnał chemiczny czy fizyczny – światło, pożywienie. Dostajemy tzw. *równanie chemotaksji*

$$u_t = f(u) - \operatorname{div}(u \cdot g(a) \cdot \nabla a).$$

Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły jednego gatunku; zwykle obok siebie występuje ich wiele. Jeśli gatunki nie oddziałują ze sobą (w przybliżeniu), to równania ich ewolucji są niezależne. Jeśli jednak jest inaczej, wówczas musimy rozpatrywać układy równań opisujących ich ewolucje. Równania te będą zawierały składnik modelujący interakcję między gatunkami. Przypuśćmy, że mamy dwa gatunki korzystające z tych samych zasobów środowiska (pożywienie, woda, tlen, światło i.t.d.). Jeśli budujemy model typu logistycznego i  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , oznaczają liczebność obu gatunków zależną od  $t$ , to przy ustalonej pojemności środowiska dla obu gatunków mamy

$$\begin{cases} u_1' = r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{a_1} - \frac{u_2}{a_2}\right) \\ u_2' = r_2 u_2 \left(1 - \frac{u_1}{b_1} - \frac{u_2}{b_2}\right), \end{cases}$$

gdzie  $a_i, b_i$ ,  $i = 1, 2$ , są współczynnikami dodatnimi.  $a_1$  oznacza tu pojemność środowiska dla gatunku pierwszego przy nieobecności drugiego,  $b_2$  pojemność dla drugiego gatunku, gdy pierwszy nie występuje, a współczynniki  $a_2$  i  $b_1$  nie mają tak oczywistej interpretacji i mierzą stopień oddziaływania między gatunkami.

Jeśli oba gatunki żyją w symbiozie (im więcej jednego, tym szybszy wzrost drugiego), wówczas ewolucję opisuje układ

$$\begin{cases} u'_1 = r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{a_1} + \frac{u_2}{a_2}\right) \\ u'_2 = r_2 u_2 \left(1 + \frac{u_1}{b_1} - \frac{u_2}{b_2}\right), \end{cases}$$

a jeśli jeden (pierwszy) jest drapieżnikiem odżywiającym się drugim, to

$$\begin{cases} u'_1 = r_1 u_1 (a_1 - a_2 u_2) \\ u'_2 = r_2 u_2 (b_1 u_1 - b_2). \end{cases}$$

Dla każdej z tych relacji między gatunkami można zbudować model uwzględniający migrację:

$$\begin{cases} (u_1)_t = \nu_1 \Delta u_1 + f_1(x, u_1, u_2) \\ (u_2)_t = \nu_2 \Delta u_2 + f_2(x, u_1, u_2). \end{cases}$$

Można też rozważać większą liczbę gatunków.

Takie same równania modelują reakcje chemiczne, a bardzo podobne procesy spalania. Odmienny jest kształt *równania Naviera-Stokesa* opisującego ruch cieczy (gazu). Jeśli przez  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  oznaczymy pole wektorowe prędkości zmieniające się w zależności od punktu  $x$  i czasu  $t$ , przez  $\varrho$  gęstość cieczy, przez  $p$  jej ciśnienie, a przez  $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$  pole sił zewnętrznych (np. siła grawitacji) – wszystkie te wielkości zależne od  $x, t$ , to równanie, które wyprowadza się z II prawa dynamiki Newtona ma postać:

$$\varrho(v_j)_t = \nu \Delta v_j - \varrho \sum_{i=1}^3 v_i (v_j)_{x_i} - p_{x_j} + F_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Przy założeniu nieściśliwości cieczy dochodzi do tego warunek

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

i ewentualne warunki brzegowe opisujące zachowanie pola prędkości na brzegu zbioru (naczynia), w którym przemieszcza się ciecz; zwykle są to warunki Dirichleta

$$\vec{v}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0.$$

Niewiadome są tu pole  $\vec{v}$  i ciśnienie  $p$ . Równanie Naviera-Stokesa jest nieporównanie trudniejsze od poprzednio wyprowadzonych, w tamtych bowiem nieliniowość dotyczyła tylko niewiadomych funkcji  $u_j$ , tu dotyczy pochodnych. Problemem jest więc nawet istnienie rozwiązania.

## 7 Analiza modelu

Przeanalizujemy teraz model dwóch konkurujących gatunków jednorodny przestrzennie, gdzie wybraliśmy jednostki tak, by uprościć rozważania:

$$\begin{cases} x'_1 = r_1 x_1 (1 - x_1 - a x_2) \\ x'_2 = r_2 x_2 (1 - b x_1 - x_2). \end{cases}$$

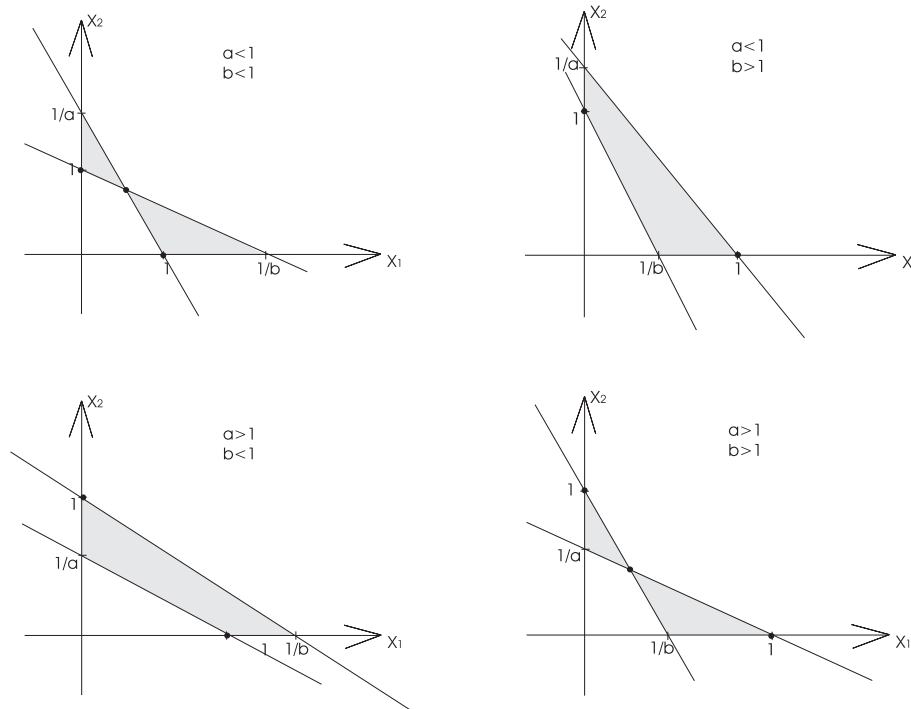
Mamy zbiór niezmienniczy – pierwszą ćwiartkę układu  $(x_1, x_2)$ . Jej niezmienniczość wynika z faktu, że trajektorie nie mogą się przecinać, a  $\{(x_1, 0) : x_1 > 0\}$ ,  $\{(0, x_2) : x_2 > 0\}$  są trajektoriami łatwymi do odgadnięcia. Z przyczyn naturalnych ograniczamy się do badania układu tylko na tym zbiorze – oznaczymy go przez  $X$ . Przyrównując do zera prawą stronę dostajemy punkty stałe; trzy z nich zawsze leżą w  $X$ :

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1).$$

Czwarty z nich – rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + a x_2 = 1 \\ b x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

może leżeć lub nie w  $X$  w zależności od współczynników  $a, b$ , co zobaczymy rysując proste opisane przez powyższe równania:



W pierwszym i czwartym przypadku  $P_3 = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab}\right)$  należy do  $X$ .

Przeprowadzamy analizę stabilności punktów stałych przez pierwsze przybliżenie. Jeśli prawą stronę równania różniczkowego oznaczyć przez  $f$ , to

$$f'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} r_1(1 - 2x_1 - ax_2), & -r_1ax_1 \\ -r_2bx_2, & r_2(1 - bx_1 - 2x_2) \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$f'(P_0) = \begin{bmatrix} r_1, & 0 \\ 0, & r_2 \end{bmatrix}$$

i ten punkt stały jest węzłem niestabilnym bez względu na  $a, b$ .

$$f'(P_1) = \begin{bmatrix} -r_1, & -ar_1 \\ 0, & r_2(1 - b) \end{bmatrix}$$

i punkt ten jest węzłem stabilnym, o ile  $b > 1$  i siodłem w przeciwnym razie;

$$f'(P_2) = \begin{bmatrix} r_1(1 - a), & 0 \\ -br_2, & -r_2 \end{bmatrix}$$

i punkt ten jest węzłem stabilnym, o ile  $a > 1$  i siodłem w przeciwnym razie. Wreszcie

$$f'(P_3) = f' \left( \frac{1 - a}{1 - ab}, \frac{1 - b}{1 - ab} \right) = \begin{bmatrix} r_1 \frac{a-1}{1-ab}, & r_1 a \frac{a-1}{1-ab} \\ r_2 b \frac{b-1}{1-ab}, & r_2 \frac{b-1}{1-ab} \end{bmatrix}.$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\lambda^2 - \frac{r_1(a-1) + r_2(b-1)}{1-ab} \lambda + r_1 r_2 \frac{(a-1)(b-1)}{1-ab} = 0.$$

W przypadku z pierwszego rysunku  $a < 1, b < 1$  ma ono postać  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  z  $p$  i  $q$  dodatnimi, więc części rzeczywiste obu pierwastków są ujemne i punkt  $P_3$  jest asymptotycznie stabilny, a w przypadku z czwartego rysunku  $a > 1, b > 1$  mamy w równaniu charakterystycznym  $p > 0$  i  $q < 0$ . Stąd

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$$

i  $P_3$  jest siodłem.

Sprawdzimy, że układ jest dyssypatywny. W tym celu weźmy funkcję  $U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  i policzmy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(S_t(x)) + \epsilon U(S_t(x)) &= U_{x_1} \cdot r_1 x_1 (1 + \epsilon - x_1 - ax_2) + U_{x_2} \cdot r_2 x_2 (1 + \epsilon - bx_1 - x_2) = \\ &= 2r_1 x_1^2 (1 + \epsilon - x_1 - ax_2) + 2r_2 x_2^2 (1 + \epsilon - bx_1 - x_2) \leq \\ &\leq 2 \sup\{r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 : x_1 + ax_2 \leq 1 + \epsilon, bx_1 + x_2 \leq 1 + \epsilon, x \in X\} =: \beta \end{aligned}$$



przy dowolnym  $\epsilon > 0$ . Zatem

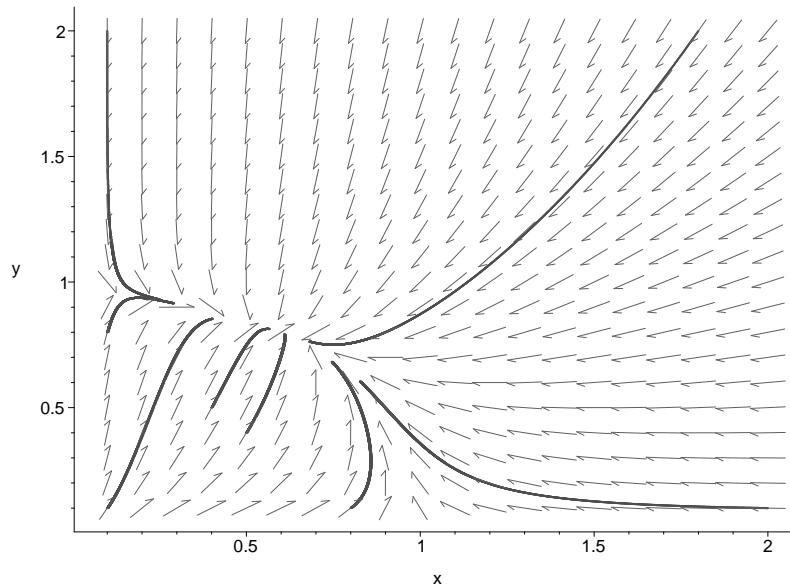
$$\frac{d}{dt}U(S_t(x)) \leq \beta$$

w zbiorze  $X$  i układ jest dyssypatywny. Wobec tego, że układ jest skończenie wymiarowy, istnieje globalny atraktor. Możemy też przewidzieć, że atraktor ten zawiera się w zbiorze zawartym między dwiema prostymi w  $X$  :

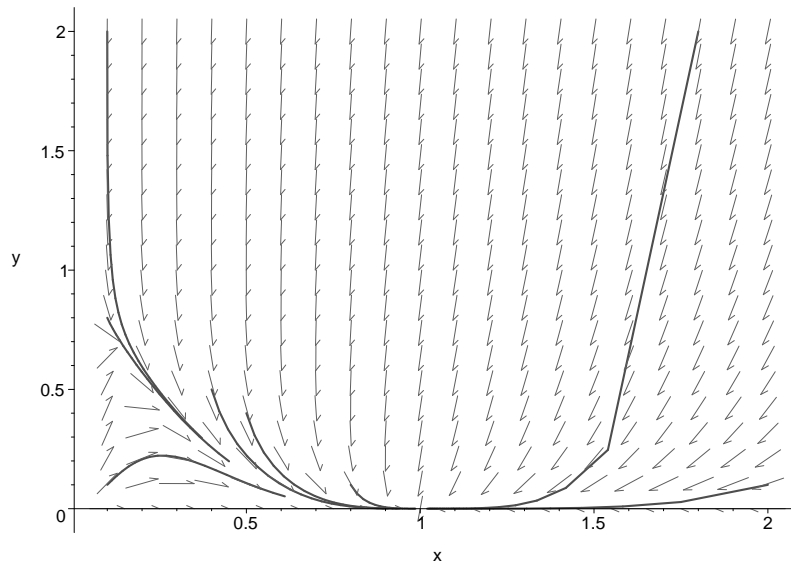
$$x_1 + ax_2 = 1, \quad bx_1 + x_2 = 1.$$

Zestawmy to z portretem fazowym otrzymanym przy pomocy MAPLE.

```
sys1:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-x(t)-1/2*y(t)),diff(y(t),t)=2*y(t)*(1-1/3*x(t)-y(t))
DEtools[phaseportrait]({sys1},[x(t),y(t)],t=0..3,[[x(0)=.1,y(0)=.1],
[x(0)=.8,y(0)=.1],[x(0)=.1,y(0)=.8],[x(0)=.4,y(0)=.5],[x(0)=.5,y(0)=.4],
[x(0)=1.8,y(0)=2],[x(0)=.1,y(0)=2],[x(0)=2,y(0)=.1]],linecolour=red);
```



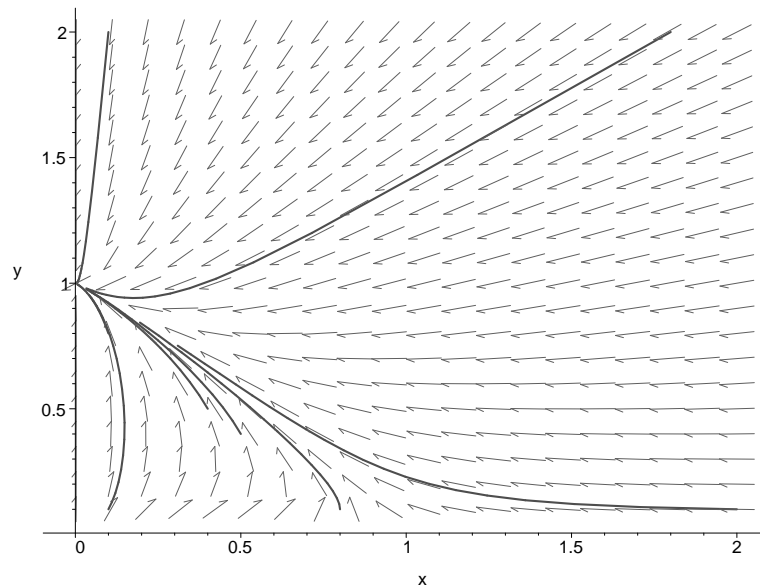
```
sys2:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-x(t)-1/2*y(t)),diff(y(t),t)=2*y(t)*(1-3*x(t)-y(t)):
DEtools[phaseportrait]({sys2},[x(t),y(t)],t=0..3,[[x(0)=.1,y(0)=.1],
[x(0)=.8,y(0)=.1],[x(0)=.1,y(0)=.8],[x(0)=.4,y(0)=.5],[x(0)=.5,y(0)=.4],
[x(0)=1.8,y(0)=2],[x(0)=.1,y(0)=2],[x(0)=2,y(0)=.1]],linecolour=red);
```



```

sys3:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-x(t)-2*y(t)),diff(y(t),t)=2*y(t)*(1-1/3*x(t)-y(t)):
DEtools[phaseportrait]({sys3},[x(t),y(t)],t=0..3,[[x(0)=.1,y(0)=.1],
[x(0)=.8,y(0)=.1],[x(0)=.1,y(0)=.8],[x(0)=.4,y(0)=.5],[x(0)=.5,y(0)=.4],
[x(0)=1.8,y(0)=2],[x(0)=.1,y(0)=2],[x(0)=2,y(0)=.1]],linecolour=red);

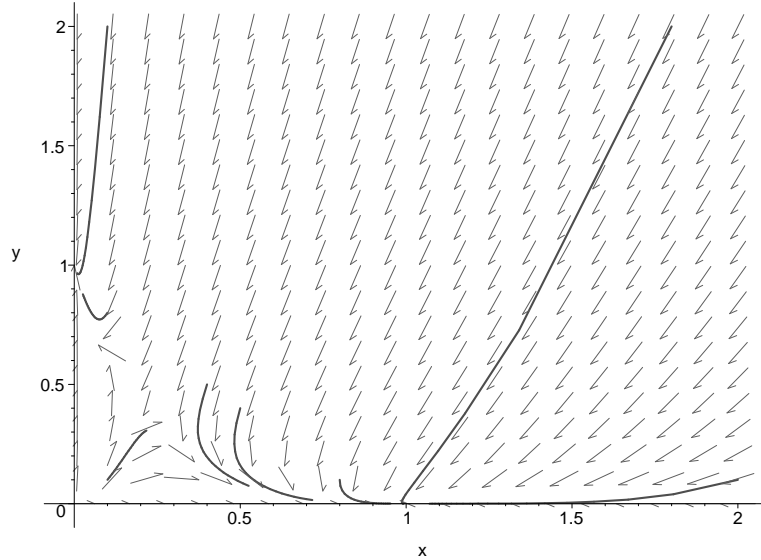
```



```

sys4:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-x(t)-2*y(t)),diff(y(t),t)=2*y(t)*(1-3*x(t)-y(t)):
DEtools[phaseportrait]({sys4},[x(t),y(t)],t=0..2,[[x(0)=.1,y(0)=.1],
[x(0)=.8,y(0)=.1],[x(0)=.1,y(0)=.8],[x(0)=.4,y(0)=.5],[x(0)=.5,y(0)=.4],
[x(0)=1.8,y(0)=2],[x(0)=.1,y(0)=2],[x(0)=2,y(0)=.1]],linecolour=red);

```



Widzimy, że gdy  $a$  i  $b$  są rozdzielone 1, to wszystkie rozwiązania dążą do jednego z punktów stałych  $P_1$  lub  $P_2$ . Oznacza to wyginięcie jednego z gatunków; pozostaje przy życiu gatunek wygrywający konkurencję. W pierwszym przypadku  $a, b < 1$  także mamy tę sytuację, ale który z gatunków przetrwa zależy od warunków początkowych. Najciekawszy jest ostatni przypadek, gdy  $a, b > 1$ . Plot z MAPLE nie pokazuje punktu stałego  $P_3$ , ale mamy dwie trajektorie dążące do tego punktu: jedna z nich startuje z otoczenia  $P_0$ , a druga z punktu o dużych  $x_1, x_2$ . Są też dwie trajektorie które dążą do  $P_3$  przy  $t \rightarrow -\infty$ . Jedna z nich dąży do  $P_1$ , a druga do  $P_2$  przy  $t \rightarrow +\infty$ . Pozostałe trajektorie dążą do  $P_1$  lub  $P_2$  w zależności od punktu startu. Widzimy więc, że bez względu na współczynniki typowa sytuacja przy konkurencji dwóch gatunków to wyginięcie jednego z nich. Dla większej liczby gatunków sytuacja nie jest już tak prosta; przy konkurencji między trzema gatunkami atraktor skład się także z trajektorii okresowych, a przy czterech i więcej staje się dziwnym atraktorem.

Analiza analogicznego układu parabolicznego

$$\begin{cases} u_t = \mu \Delta u + r_1 u(1 - u - av) \\ v_t = \nu \Delta v + r_2 v(1 - bu - v). \end{cases}$$

z warunkami Neumanna

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) = 0, \quad \text{dla } x \in \partial\Omega, t > 0,$$

nie jest już taka prosta. Niezmienniczość zbioru  $X$  funkcji ciągłych na  $\Omega$  przyjmujących wartości  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  przy czym  $u \geq 0, v \geq 0$ , oraz globalna

rozwiązalność zagadnienia przy dowolnym warunku początkowym

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = \psi(x) \geq 0$$

wynika teraz z odpowiedniej zasady maksimum dla równań parabolicznych. Dysypatywność układu pokazuje się podobnie, jak w przypadku równania różniczkowego zwyczajnego. Tym razem jednak układ jest nieskończenie wymiarowy i potrzebujemy jego asymptotycznej zwartości. Atraktor leży w zbiorze funkcji przyjmujących wartości w zbiorze zawartym między prostymi, o których wcześniej mówiliśmy. W istocie nadal wszystkie rozwiązania dążą do stacjonarnych. Wymaga to już jednak znajomości nowoczesnej matematyki (lata 90-te XX wieku).

## 8 Rozmaitości niezmiennicze

Wiele ważnych dla badania układów dynamicznych zbiorów ma strukturę rozmaitości, tzn. lokalnie są one dyfeomorficzne z przestrzeniami euklidesowymi  $\mathbb{R}^m$ . Chociaż istnieją pewne rezultaty (uogólnienia) dla przypadku nieskończenie wymiarowego ograniczymy się do przypadku równań autonomicznych w  $\mathbb{R}^k$

$$x' = f(x)$$

w otoczeniu punktu stałego  $x_0$  czyli takiego, że  $f(x_0) = 0$ . Niech  $f : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie klasy  $C^r$ ,  $r > 1$ , i niech wszystkie rozwiązania równania będą określone na  $\mathbb{R}$ . Wtedy równanie określa układ dynamiczny  $S_t : U \rightarrow U$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Mamy dwa zbiory niezmiennicze

$$W^s(x_0) := \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} S_t(x) = x_0\},$$

$$W^u(x_0) := \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} S_t(x) = x_0\},$$

zwane odpowiednio rozmaitością stabilną i niestabilną punktu  $x_0$ . Niezmienniczość tych zbiorów jest łatwa do udowodnienia, nie zawsze jednak oba zbiory są rozmaitościami. Decydujące znaczenie ma widmo operatora liniowego  $f'(x_0)$ , czyli zbiór jego wartości własnych, czyli zbiór pierwiastków wielomianu charakterystycznego

$$Q(\lambda) := \det(f'(x_0) - \lambda I)$$

$I$  – macierz jednostkowa. Rozważamy tu wszystkie zespolone pierwiastki tego wielomianu, a punkt stały  $x_0$  nazywamy *hiperbolicznym*, jeśli żadna z wartości własnych nie leży na osi urojonej  $\{ic : c \in \mathbb{R}\}$ . Jeśli punkt  $x_0$  jest hiperbolicznym punktem stałym, wówczas przestrzeń  $\mathbb{R}^k$  rozkłada się na sumę prostą dwóch podprzestrzeni liniowych

$$\mathbb{R}^k = X_+ \oplus X_-,$$

obie te podprzestrzenie są niezmiennicze dla  $f'(x_0)$  :

$$f'(x_0)(X_+) \subset X_+, \quad f'(x_0)(X_-) \subset X_-,$$

wreszcie wartościami własnymi  $f'(x_0)|_{X_+}$  są te wartości własne  $f'(x_0)$ , których części rzeczywiste są dodatnie, a wartościami własnymi  $f'(x_0)|_{X_-}$  są te wartości własne  $f'(x_0)$ , których części rzeczywiste są ujemne. Ten rozkład jest konsekwencją twierdzenia spektralnego (por. [1]). Ponieważ odwzorowanie liniowe  $f'(x_0)$  przybliża w otoczeniu punktu  $x_0$  odwzorowanie  $f$ , wydaje się możliwe, że zachowanie układu nieliniowego w otoczeniu tego punktu stałego jest podobne do zachowania układu liniowego

$$y' = f'(x_0) \cdot y$$

w otoczeniu zera. To ostatnie łatwo wyznaczyć zapisując  $y \in \mathbb{R}^k$  w postaci  $y = (y_+, y_-) \in X_+ \times X_-$ ,  $f'(x_0)|_{X_+} = A_+$ ,  $f'(x_0)|_{X_-} = A_-$  i układ liniowy jako parę niezależnych równań liniowych o stałych współczynnikach

$$y'_+ = A_+ y_+, \quad y'_- = A_- y_-.$$

Ponieważ wartości własne  $A_-$  mają ujemne części rzeczywiste rozwiązania drugiego z równań dążą wykładniczo do zera przy  $t \rightarrow +\infty$  :

$$|y_-(t)| \leq C e^{-\alpha t}, \quad \text{dla } t \geq 0$$

i symetrycznie dla pierwszego równania

$$|y_+(t)| \leq C e^{-\alpha t}, \quad \text{dla } t \leq 0.$$

Daje to wielowymiarowy portret fazowy całości odpowiadający punktowi siodłowemu na płaszczyźnie (por. wykład z równań różniczkowych zwyczajnych). Rzeczywiście dla układu nieliniowego mamy podobny obraz w otoczeniu punktu  $x_0$ . Dokładniej zachodzi

**Twierdzenie o rozmaitości stabilnej i niestabilnej.** Niech  $f \in C^r$ ,  $r > 1$  i  $x_0$  będzie hiperbolicznym punktem stałym układu  $x' = f(x)$ . Wówczas istnieje otoczenie  $V$  punktu  $x_0$ , dla którego zbiory

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) := \{x \in V : S_t(x) \in V \text{ dla } t \geq 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) := \{x \in V : S_t(x) \in V \text{ dla } t \leq 0\}$$

są rozmaitościami (hiperpowierzchniami) klasy  $C^{r-1}$ , przy czym przestrzeniami stycznymi do nich w punkcie  $x_0$  są

$$T_{x_0}(W_{\text{loc}}^s(x_0)) = X_-, \quad T_{x_0}(W_{\text{loc}}^u(x_0)) = X_+.$$

Ponieważ przestrzenie liniowe  $X_{\pm}$  łatwo znaleźć, twierdzenie to pozwala zlokalizować kierunki wzdłuż których trajektorie zbliżają się do i oddalają od  $x_0$  przy  $t \rightarrow +\infty$ . Często popełnia się błąd pisząc, że

$W_{\text{loc}}^s(x_0) = W^s(x_0) \cap V$  i  $W_{\text{loc}}^u(x_0) = W^u(x_0) \cap V$ . Tak być nie musi co pokazuje

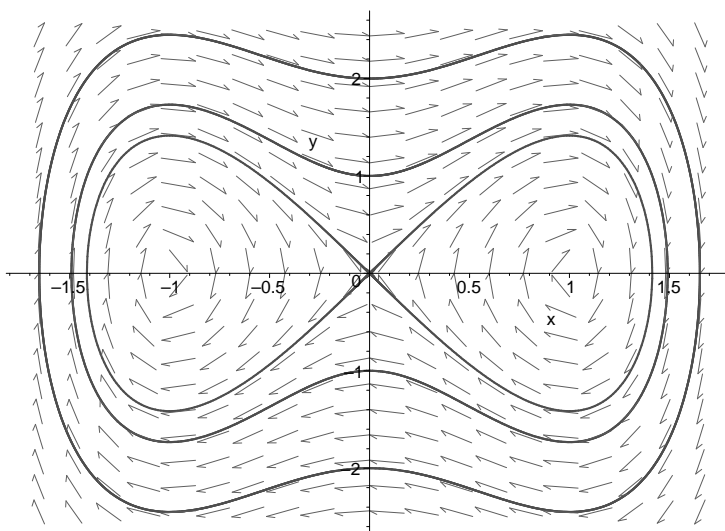
Przykład.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x - 4x^3. \end{cases}$$

Ponieważ jest to układ odpowiadający układowi zachowawczemu z jednym stopniem swobody, jego całką pierwszą jest energia całkowita

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2x^2 + x^4$$

i znajomość jej poziomic wyznacza trajektorie



Widzimy, że dla hiperbolicznego punktu stałego 0 rozmaitości stabilna i niestabilna pokrywają się, podczas gdy  $W_{\text{loc}}^s(0)$  jest „kawałkiem ósemki” nachylonym pod kątem rozwartym do dodatniej półosi  $OX$ , a  $W_{\text{loc}}^u(0)$  jest „kawałkiem ósemki” nachylonym pod kątem ostrym do dodatniej półosi  $OX$ .

## 9 Bifurkacje

Zwykle układy dynamiczne zależą od jednego lub wielu parametrów, które występują najczęściej w równaniu ewolucyjnym je opisującym np. układ Verhulsta  $u' = ru(1 - u/a)$  zależy od  $r$  i  $a$ , układ konkurencyjny

$$\begin{cases} u_t = \mu \Delta u + r_1 u(1 - u - av) \\ v_t = \nu \Delta v + r_2 v(1 - bu - v) \end{cases}$$

zależy od wsp. dyfuzji  $\mu, \nu$ , oraz  $r_{1,2}, a, b$ . Pojawia się pytanie, w jaki sposób dynamika układu zależy od tych parametrów. Zwykle mała zmiana

wartości parametrów powoduje małą zmianę zachowania układu. Pozostają jednak takie szczególne wartości parametrów, przy przejściu przez które następuje jakościowa zmiana dynamiki układu. Mówimy wtedy o bifurkacji. Aby można było mówić o zmianie jakościowej, należy wyjaśnić w jakiej sytuacji tej zmiany nie ma. Mówimy, że dwa układy dynamiczne z czasem ciągłym  $S_t, t \geq 0$ , w  $X$  i  $T_t, t \geq 0$ , w  $Y$  są *topologicznie równoważne*, jeśli istnieje homeomorfizm  $h : X \rightarrow Y$  taki, że dla każdego  $x \in X$  istnieje rosnący homeomorfizm  $\sigma_x : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o własności

$$h(S_t(x)) = T_{\sigma_x(t)}(h(x)).$$

Oznacza to, że homeomorfizm  $h$  przekształca półtrajektorie dodatnie pierwszego układu na półtrajektorie dodatnie drugiego i to z zachowaniem kierunku poruszania się. Łatwo sprawdzić, że obrazami całych trajektorii są całe trajektorie, że punkty stałe przechodzą na punkty stałe, trajektorie okresowe na trajektorie okresowe, zbiory niezmiennicze (odp. dodatnio, ujemnie niezmiennicze) na zbiory niezmiennicze (odp. dodatnio, ujemnie niezmiennicze). Wreszcie

$$h(\omega(x)) = \omega(h(x)), \quad h(\alpha(x)) = \alpha(h(x)),$$

układ topologicznie równoważny z dyssypatywnym jest dyssypatywny oraz jeśli  $A$  jest atraktorem globalnym (odp. minimalnym atraktorem globalnym) dla  $S_t$ , to  $h(A)$  jest atraktorem globalnym (odp. minimalnym atraktorem globalnym) dla  $T_t$ . Relacja topologicznej równoważności jest relacją równoważności tzn. dzieli klasę wszystkich układów dynamicznych na parami rozłączne klasy abstrakcji.

Niech  $S_t(\mu), t \geq 0$ , będzie rodziną układów dynamicznych zależną od parametru  $\mu \in \mathbb{R}$ . Mówimy, że dla wartości  $\mu_0$  ma miejsce *bifurkacja*, jeśli dla pewnego ciągu  $c_n \rightarrow 0$  układy z  $\mu_n = \mu_0 + c_n$  nie są topologicznie równoważne z układem z  $\mu_0$ . Zobaczmy, jak działa ta definicja na przykładach.

**Przykład 1.** Rozważmy równanie logistyczne (odpowiednio dla prostoty przeskalowane) z poprawką opisującą zjawisko „żniw”:

$$x' = x(1 - x) - \mu.$$

Jest to dynamika rozwoju populacji, której stała część stanowi pożywienie innego gatunku. Nie jest to jednak układ drapieżnik-ofiara, bowiem tutaj gatunek zbierający plony jest świadomy niebezpieczeństwa wyginięcia swojego pokarmu i „umie liczyć”. Najłatwiej zbadać, jak od  $\mu$  zależą punkty stałe układu:

$$x(1-x)-\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( \mu < \frac{1}{4} \text{ i } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2} \text{ lub } \mu = \frac{1}{4} \text{ i } x = \frac{1}{2} \right).$$

Zatem dla  $\mu < 1/4$  są dwa punkty stałe, a dla  $\mu > 1/4$  ich wcale nie ma. Ponieważ w homeomorfizmie opisującym topologiczną równoważność punkty

stałe przechodzą na punkty stałe, więc układy z  $\mu < 1/4$  i  $\mu > 1/4$  nie mogą być topologicznie równoważne. Tym samym  $\mu = 1/4$  jest punktem bifurkacji. Aby stwierdzić, że nie ma innych punktów bifurkacji wystarczy zauważyć, że wszystkie układy z  $\mu < 1/4$  są do siebie topologicznie równoważne i to samo dla układów z  $\mu > 1/4$ . Niech  $\mu, \nu < 1/4$ . Układy dla tych wartości parametru mają po pięć trajektorii: po dwa punkty stałe, po jednej trajektorii ograniczonej wychodzącej z mniejszego punktu stałego i wchodzącej do większego, po jednej trajektorii wychodzącej z mniejszego punktu stałego i dążącej do  $-\infty$  oraz po jednej trajektorii wychodzącej z  $+\infty$  i wchodzącej do większego punktu stałego. Jako homeomorfizm  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wystarczy wziąć funkcję

$$h(x) = \begin{cases} x_1(\nu) & \text{gdy } x = x_1(\mu) \\ x_2(\nu) & \text{gdy } x = x_2(\mu) \\ S_t(\nu)(1) & \text{gdy } x = S_t(\mu)(1) \\ S_t(\nu)(\alpha) & \text{gdy } x = S_t(\mu)(\alpha) \\ S_t(\nu)(\beta) & \text{gdy } x = S_t(\mu)(\beta) \end{cases}$$

gdzie  $\alpha < x_1(\mu)$  i  $\beta > x_2(\mu)$ . Analogiczne, choć prostsze rozważania należy przeprowadzić dla  $\mu, \nu > 1/4$ .

Bifurkacja, która miała miejsce w tym przykładzie nosi nazwę *bifurkacji siodło-węzeł*. Ma ona miejsce, gdy przy zmianie parametru dwa punkty stałe „zlewają się ze sobą” i znikają. W jednym wymiarze zachodzi to, gdy jeden z nich jest odpychający, a drugi przyciągający. Bifurkacja siodło-węzeł występuje także w wielu wymiarach np. na płaszczyźnie, gdy „zlewa się” węzeł z siodłem – stąd jej nazwa.

**Przykład 2.** Rozważmy równanie 1-wymiarowe

$$x' = x(x^2 - \mu).$$

Dla  $\mu \leq 0$  jedynym punktem stałym jest  $x_0 = 0$ , jest on odpychający. Dla  $\mu > 0$  pojawiają się dwa dodatkowe punkty stałe  $x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$ , oba są odpychające, ale  $x_0$  staje się przyciągający. Jest jasne, że dla  $\mu = 0$  ma miejsce bifurkacja. Tak samo, jak w poprzednim przykładzie pokazuje się, że innych punktów bifurkacji tu nie ma. Bifurkacja tego rodzaju, gdy z jednego punktu stałego powstają nowe i zmienia się charakter stabilnościowy tego punktu nazywa się *bifurkacją widelcową*. W wielu wymiarach zmiana charakteru punktu stałego polega na zmianie liczby wartości własnych w pierwszym przybliżeniu o dodatnich (ujemnych) częściach rzeczywistych.

Następny rodzaj bifurkacji występuje dopiero w conajmniej dwóch wymiarach. Oznaczmy przez  $Sp A$  zbiór wartości własnych macierzy (operatora liniowego)  $A$ .

**Twierdzenie o bifurkacji Hopfa.** Niech

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad \mu \in \mathbb{R},$$



gdzie  $f$  jest klasy  $C^2$  i  $f(0, \mu) = 0$ . Oznaczmy przez  $A_\mu$  macierz Jacobiego  $f'_x(0, \mu)$ . Jeżeli  $\pm i\omega_0 \in \text{Sp } A_{\mu_0}$  dla pewnego  $\omega_0 > 0$  są jednokrotne i  $n i\omega_0 \notin \text{Sp } A_{\mu_0}$  dla  $n \in \mathbb{Z}$  oraz istnieją funkcje rzeczywiste klasy  $C^1$   $\alpha, \beta$  zmiennej  $\mu$  określone w otoczeniu  $\mu_0$  takie, że

$$\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \in \text{Sp } A_\mu,$$

$\alpha(\mu_0) = 0$ ,  $\beta(\mu_0) = \omega_0$  i  $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ , to istnieje otoczenie  $0 \in \mathbb{R}$  i trzy funkcje ciągle określone na tym otoczeniu

$$s \mapsto \omega(s) \in \mathbb{R}, \quad s \mapsto \mu(s) \in \mathbb{R}, \quad s \mapsto \varphi_s \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$$

takie, że  $\varphi_s$  jest  $\frac{2\pi}{\omega(s)}$ -okresowym rozwiązaniem równania z  $\mu = \mu(s)$  i

$$\lim_{s \rightarrow 0} \omega(s) = \omega_0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \mu(s) = \mu_0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s = 0.$$

### Przykład 3.

$$x' = \mu x + y - xy^2, \quad y' = -x + \mu y - y^3.$$

$$A_\mu = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

skąd dostajemy wartości własne – pierwiastki wielomianu charakterystycznego  $\lambda \mapsto (\mu - \lambda)^2 + 1$ , czyli  $\lambda(\mu) = \mu \pm i$ . Możemy więc wziąć  $\mu_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 1$ . Ponieważ  $\alpha(\mu) = \mu$ , więc  $\alpha'(0) = 1$  i na podstawie tw. o bifurkacji Hopfa układ ma nietrywialne rozwiązania okresowe dla dostatecznie małych:  $\mu > 0$  lub  $\mu < 0$ . Z drugiej strony obliczając dywergencję prawej strony układu  $\text{div } f = 2\mu - 4y^2$  otrzymujemy, że dla  $\mu < 0$  jest ona stałego znaku i na mocy kryterium Bendixsona:

*Jeżeli dla ukła  $du$  na płaszczyźnie  $x' = f(x)$  z  $f \in C^1$ , mamy  $\text{div } f$  jest stałego znaku w jednospójnym zbiorze  $U$ , to układ nie ma w zbiorze  $U$  trajektorii okresowych;*

trajektorii okresowych być nie może. Zatem występują one dla  $\mu > 0$ . Dla takich  $\mu$  punkt stały jest ogniskiem niestabilnym. Możemy jeszcze ocenić przybliżoną wartość okresu takich rozwiązań –  $2\pi$  (przybliżenie tym lepsze, im mniejsza wartość  $\mu$ ).

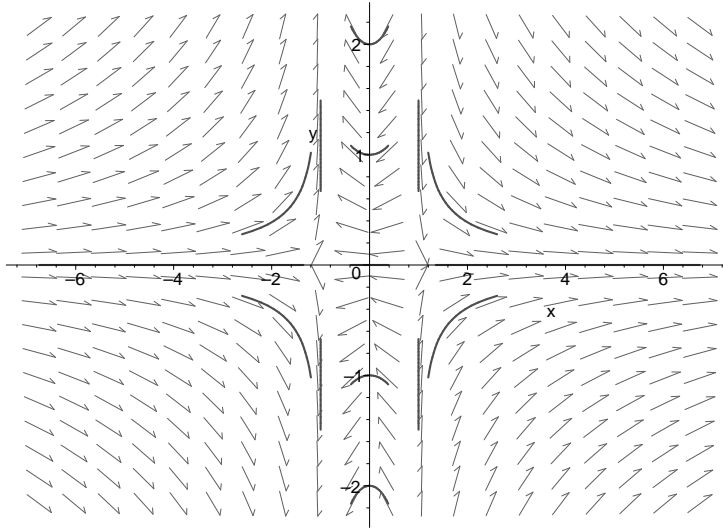
**Przykład 4.** Zbadamy teraz układ 2-wymiarowy:

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy + \max(\mu, 0)(x^2 - 1). \end{cases}$$

Dla  $\mu \leq 0$  mamy

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy, \end{cases}$$

którego portret fazowy wygląda następująco



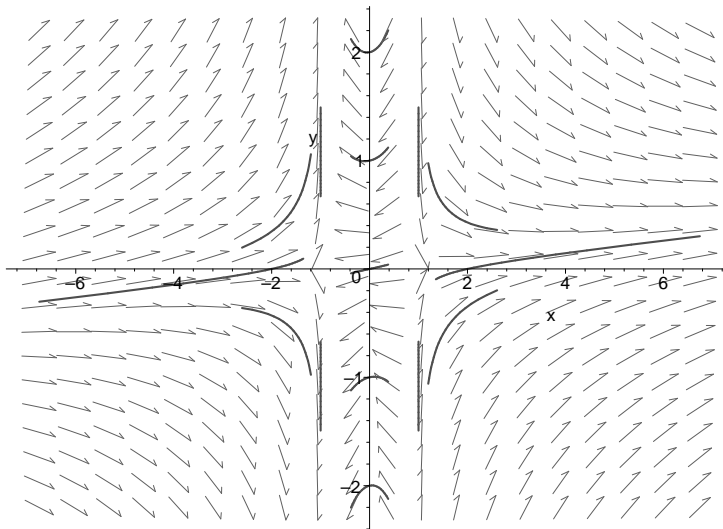
Tutaj

```

sys5:=diff(x(t),t)=x(t)^2-1,diff(y(t),t)=-x(t)*y(t)+mu*(x(t)^2-1):
DEtools[DEplot]({sys5},[x(t),y(t)],t=-.4..0.4,[[x(0)=1,y(0)=1],
[x(0)=1,y(0)=-1],[x(0)=-1,y(0)=1],[x(0)=-1,y(0)=-1],[x(0)=0,y(0)=0],
[x(0)=0,y(0)=2],[x(0)=0,y(0)=-2],[x(0)=2,y(0)=0],[x(0)=-2,y(0)=0],
[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=0,y(0)=-1],[x(0)=1.5,y(0)=.6],[x(0)=1.5,y(0)=-0.6],
[x(0)=-1.5,y(0)=.6],[x(0)=-1.5,y(0)=-.6]],linecolour=red);

```

W szczególności mamy trajektorię heterokliniczną łączącą dwa punkty siodłowe  $(\pm 1, 0)$ . Dla  $\mu > 0$  tej trajektorii już nie ma chociaż oba punkty stałe pozostały i nadal są siodłami.



Tutaj wykonano to samo polecenie z  $\mu = 0, 1$ . Przy ewentualnym homeomorfizmie określającym topologiczną równoważność siodła przejdą więc na siebie i trajektoria łącząca te siodła powinna przejść na taką samą w drugim portrecie fazowym, a tej drugiej nie ma. W punkcie  $\mu = 0$  ma więc miejsce bifurkacja – tzw. *bifurkacja heterokliniczna*.

Istnieją inne rodzaje bifurkacji. W szczególności taka, w której mamy trajektorię homokliniczną dla pewnej wartości parametru i w punkcie bifurkacji ulega ona rozerwaniu. Ten rodzaj nosi nazwę *bifurkacji homoklinicznej* i jest podstawą jednego ze scenariuszy przejścia do chaosu: w wyniku ciągu bifurkacji homoklinicznych układ staje się chaotyczny.

## 10 Odwzorowanie Poincaré

Niech  $S_t, t \geq 0$ , będzie układem dynamicznym z czasem ciągłym w przestrzeni  $X$ . Możemy dla niego zbudować układ z czasem dyskretnym na dwa sposoby.

Pierwszy z nich polega na tym, że ustalamy  $T > 0$  i bierzemy  $V_1 := S_T$ ; wtedy  $V_n = V_1^n$  ( $n$ -krotne złożenie) i  $V_n = S_{nT}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Jeżeli  $S_{t_0}$  jest homeomorfizmem dla pewnego  $t_0$ , to  $V_1$  jest taki i mamy  $V_n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ . Dynamika układu dyskretnego dostarcza pewnych informacji o dynamice układu  $S_t$ , ale nie wszystkich. Przykładowo:

- 1) Punkty stałe  $V_1$  mogą być punktami stałymi  $S_t$ , ale też trajektoriami okresowymi o okresie  $T$ , punkty okresowe  $V_1$ , których okres podstawowy  $n$  jest  $> 1$  są już na pewno trajektoriami okresowymi  $S_t$  o okresie  $nT$ .
- 2) Zbiory niezmiennicze  $V_1$  są podzbiórmi zbiorów niezmienniczych dla  $S_t$  i to podzbiórmi właściwymi poza trywialnymi przypadkami zbiorów złożonych z samych punktów stałych  $S_t$ . To samo dotyczy półtrajektorii dodatnich i ujemnych. To jest oczywiste wobec faktu, że trajektoria układu ciągłego jest zbiorem spójnym (nawet łukowo spójnym) z samej definicji.
- 3) To samo można powiedzieć o zbiorach granicznych  $\omega(x)$  i  $\alpha(x)$  dla  $V_1$  i  $S_t$ .
- 4) Jeśli  $S_t$  jest dyssypatywny, to taki sam jest  $V_1$ . Jeśli  $S_t$  posiada zwarty atraktor globalny  $A$ , to  $V_1$  także posiada taki atraktor  $A' \subset A$ . To samo można powiedzieć o minimalnym globalnym atraktorze. W zastosowaniach często  $A' = A$  i atraktor ten jest topologicznie tranzytywny tzn. dla dwóch dowolnie małych kul  $K(x_0, \varepsilon), K(y_0, \eta)$ , istnieje  $t > 0$  ( $n > 0$ ) takie, że

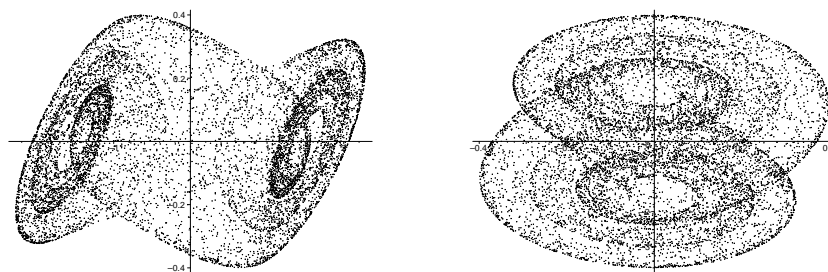
$$S_t(K(x_0, \varepsilon)) \cap K(y_0, \eta) \neq \emptyset$$

$$(V_n(K(x_0, \varepsilon)) \cap K(y_0, \eta) \neq \emptyset).$$

- 5) Jeżeli  $S_t$  posiada trajektorię okresową o okresie innym niż  $T$ , to układ dyskretny  $V_n$  jej bezpośrednio nie wskaże. Z drugiej jednak strony pojawi się ona jako zbiór niezmienniczy dla  $V_1$  homeomorficzny z okręgiem. W ten sposób mimo wszystko zostanie wykryta.

W praktyce często nie umiemy badać układu  $S_t$  bezpośrednio i posługujemy się opisany wyżej układem dyskretnym. Gdy  $X$  jest przestrzenią skończenie wymiarową, a układ jest dyssypatywny pozwala to otrzymać obraz przybliżony dynamiki układu. Wystarczy w zbiorze pochłaniającym, który zawiera atraktor  $A$  wybrać skończoną liczbę punktów leżących dostatecznie gęsto, a następnie obliczyć wartości przybliżone  $V_1$  na tych punktach. Przedstawienie obrazów tych punktów (lub ich rzutów na dowolną podprzestrzeń dwuwymiarową) oglądane na ekranie komputera tworzy coś, co w literaturze technicznej nazywa się *mapą Poincaré*. Daje to wyobrażenie o strukturze atraktora. W szczególności tak zaobserwowano strukturę fraktalną wielu atraktorów. Poniżej prezentujemy mapę Poincaré dla układu Chua:

$$\begin{cases} x' = 15(y - 12/7x + 3(|x + 1| - |x - 1|)/14) \\ y' = x - y + z \\ z' = -25.58y \end{cases}$$



Dokładniej: są to rzuty na płaszczyzny  $[X, Y]$  – pierwszy rysunek i  $[Y, Z]$  – drugi – tego obrazu.

Druga możliwość uzyskania namiastki dyskretnego układu z czasem ciągłym  $S_t$  polega na wyborze w przestrzeni  $X$  tzw. cięcia transwersalnego  $\Gamma$ . Wymaga to założenia o strukturze przestrzeni  $X$  np.  $X$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^k$ , i o strukturze samego układu np.  $\mathbb{R} \ni t \mapsto S_t(x) \in X$  jest klasy  $C^1$  dla dowolnego  $x \in X$ . Tak więc przy powyższych założeniach podzbiór  $\Gamma \subset X$  nazywamy *cięciem transwersalnym*, jeśli jest hiperpowierzchnią  $k - 1$ -wymiarową klasy  $C^1$  i dla każdego  $x \in \Gamma$  wektor  $\frac{d}{dt}S_t(x)$  nie jest styczny do  $\Gamma$  w punkcie  $x$ .

Założmy, że dana jest takie cięcie transwersalne  $\Gamma$ . Jeżeli dla pewnego  $x \in \Gamma$  istnieje  $t_x > 0$  takie, że  $S_{t_x}(x) \in \Gamma$ , to wśród wszystkich takich  $t_x > 0$  mamy element najmniejszy i dla niego kładziemy

$$P(x) = S_{t_x}(x).$$

Zbiór wszystkich  $x$ , dla których w ten sposób określiliśmy  $P(x)$  jest otwartym podzbiorem  $\Gamma$  – oznaczmy go  $U$ . Mamy więc odwzorowanie  $P : U \rightarrow \Gamma$ , które okazuje się być ciągłe, a gdy hiperpowierzchnia  $\Gamma$  i odwzorowania  $t \mapsto S_t(x)$  są klasy  $C^p$ , to jest ono klasy  $C^{p-1}$ . Nazywamy je *odwzorowaniem Poincaré* (albo pierwszego powrotu). Zauważmy, że

w stosunku do poprzedniej metody dyskretyzacji układu ciągłego  $S_t$  tym razem wymiar układu dyskretnego jest o 1 mniejszy od wymiaru przestrzeni  $X$ . Dla układów nieskończenie wymiarowych jest to bez znaczenia, ale dla układów w niskich wymiarach np. 2, 3 jest to ogromne uproszczenie. W szczególności dla  $\dim X = 2$  cięcia transwersalne są krzywymi i odwzorowanie Poincaré (po złożeniu z rzutem krzywej na odcinek) można obrazować jako  $P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Badania dyskretnych 1-wymiarowych układów dynamicznych stanowiły początek ścisłego badania dynamiki chaotycznej (por. wykład Jacka Rogowskiego „Chaos deterministyczny i fraktale z zastosowaniami” lub [3,4]).

Odwzorowanie Poincaré dostarcza informacji o trajektoriach okresowych. Jeżeli  $P(x_0) = x_0$  (czyli  $x_0$  jest punktem stałym odwzorowania Poincaré), to trajektoria tego punktu jest okresowa (z okresem podstawowym – czasem pierwszego powrotu). Odwrotnie, jeśli  $\Gamma$  przecina jakąś trajektorię okresową w punkcie  $x_0$ , to jest on punktem stałym odwzorowania Poincaré. Badanie pochodnej tego odwzorowania w punkcie  $x_0$  dostarcza też informacji o stabilności tej trajektorii okresowej. Jeżeli wartości własne  $P'(x_0)$  mają moduły  $< 1$ , to dla  $x \in \Gamma$  bliskich  $x_0$  mamy  $P^n(x) \rightarrow x_0$ , co oznacza, że trajektorie bliskie trajektorii okresowej zблиżają się do niej przy  $t \rightarrow +\infty$ .

Odwzorowanie Poincaré jest homeomorfizmem podzbioru  $U$  na inny podzbiór otwarty  $\Gamma$ . Dla układów 2-wymiarowych, gdy  $\Gamma$  ma wymiar 1, po złożeniu z homeomorfizmami rzutującymi  $U$  i  $P(U)$  na odcinki prostej,  $P$  musi więc być odwzorowaniem monotonicznym. To jest kluczowy punkt dowodu tw. Poincaré-Bendixsona (por. wykłady z równań różniczkowych zwyczajnych).

Oczywiście możliwe są różne wybory cięcia transwersalnego  $\Gamma$ . Dla niektórych z nich dziedzina odwzorowania Poincaré jest zbiorem pustym. Dla pozostałych powstaje pytanie jak mają się do siebie otrzymane w ten sposób różne dyskretne układy dynamiczne. Okazuje się, że dla bliskich cięć transwersalnych odwzorowanie Poincaré są topologicznie równoważne. Dla dyskretnych układów dynamicznych danych przez  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  definicja jest bardzo prosta: układy są *topologicznie równoważne*, gdy istnieje homeomorfizm  $h : X \rightarrow Y$  taki, że

$$h \circ f = g \circ h.$$

## 11 Przesunięcie Bernoulliego i dynamika symboliczna

Podamy teraz modelowy przykład dyskretnego układu dynamicznego o bardzo złożonej dynamice – przesunięcie Bernoulliego. Przestrzenią me-

tryczną  $X$  jest dla niego zbiór ciągów o wyrazach 0 lub 1 :

$$\Sigma_2 := \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}} : s_n = 0 \text{ lub } s_n = 1 \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}$$

z metryką

$$d((s_n)_n, (t_n)_n) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |s_n - t_n|.$$

Ta na pozór skomplikowana metryka wyznacza po prostu topologię zbieżności po współrzędnych w przestrzeni  $\Sigma_2$  tzn.

$$(s_n^{(k)})_n \longrightarrow (s_n)_n \quad \text{przy } k \rightarrow \infty \quad \iff \lim_{k \rightarrow \infty} s_n^{(k)} = s_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Z kolei zbieżność ciągu zero-jedynkowego oznacza, że jego wyrazy począwszy od pewnego indeksu  $k$  są takie same. Metryka ta ma pewną ciekawą własność:

$$\text{jeżeli } s_n = t_n \text{ dla } n = 0, 1, \dots, m, \text{ to } d((s_n), (t_n)) \leq 2^{-m}$$

i prawie odwrotnie

$$\text{jeżeli } d((s_n), (t_n)) < 2^{-m}, \text{ to } s_n = t_n \text{ dla } n = 0, 1, \dots, m.$$

W tej przestrzeni definiujemy odwzorowanie zwane *przesunięciem Bernoulliego*:

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) := (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

albo precyzyjniej  $\sigma((s_n)_n) = (t_n)_n$ , gdzie  $t_n = s_{n+1}$ . Odwzorowanie  $\sigma$  jest ciągle i definiuje dyskretny układ dynamiczny w  $\Sigma_2$ . Układ ten ma zadziwiające własności. Po pierwsze zawiera trajektorie okresowe o dowolnym okresie podstawowym  $N$  : jako punkt startu wystarczy wziąć ciąg okresowy zero-jedynkowy o podstawowym okresie  $N$ . W szczególności punktami stałymi są ciągi  $(000\dots)$  i  $(111\dots)$ , trajektorie okresowe o podstawowym okresie 2 startują z  $(101010\dots)$  i  $(010101\dots)$ . Widać stąd, że zbiór trajektorii okresowych jest zbiorem gęstym w  $\Sigma_2$ .

Po drugie istnieje trajektoria, która sama jest zbiorem gęstym w  $\Sigma_2$ . Jej punkt startu konstruujemy jako ciąg, w którym kolejno występują sekwencje:

0, 1,

00, 01, 10, 11,

000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111,

sekwencje długości 4 i.t.d. Konsekwencją istnienia trajektorii gęstej jest wspomniana wcześniej topologiczna tranzytywność układu.

Trzecią własnością przesunięcia Bernoulliego jest tzw. wrażliwość na warunki początkowe. Mówimy, że układ  $S_t$ , ( $t \in [0, \infty)$  lub  $t \in \mathbb{N}$ ) jest *wrażliwy na warunki początkowe*, jeśli istnieje liczba dodatnia  $M$  taka, że dla dowolnego  $x \in X$  istnieją ciągi  $x_k \rightarrow x$  i  $t_k \rightarrow \infty$  o własności

$$d(S_{t_k}(x_k), S_{t_k}(x)) \geq M.$$

Dla przesunięcia Bernoulliego  $M = 2$  i dla dowolnego  $(s_n)_n$  wybieramy ciąg  $(t_n^{(k)})_n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gdzie  $t_n^{(k)} = s_n$  dla  $n \leq k$  i  $t_n^{(k)}$  są dokładnie przeciwne

do  $s_n$  dla  $n > k$  tzn. są równe 1 tam, gdzie  $s_n = 0$  i 0 tam, gdzie  $s_n = 1$ . Wtedy odległość między  $\sigma^k(t^{(k)})$  i  $\sigma^k(s)$  wynosi dokładnie  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ .

Układ dynamiczny dyskretny mający te trzy własności przesunięcia Bernoulliego: (1) gęstość zbioru trajektorii okresowych, (2) topologiczną tranzytywność i (3) wrażliwość na warunki początkowe nazywamy układem chaotycznym w sensie Devaney'a. Możemy uznać układ z czasem ciągłym za chaotyczny, jeśli na pewnym swoim nietrywialnym zbiorze niezmienniczym np. na dziwnym atraktorze ma wspomniane trzy własności. Wydaje się jednak, że ta ostatnia definicja byłaby całkowicie nieweryfikowalna w przykładach, dlatego obecnie zwykle przyjmuje się, że układ dynamiczny z czasem ciągłym jest chaotyczny, jeśli dla pewnej jego dyskretyzacji  $V_n = S_{nT}$  na pewnym zbiorze niezmienniczym otrzymamy układ dyskretny semirównoważny z przesunięciem Bernoulliego. Układ  $f : X \rightarrow X$  nazywamy *topologicznie semirównoważnym*  $g : Y \rightarrow Y$ , gdy istnieje ciągłe odwzorowanie  $h : X \rightarrow Y$  taki, że

$$h \circ f = g \circ h.$$

Definicja ta jest słabsza od określenia układów topologicznie równoważnych w tym sensie, że tam żądaliśmy by  $h$  było homeomorfizmem.

W literaturze technicznej często nazywa się układem chaotycznym układ, którego symulacje numeryczne sugerują istnienie skomplikowanej dynamiki. Praktycznie nigdy jednak nie uwzględnia się możliwości, że:

skomplikowany atraktor jest w istocie trajektorią okresową o bardzo dużym okresie;

mamy do czynienia z trajektoriami quasiokresowymi;

źródłem obserwowanej dynamiki są błędy związane z metodami numerycznymi.

**Uwaga.** Funkcją quasiokresową nazywamy funkcję postaci

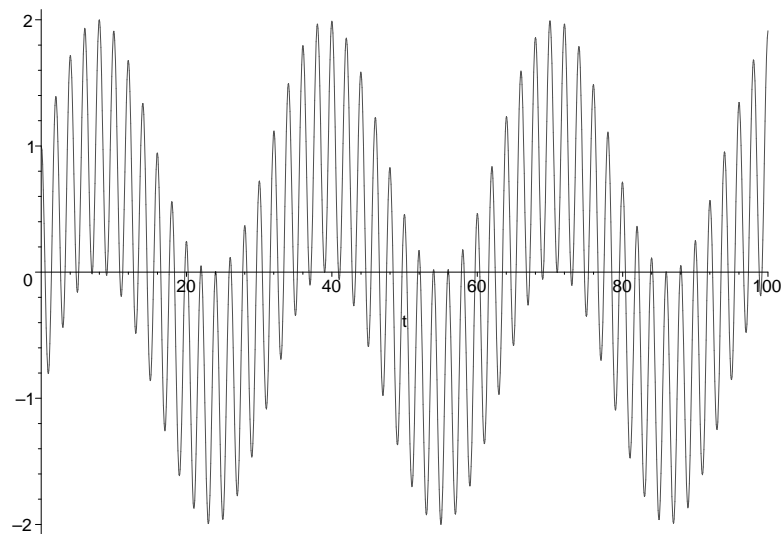
$$u(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t),$$

gdzie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją  $2\pi$ -okresową ze względu na każdą zmienną, a częstości  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , są niezależne nad ciałem liczb wymiernych tzn.

$$\sum_{j=1}^n a_j \omega_j = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}, \quad j = 1, \dots, n \implies a_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

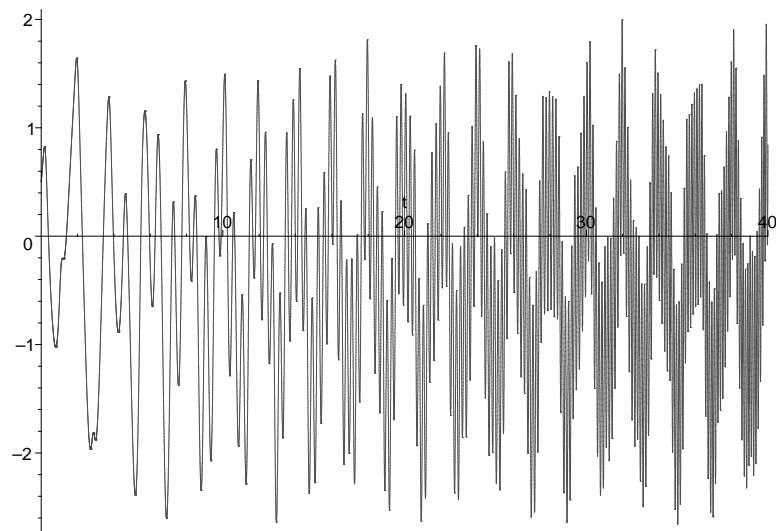
Oto przykład, gdy funkcja zdaje się być okresowa:

```
omega1:=2: omega2:= evalf(Pi): F:=(x,y)->sin(x)+cos(y):
plot(F(omega1*t,omega2*t),t=0..100,numpoints=1000);
```



a to, gdy nie widzimy, żadnej prawidłowości mimo próby poprawienia obrazu w ramach możliwości MAPLE

```
omega3:=7.123456789: F:=(x,y,z)->sin(x*y)+cos(y)-1/(sin(z)-2)-1:
plot(F(omega1*t,omega2*t,omega3*t),t=0..40,numpoints=30000,resolution=1500);
```



Zauważmy, że w istocie definicja funkcji quasiokresowej nie może być zrealizowana komputerowo; komputer do obliczeń numerycznych przybliża liczby niewymierne do liczby wymiernej.

Symulacje numeryczne nie mogą wykazać istnienia chaosu w układzie dynamicznym. Jednak wspomagają one poszukiwania dowodu takiej



dynamiki. W szczególności często obserwujemy istnienie „atraktora” składającego się z dwóch części. Można wtedy szukać cięć transwersalnych i odwzorowań Poincaré z nimi związanych, przy czym wskazać tę część, której przypiszemy 0 i tę, której przypiszemy 1. Wówczas punktowi cięcia transwersalnego  $x$  odpowiada ciąg zero-jedynkowy  $(s_n)$  taki, że  $s_n = 0$ , gdy  $P^n(x)$  należy do pierwszej części „atraktora” i  $s_n = 1$ , gdy  $P^n(x)$  należy do drugiej z nich. Jeśli tylko zadamy o to, by błąd numeryczny nie przekraczał odległości między częściami, to tego rodzaju badania pozwalają przeprowadzić ścisły dowód istnienia chaosu. To tylko bardzo ogólna idea.

Czasami liczba części jest większa niż 2 i należy wprowadzić dynamikę symboliczną zamiast na ciągach zero-jedynkowych, na ciągach zbudowanych z większej liczby symboli np.  $k$  :

$$\Sigma_k := \{s_0 s_1 s_2 \dots : \text{gdzie } s_j = 0 \text{ lub } 1 \text{ lub } 2 \dots \text{ lub } k-1\},$$

przesunięcie Bernoulliego określone tak samo, jak wcześniej (por. wykład Jacka Rogowskiego lub [2]). Czasami też tylko niektóre z symboli są dopuszczalne po innych co opisuje macierz  $k \times k$  o wyrazach 0 lub 1 (1 na miejscu  $a_{ij}$  oznacza, że po  $i$ -tym symbolu  $j$ -ty jest dopuszczalny, 0 – że nie jest).

## 12 Wykładniki Lapunowa

Wprowadzimy teraz pojęcie, które jest ważnym miernikiem wrażliwości na warunki początkowe dla dyskretnych układów dynamicznych. Istnieją odpowiedniki dla układów z czasem ciągłym, ale ich interpretacja nie jest już oczywista.

Niech  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  będzie klasy  $C^1$  i  $x_0 \in [a, b]$ . Oznaczmy  $x_n = f(x_{n-1})$  dla  $n \geq 1$  i

$$\lambda(x_0) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|.$$

Wprost z definicji liczba ta mierzy średnią wartość logarytmu pochodnej wzdłuż półtrajektorii dodatniej punktu  $x_0$ . Znaczenie tej liczby staje się jasne, gdy zauważymy, że

$$\sum_{i=1}^n \ln f'(x_i) = \ln(f^n)'(x_0)$$

i z definicji pochodnej

$$f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0) \approx (f^n)'(x_0)\delta$$

czyli

$$|f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0)| \approx |\delta| \cdot e^{\lambda n}.$$

Oznacza to, że jeśli zaburzymy punkt startu  $x_0$  o małą liczbę  $\delta$ , to półtrajektorie dodatnie obu punktów będą się od siebie oddalały (zbliżały średnio jak  $|\delta|e^{\lambda n}$ . Gdy więc  $\lambda > 0$ , to rzeczywiście zachodzi oddalanie się trajektorii, a gdy  $\lambda < 0$ , mamy zbliżanie. Liczbę  $\lambda(x_0)$  nazywamy wykładnikiem Lapunowa dla dyskretnego układu dynamicznego danego przez funkcję  $f$ .

Jest interesujące, że przy dość słabych założeniach dla prawie wszystkich  $x_0$  w definicji wykładnika Lapunowa zamiast granicy górnej istnieje granica. Jest to istotne z obliczeniowego punktu widzenia. Wartość wykładnika zależy od wyboru punktu startu, choć w wielu ważnych przykładach jest odwrotnie. Dodatniość wykładnika Lapunowa w literaturze technicznej uchodzi za wskaźnik chaotyczności układu. Warto jednak zauważyć, że wobec powyższych wyjaśnień dostarcza to nam tylko informacji o wrażliwości na warunki początkowe. Jeśli taki wykładnik jest dodatni, to znając  $x_0$  z pomiaru, który zawsze obarczony jest pewnym błędem, znamy tylko początek półtrajektorii; właściwie nasze obliczenia dla dużych  $n$  są bezwartościowe.

Uogólnienie pojęcia na przypadek wielowymiarowy jest trudniejsze. Dla odwzorowania  $f : M \rightarrow M$ ,  $M \subset \mathbb{R}^k$ , klasy  $C^1$  definicja zależy nie tylko od punktu startu  $x$ , ale i kierunku  $v \in \mathbb{R}^k$  :

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|(f^n)'(x; v)\|$$

(pod normą pochodna kierunkowa. Przy prostych założeniach możemy uniezależnić się od  $v$ . Niech  $M$  będzie zbiorem zwartym w  $\mathbb{R}^k$ , którego brzeg jest hiperpowierzchnią  $k - 1$ -wymiarową klasy  $C^2$  i  $f : M \rightarrow M$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^2$  (tzn. jest ono obcięciem odwzorowania tej klasy na pewnym otoczeniu zbioru  $M$ ,  $f$  jest bijekcją na  $M$  i odwzorowanie odwrotne jest klasy  $C^2$ ). Wtedy  $f$  przekształca wnętrze zbioru  $M$  w siebie. Dla  $x$  należących do wnętrza zbioru  $M$  istnieje wstępujący ciąg podprzestrzeni liniowych

$$V_x^1 \subset V_x^2 \subset \dots \subset V_x^s \subset \mathbb{R}^k$$

taki, że

$$f'(x)(V_x^j) = V_{f(x)}^j$$

i podprzestrzenie te zmieniają się w sposób ciągły w zależności od  $x$ . Wtedy dla  $v \in V_x^j \setminus V_x^{j-1}$   $\lambda(x, v)$  jest takie samo – oznaczamy je  $\lambda_j(x)$ . Mamy więc skończony układ wykładników Lapunowa

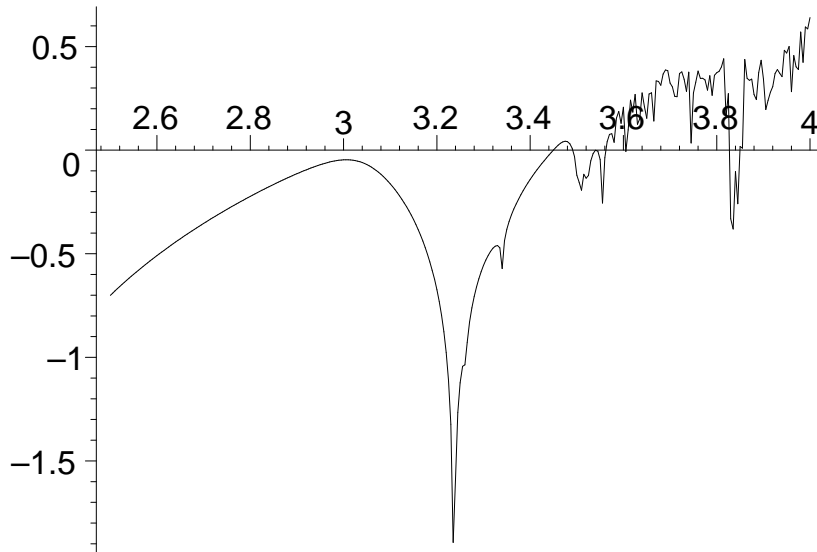
$$\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_s(x),$$

gdzie  $s \leq k$ . Dla prawie wszystkich  $x$  występujące w definicji granice górne są zwykłymi granicami.

W praktyce interesuje nas przede wszystkim największy wykładnik Lapunowa; jeśli on jest dodatni, mamy wrażliwość na warunki początkowe (przynajmniej dla  $x$ ). Jest to więc

$$\lambda_{\max}(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{n} \ln \|(f^n)'(x; v)\|.$$

Poniżej prezentujemy wykres wykładnika Lapunowa dla odwzorowania  $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$  odcinka  $[0, 1]$  w siebie dla  $\mu \in [2.5, 4]$  i  $x = 0.1$  choć wykres dla innych punktów startu jest bardzo podobny.



Dla układów dynamicznych z czasem ciągłym najprostszym odpowiednikiem wykładnika Lapunowa stosuje się do: równania zwyczajnego autonomicznego  $x' = f(x)$  z prawą stroną  $f \in C^1$  i jego rozwiązania  $[0, \infty) \ni t \mapsto u(t)$ . Tworzymy mianowicie linearyzację równania wzdłuż  $u$  czyli równanie liniowe

$$y' = f'(u(t)) \cdot y$$

bierzemy jego macierz fundamentalną  $t \mapsto \Phi(t)$  i obliczamy

$$\lambda(u, e) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Phi(t)e\|}{\|e\|}, \quad \text{gdzie } e \in \mathbb{R}^k.$$

Okazuje się, że zawsze można wybrać macierz fundamentalną  $\Phi$  w ten sposób, by pojawiająca się granica górna była zwykłą granicą. Przy ustalonym  $u$  funkcja  $e \mapsto \lambda(u, e)$  przyjmuje co najwyżej  $\dim X$  wartości.

## 13 Miary niezmiennicze i inne wyznaczniki dynamiki

Niech  $f : X \rightarrow X$  wyznacza dyskretny układ dynamiczny. Miarę  $\mu$  na  $X$  nazywamy *niezmienniczą* (ze względu na ten układ), jeśli

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \text{dla każdego mierzalnego } A \subset X.$$

Stąd oczywiście

$$\mu((f^n)^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \text{dla każdego mierzalnego } A \subset X \text{ i } n \geq 0.$$

Analogicznie dla układu z czasem ciągłym  $S_t, t \geq 0$ :

$$\mu(S_t^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \text{dla każdego mierzalnego } A \subset X, \text{ i } t \geq 0.$$

W praktyce interesują nas miary skończone  $\mu(X) < \infty$ , które przez podzielenie przez stałą sprowadzić można do miar probabilistycznych.

Znaczenie takich miar wynika z

**Tw. Poincaré o powracaniu.** Jeżeli  $\mu$  jest skończoną miarą niezmienniczą dla układu z czasem dyskretnym  $f^n, n \in \mathbb{N}$ , i  $A \subset X$  ma miarę dodatnią, to zbiór  $B :=$

$$\{x \in A : f^n(x) \notin A, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}\}$$

jest miary 0. W szczególności jeśli każda kula otwarta ma miarę dodatnią, to układ jest topologicznie tranzytywny. Analogicznie dla układu z czasem ciągłym.

Dowód. Mamy dla każdego  $n : f^{-n}(B) \cap B = \emptyset$ . Stąd dla  $m < n$ ,  $f^{-n}(B) \cap f^{-m}(B) = f^{-m}(f^{-(n-m)}(B) \cap B) = \emptyset$ . Ale  $\mu(f^{-n}(B)) = \mu(B)$ , więc

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(B)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B) = \infty.$$

Sprzeczność.

Mając probabilistyczną miarę niezmienniczą na  $X$  i wybierając losowo punkt startu  $x$  i czas  $t$  możemy podać prawdopodobieństwo tego, że  $S_t(x) \in A \subset X$  – wynosi ono  $\mu(A)$ . Oznacza to w szczególności, że średni czas przebywania punktu  $x$  w zbiorze  $A$  czyli

$$\tau(x, A) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A(S_t(x)) dt$$

–  $\chi_A$  – funkcja charakterystyczna zbioru  $A$  – także wynosi średnio  $\mu(A)$  (por. określenie atraktora Iljaszenki). W istocie (tw. ergodyczne) liczba  $\tau(x, A)$  równa się  $\mu(A)$  dla prawie wszystkich  $x \in X$ . Jest to podstawa numerycznego poszukiwania miary niezmienniczej.

Dla ustalenia uwagi weźmy układ dyskretny dany przez funkcję  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , wybierzmy duże liczby naturalne  $N > M$ , zdefiniujmy  $x[i, 0] := \frac{i}{M}$  dla  $i = 0, 1, \dots, M$ , oraz  $x[i, j] := f(x[i, j - 1])$  dla tych samych  $i$  oraz  $1 \leq j \leq N$ . Podzielmy teraz przedział  $[0, 1]$  na  $M$  równych części  $I_i := [\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M})$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Funkcja schodkowa  $p_{M,N}$  równa na  $I_i$  ilorazowi liczby punktów  $x[i, j]$ , które wpadają do  $I_i$  do liczby wszystkich punktów  $= N(M+1)$ , jest przybliżeniem gęstości  $p$  miary niezmienniczej, oczywiście o ile taka miara istnieje i jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a tzn.

$$\mu(A) = \int_A p(x) dx.$$

Można zmodyfikować konstrukcję  $p_{M,N}$  wybierając np. tylko jeden punkt startu i/lub obcinając początek trajektorii ustalonej długości. Analogiczną konstrukcję można powtórzyć dla układów z czasem ciągłym posiadających zwarty atraktor globalny, aproksymując miarę niezmienniczą na atraktorze.

Dla prostych przypadków  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  udaje się w sposób ścisły znaleźć miarę niezmienniczą, np. dla odwzorowania trójkątnego

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

jedyną miarą niezmienniczą jest miara Lebesgue'a, a dla wspomnianego już  $f(x) = 4x(1 - x)$  miara o gęstości

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

## 14 Analiza szeregów czasowych

W tym wykładzie zajmiemy się sytuacją, gdy w wyniku pomiarów zmian pewnych wielkości realnych otrzymaliśmy ciąg (skończony) liczb rzeczywistych  $x(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Można je traktować jako kolejne elementy półtrajektorii dodatniej punktu  $x(0)$  w pewnym układzie dynamicznym z czasem dyskretnym lub ciągłym. Jeśli są to więc wyniki pomiarów wielkości zmieniającej się w sposób ciągły, to należy zadbać, by były one dokonywane w jednakowych odstępach czasu. Tym razem jednak nie znamy tego układu dynamicznego ani tym bardziej równania, które go generuje. Jeśli badana wielkość wchodzi w złożone interakcje z innymi albo układ realny jest typu „czarnej skrzynki”, to zbudowanie modelu, jak to miało miejsce w poprzednich wykładach jest niemożliwe. Chcemy jednak w miarę możliwości zorientować się o rodzaju dynamiki tego układu. Oczywiście znajomość jednej (niecałej) półtrajektorii nie przesądza niczego, ale znajomość wcześniej zbadanych układów dynamicznych sugeruje, że wybierając  $x(0)$  przypadkowo raczej nie trafimy na punkt stały,

czy trajektorię okresową (chyba, że układ jest ich „pełen”), że asymptotycznie trajektorie zbliżają się do atraktora zwartego, więc ewentualnie obcinając początek tej półtrajektorii będziemy przybliżali ruch na tym atraktorze, wreszcie że dla wielu układów charakter ruchu na atraktorze nie zależy od wyboru trajektorii z niego. W ostateczności możemy spróbować dokonać pomiarów z innymi, odległymi punktami startu  $x(0)$ .

Otrzymane dane można poddać wstępnej statystycznej obróbce znajdując średnią wartość zmiennej  $x$  czyli

$$\hat{x} := \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x(i)$$

oraz jej odchylenie standardowe

$$\sigma_x := \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (x(i) - \hat{x})^2}.$$

Dostarczają one wstępnej informacji o trajektorii. Mają też znaczenie w poważniejszych badaniach, gdy próbujemy rozdzielić układ na składnik istotny i „szum” związany z różnego rodzaju zakłóceniami np. błędem pomiaru. Tym problemem nie będziemy się zajmować przyjmując, że zakłócenia są na tyle nieistotne, że nie przeszkodzą nam w zrozumieniu jakościowym dynamiki. Z drugiej strony będziemy zestawiać wyniki otrzymane dla deterministycznych układów z wynikami dla tzw. białego szumu, gdzie rozkład  $x(i)$  jest całkowicie przypadkowy.

Do badań weźmiemy sześć szeregów czasowych:

- (1) trajektoria okresowa  $x(i) = \sin(0.1 * i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10^3$ ;
- (2) trajektoria quasiokresowa  $x(i) = \sin(0.1 * i) + \cos(0.1 * \pi * i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10^3$ ;
- (3) trajektoria układu dyskretnego danego przez  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = 4x(1 - x)$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $x(i) = f(x(i - 1))$ ,  $N$  jak poprzednio  $10^3$ ;
- (4) pierwsza współrzędna z układu Lorenza

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

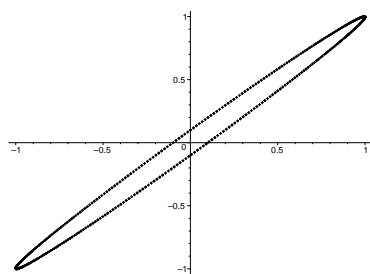
gdzie  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ , dla trajektorii startującej z warunku początkowego  $x(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.1$ ,  $z(0) = 0.5$ . Bierzemy szereg czasowy  $x(i) := x(0.01 \cdot i)$ ,  $i = 0, \dots, 10^3$ .

(5) biały szum otrzymany przez MAPLE  $x(i) = rand()/10^{12}$ ,  $N = 10^3$ , (procedura `rand()` w MAPLE generuje 12-cyfrową liczbę całkowitą i jej podzielenie przez  $10^{12}$  daje liczbę losową z przedziału  $[0, 1]$ );

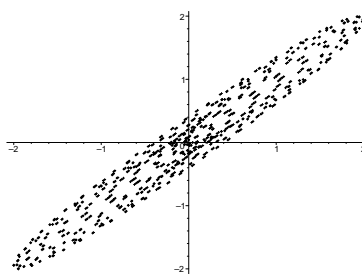
(6) trajektoria powstała przez dodanie  $x(i)$  z punktu (3) i  $x(i)$  z punktu (5) podzielone przez 100.

W żadnym z tych przypadków nie mamy do czynienia z rzeczywistym szeregiem czasowym otrzymanym z pomiarów, jednak porównując otrzymane wyniki, wyrobimy sobie pogląd na rodzaj dynamiki. Będziemy rozróżniać dynamikę okresową (1) od quasiokresowej (2), chaotycznej (3) i (4), a wreszcie od białego szumu (5). W ostatnim przypadku zobaczymy, że jeśli nałożone zakłócenia są niewielkie, to dynamikę chaotyczną nadal daje się odróżnić.

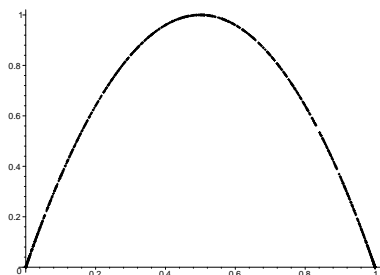
Zacznijmy od bardzo prostego triku: narysujmy na układzie współrzędnych punkty  $(x(i-1), x(i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Jeśli ułożą się one wzdłuż pewnej krzywej, która jest wykresem pewnej funkcji, to możemy sądzić, że mamy dyskretny układ dynamiczny zadany przez tę funkcję.



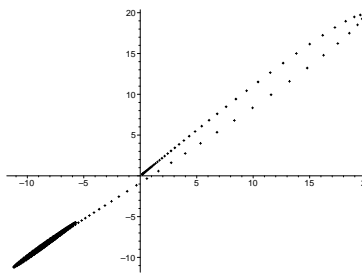
trajektoria okresowa



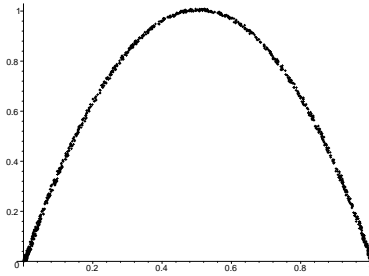
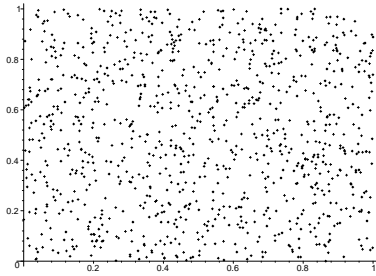
trajektoria quasiokresowa



trajektoria układu logistycznego



trajektoria układu Lorenza



biały szum      trajektoria układu logistycznego z dodanym szumem  
Widać, że tylko w trzecim i szóstym przypadku mamy przybliżony wykres funkcji. Widać też, że w układach chaotycznych nie mamy bezładnego rozkładu punktów; charakteryzuje on tylko biały szum.

Ważną rolę w analizie sygnałów (funkcji) okresowych pełni rozkład w szereg Fouriera. Jego odpowiednikiem dla funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jest transformacja Fouriera, która takiej funkcji przypisuje funkcję  $\hat{f}$  daną wzorem

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\omega} f(x) dx.$$

Teorię tej transformacji można znaleźć w podręcznikach analizy funkcjonalnej np. Rudina. Tutaj powiemy tylko o jej dyskretnym odpowiedniku – dyskretnej transformacji Fouriera. Ciągowi liczbowemu  $x(j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , (w ogólności zespolonemu) przypisuje ona ciąg

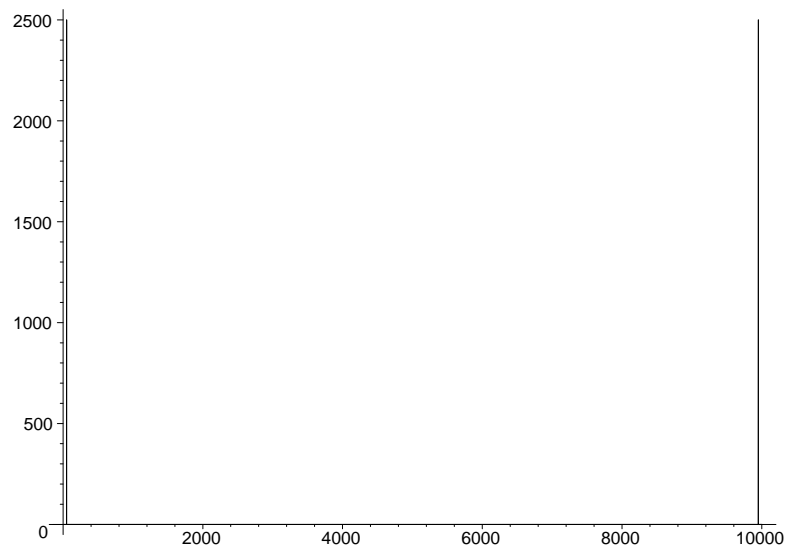
$$z(j) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \exp \frac{-2\pi i j k}{N} \right) x(k), \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Ten nowy ciąg jest już zawsze zespolony. *Widmem mocy* dla szeregu czasowego  $x(j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , nazywamy ciąg o wyrazach rzeczywistych

$$P(j) := |z(j)|^2, \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

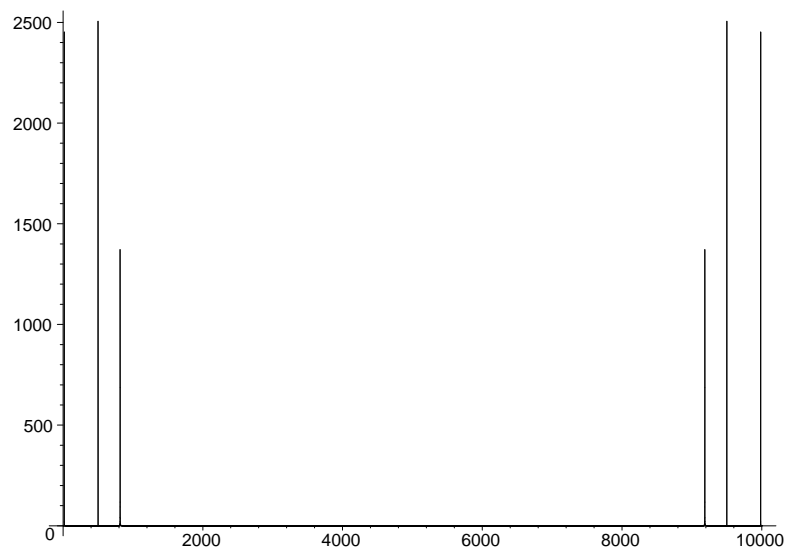
Poniżej prezentujemy wykresy widma mocy dla kolejnych układów (1)-(6).



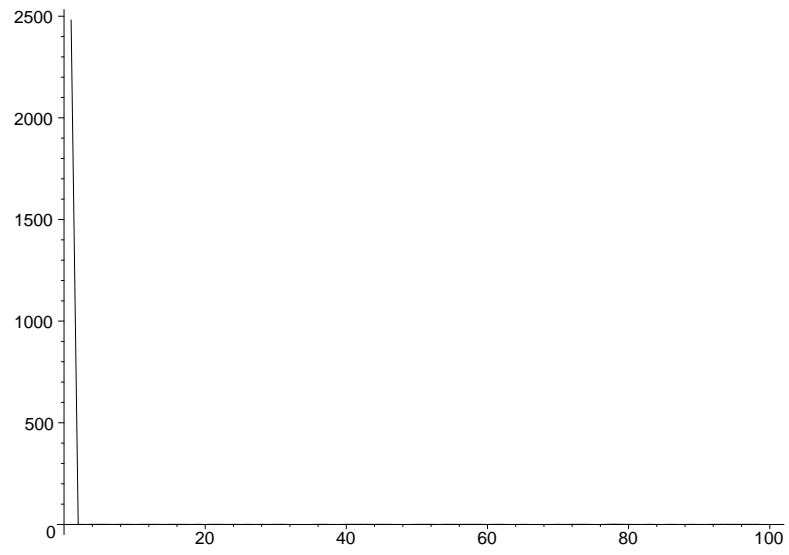


szereg okresowy

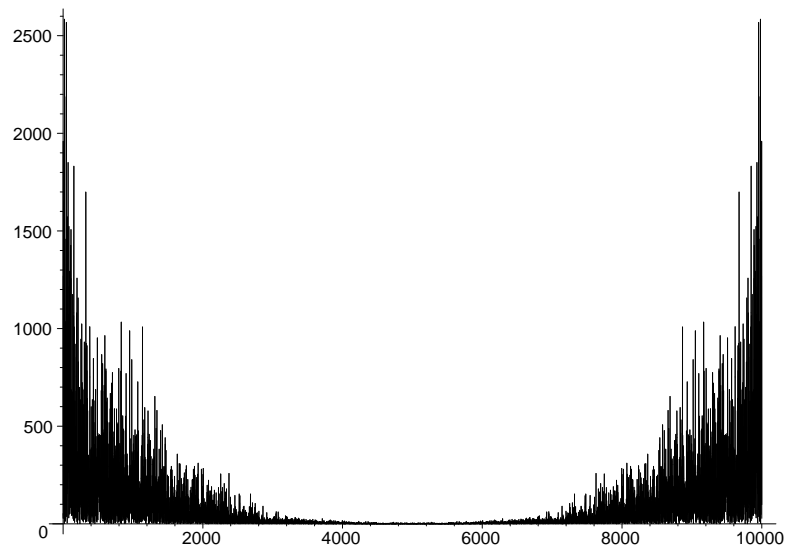
sze-



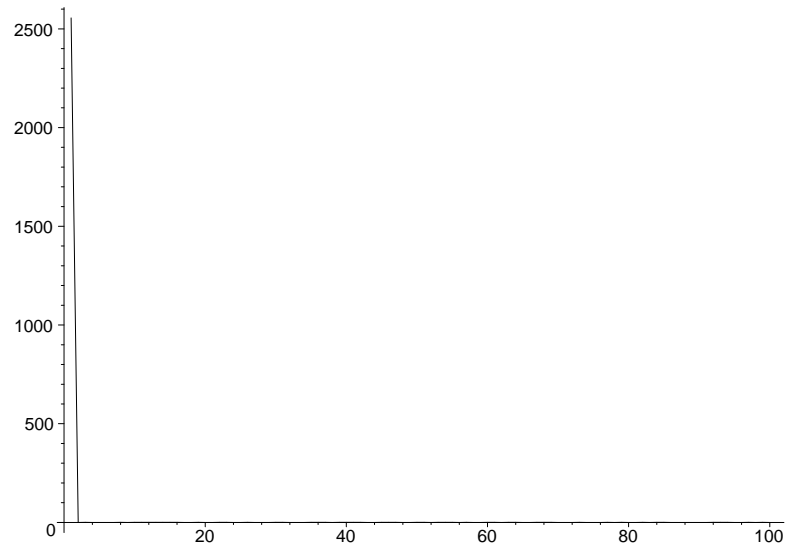
reg quasiokresowy



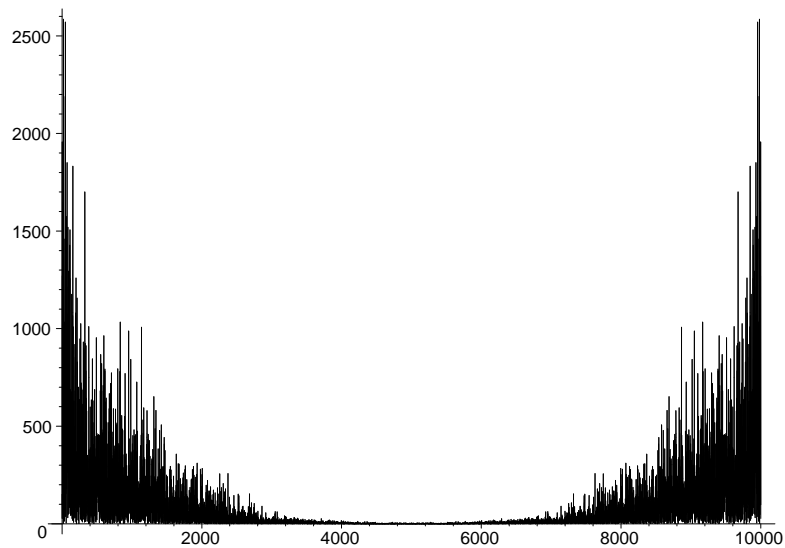
chaos w układzie logistycznym



chaos w układzie Lorenza



biały szum



układ Lorenza z szumem

Widoczne są dwa piki przy funkcji quasiokresowej, poza nimi krzywa gładko zbliża się do 0. Układy chaotyczne niewiele różnią się od szumu, choć układ Lorenza znacznie odbiega tu od logistycznego. Zauważmy, że musieliśmy zawęzić rachunki do  $N = 200$ . Gdyby nie to czas pracy komputera osobistego byłby zbyt duży, a pamięć zbyt mała.

Ważnym miernikiem szeregu czasowego jest funkcja autokorelacji.

Dla nieskończonego szeregu czasowego jest ona zdefiniowana wzorem

$$C(m) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_{i+m} \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

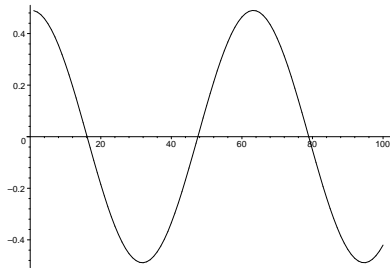
gdzie  $\hat{x}_j = x_j - \hat{x}$ . Dla szeregów skończonych urywających się na  $N$ , zastępujemy granicę przez ostatni wyraz. Oto program w MAPLE rysujący wykres  $m \rightarrow C(m)$ :

```

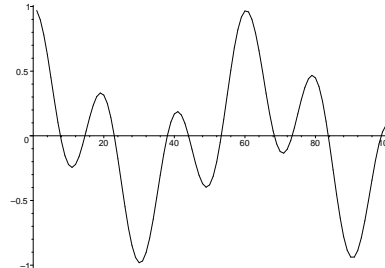
autokorel:=proc(B,N)
local i,j,m,srednia,c:
srednia:=sum(B[i],i=0..2*N)/(2*N+1):
for m from 1 to N do
c(m):=sum((B[j]-srednia)*(B[j+m]-srednia),j=0..N)/(N+1):
PLOT(CURVES([seq([m,c(m)],m=1..N/2)]));
end do:
end proc:

```

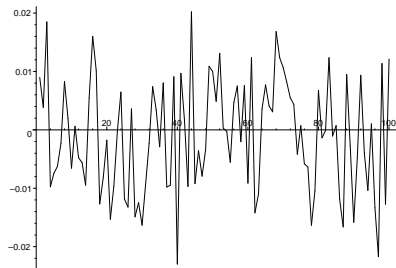
gdzie w miejsce  $B$  wprowadzamy szereg czasowy  $x(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N$ . A oto wynik jej działania dla kolejnych szeregów czasowych:



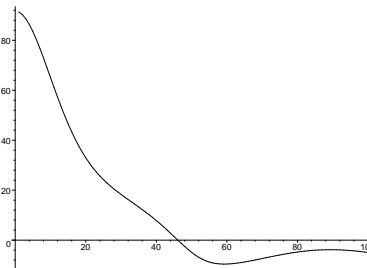
szereg okresowy



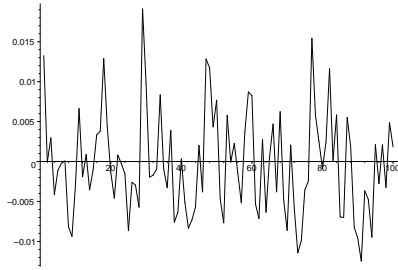
szereg quasiokresowy



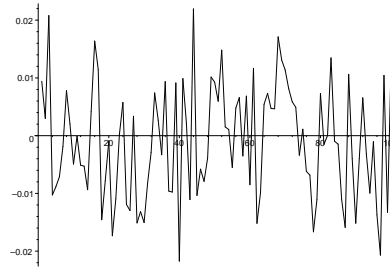
chaos logistyczny



chaos w układzie Lorenza



biały szum

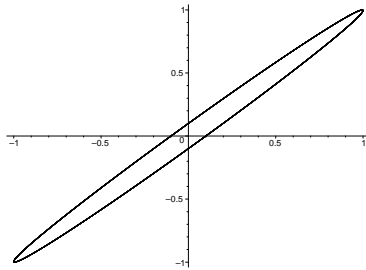


chaos logistyczny z szumem

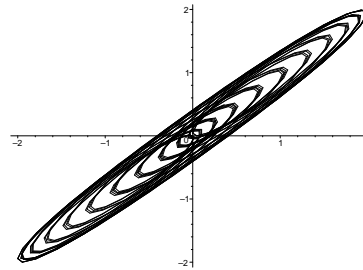
Ostatnie zagadnienie, które omówimy to rekonstrukcja atraktora na podstawie szeregu czasowego. Jeżeli mamy szereg czasowy  $x(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , i ustalimy liczbę naturalną  $d \geq 2$ , to możemy połączyć odcinkami w przestrzeni  $\mathbb{R}^d$  punkty

$$(x(i), x(i+1), \dots, x(i+d-1)), \quad i = 0, 1, \dots, N-d+1.$$

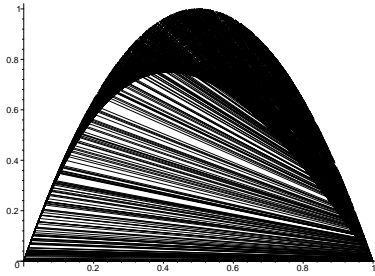
W tej przestrzeni powstanie pewna łamana, która po odrzuceniu początkowych odcinków stanowi rekonstrukcję atraktora układu. Na monitorze możemy oczywiście obserwować tylko przypadek  $d = 2$  lub dla większych  $d$  rzuty tej rekonstrukcji na różne płaszczyzny. Oczywiście konstrukcja może być przeprowadzona zawsze choć nie zawsze atraktor istnieje. Podobnie wybór wymiaru  $d$  jest dowolny i dla różnych wyborów otrzymamy różne obiekty. Ruelle udowodnił jednak, że przy dość ogólnych założeniach o układzie dynamicznym  $S_t$ ,  $t \geq 0$ , w przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  gwarantujących istnienie zwartego atraktora globalnego istnieją  $\tau > 0$  i  $d \in \{2, 3, \dots, k\}$  takie, że szereg czasowy każdej ze współrzędnych  $\text{pr}_j S_{i\tau}(x)$ ,  $j$  ustalone,  $i = n, n+1, \dots$ , jest przybliżeniem tego atraktora. Oznacza to w szczególności, że obliczając tylko szereg czasowy dla współrzędnej  $x$  w równaniu Lorenza i wybierając  $d = 3$  możemy obserwować cały trójwymiarowy atraktor. Jeśli jednak nie znamy układu dynamicznego, a jedynie pewien szereg czasowy, to także możemy próbować wykonać tę procedurę. Zrobimy to dla naszych sześciu szeregów czasowych wybierając  $d = 2$ .



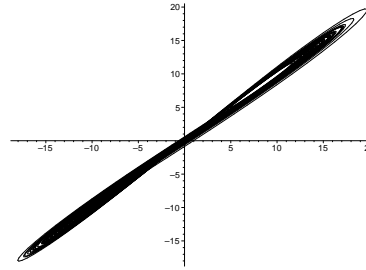
szereg okresowy



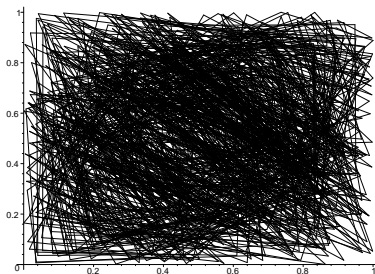
szereg quasiokresowy



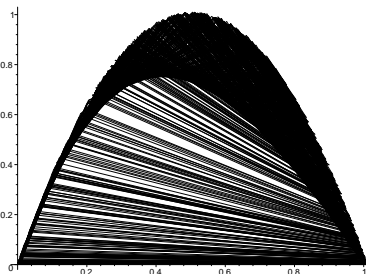
chaos logistyczny



chaos w układzie Lorentza



biały szum



chaos logistyczny z szumem

## 15 Podstawowe prawa mechaniki nieba

Dość typowy pogląd, że odkrycia Kopernika stanowią początek współczesnej astronomii, jest z gruntu fałszywy. Po pierwsze, umieszczenie Słońca w centrum wszechświata było tylko powrotem do poglądów wielu astronomów starożytnych. Po drugie, centralność tej gwiazdy jest prawdziwa jedynie w odniesieniu do lokalnego systemu planetarnego, a stwierdzenie, że planety poruszają się po okręgach o środkach w środku Słońca jest fałszywe. Po trzecie wreszcie, opis ruchu planet wymaga jakiegoś uzasadnienia, a u Kopernika jest czysto fenomenologiczny. W prawie 100 lat później Johann Kepler na bazie obserwacji Tycho Brahe poprawił model Kopernika. W opisie Keplera planety poruszają się po elipsach, a Słońce znajduje się w ognisku każdej z elips. Ponadto Kepler sformułował ilościowe prawa ruchu po tych elipsach, wyjaśniając zmiany prędkości ruchu w różnych punktach toru planety i związki między okresem ruchu a rozmiarami elipsy. Nadal jednak brakowało uzasadnienia tych praw i jakiejś ich uniwersalności. Wiedzano już bowiem, że Układ Słoneczny jest tylko niewielkim fragmentem wszechświata i, być może są w nim jeszcze inne układy planetarne. Dopiero fundamentalne dzieło Izaaka Newtona z 1687 roku wypełniło brakującą lukę. Newton założył, że pomiędzy każdymi dwoma ciałami działa siła zwana siłą grawitacji i podał ilościowy wzór na tę siłę. Konsekwencją działania tej siły okazały

się prawa Keplera. W późniejszych latach zaobserwowano pewne odchylenia ruchu planet od praw Keplera, ale było to tylko potwierdzeniem teorii Newtona, ponieważ prawa Keplera otrzymuje się przy założeniu, że jedyną siłą działającą na daną planetę jest siła przyciągania grawitacyjnego Słońca zaniebując fakt, że przecież pomiędzy planetami także działają siły grawitacji. Ponieważ siła grawitacji zgodnie ze wzorem Newtona jest proporcjonalna do mas oddziałujących ciał, nieuwzględnianie oddziaływań między planetami jest uzasadnione tym, że masy planet są znikomo małe w porównaniu z masą Słońca. Zagadnienie ruchu dwóch ciał pod wpływem siły grawitacji według wzoru Newtona nazywane jest zagadnieniem dwóch ciał i jest przedmiotem niniejszego opracowania. Jeśli zamiast dwóch rozważamy  $N$  ciał, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem  $N$  ciał stanowiącym do dziś siłę napędową dużych fragmentów matematyki (teorii równań różniczkowych zwyczajnych, teorii układów dynamicznych, teorii chaosu). Nawet dla  $N = 3$  ciągle pojawiają się nowe zaskakujące rezultaty jakościowe i ilościowe.

Założmy, że mamy dwa ciała: jedno o masie  $M$  i drugie o masie  $m$ . Będziemy zakładać, że ciała mają zanedbywalnie małe (w stosunku do odległości między nimi) rozmiary, są punktowe. Jeśli początek kartezjańskiego układu współrzędnych w  $\mathbb{R}^3$  umieścić w ciele  $M$ , wtedy wzór na siłę grawitacji działającą na ciało  $m$  ma postać:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} (x, y, z),$$

gdzie  $G$  jest pewną uniwersalną stałą fizyczną (stałą grawitacji  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N m^2 / kg^2$ ), a  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  odległością między ciałami. Znak  $-$  powoduje, że jest to siła przyciągająca, a po łatwym sprawdzeniu widzimy, że

$$\|\vec{F}\| = G \frac{Mm}{r^2}$$

co odpowiada naszym szkolnym nawykom. W rzeczywistości początek układu współrzędnych powinniśmy umieścić w środku masy układu obu ciał, ale przy założeniu, że masa  $m$  jest znacznie mniejsza niż  $M$ , środek układu leży bardzo blisko większej masy. Jeśli w chwili początkowej mamy zadane położenie ciała  $m$  i jego prędkość, wówczas można pokazać, że dalszy ruch odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez ten punkt i wektor.

Na tej płaszczyźnie będziemy używać notacji zespolonej i współrzędnych biegunowych do opisu położenia punktu. Niech więc położenie ciała  $m$  w chwili  $t$  będzie oznaczone  $z(t)$  i

$$z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad (1)$$

gdzie  $r(t)$  oznacza odległość między ciałami w chwili  $t$  i  $\theta(t) \in \mathbb{R}$  jest argumentem położenia  $z(t)$ . Przypomnijmy teraz drugą zasadę dynamiki

Newtona, która mówi, że jeśli na punkt o masie  $m$  działa siła  $\vec{F}$ , to punkt ten porusza się w ten sposób, że jego przyspieszeniem jest wektor  $\vec{a}$ , przy czym

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Oczywiście zarówno siła, jak i przyspieszenie są tu wielkościami zmieniającymi się w czasie, a więc funkcjami zmiennej  $t$ . Przypomnijmy jeszcze, że przyspieszenie jest pochodną funkcji prędkości punktu, a ta z kolei jest pochodną funkcji położenia – tutaj  $t \mapsto z(t)$  :

$$a(t) = v'(t), \quad v(t) = z'(t).$$

W dalszym ciągu będziemy opuszczać argument  $t$  we wszystkich funkcjach dla uproszczenia zapisu. Tak więc zachodzi związek

$$ma = -G \frac{Mm}{r^2} e^{i\theta}.$$

Jest to w istocie równanie różniczkowe rzędu drugiego w  $\mathbb{C}$  :

$$z'' = -G \frac{M}{r^2} e^{i\theta}.$$

Korzystając z (1) dostaniemy

$$\begin{aligned} z' &= ire^{i\theta}\theta' + e^{i\theta}r', \\ z'' &= ir'e^{i\theta}\theta' - re^{i\theta}(\theta')^2 + ire^{i\theta}\theta'' + \\ &\quad + ie^{i\theta}\theta'r' + e^{i\theta}r'' = \\ &= -re^{i\theta}(\theta')^2 + e^{i\theta}r'' + i(re^{i\theta}\theta'' + 2e^{i\theta}\theta'r'). \end{aligned}$$

Zatem dostajemy równanie różniczkowe:

$$-GM \frac{1}{r^2} e^{i\theta} = -re^{i\theta}(\theta')^2 + e^{i\theta}r'' + i(re^{i\theta}\theta'' + 2e^{i\theta}\theta'r'),$$

które po podzieleniu przez  $e^{i\theta}$  przyjmuje postać

$$-GM \frac{1}{r^2} = -r(\theta')^2 + r'' + i(r\theta'' + 2\theta'r').$$

Porównując części rzeczywiste i urojone dostaniemy układ równań:

$$-GM \frac{1}{r^2} = -r(\theta')^2 + r'', \tag{2}$$

$$0 = r\theta'' + 2\theta'r'. \tag{3}$$

Po pomnożeniu obu stron (3) przez  $r$  zauważamy, że prawa strona jest pochodną funkcji  $r^2\theta'$ , więc równanie (3) przyjmuje postać

$$(r^2\theta')' = 0$$



czyli funkcja  $r^2\theta'$  jest całką pierwszą układu. Stąd

$$r^2\theta' = c,$$

gdzie  $c$  jest pewną stałą. Zauważmy, że dla  $c = 0$  mamy wtedy  $\theta' = 0$ , co daje nam ruch wzdłuż promienia wodzącego. Z pierwszego równania (2) widzimy, że jest to ruch spełniający zależność

$$r'' = -GM\frac{1}{r^2}.$$

Nie będziemy szukać jawnych rozwiązań tego ostatniego równania, choć jest to możliwe. Zauważmy tylko, że jeśli w chwili początkowej  $r'(0) \leq 0$ , to ruch jest od początku dośrodkowy z rosnącym przyspieszeniem, aż do osiągnięcia osobliwości  $r = 0$ , a jeśli  $r'(0) > 0$ , to początkowo  $r$  rośnie coraz wolniej, następnie zatrzymuje się i dalszy ruch odbywa się według poprzedniego scenariusza.

Ciekawszy jest przypadek, gdy  $c \neq 0$ . Możemy zakładać  $c > 0$ , bo przypadek  $c < 0$  jest symetryczny i odpowiada zmianie orientacji płaszczyzny. Podstawmy do równania (2)  $s = r^{-1}$ . Wtedy

$$r' = -\frac{1}{s^2}s'(t) = -\frac{1}{s^2}s'(\theta)\theta'(t) = -cs'(\theta)$$

– tutaj musieliśmy już wstawić argumenty, aby nie doprowadzić do nieporozumienia. Po drugim zróżniczkowaniu mamy

$$r'' = -cs''(\theta)\theta'(t) = -c^2s^2s''(\theta)$$

i możemy wstawić to do równania (2)

$$-GMs^2 = -s^{-1}(cs^2)^2 - c^2s^2s''(\theta).$$

Po podzieleniu obu stron przez  $-c^2s^2$  otrzymamy równanie

$$s''(\theta) + s = \frac{GM}{c^2}. \quad (4)$$

Jest to proste równanie liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach. Rozwiązaniami równania jednorodnego są funkcje  $\theta \mapsto a \sin \theta + b \cos \theta$ , a jedno z rozwiązań równania niejednorodnego łatwo odgadujemy – jest to funkcja stała  $\frac{GM}{c^2}$ . Zatem dowolne rozwiązanie równania (4) ma postać

$$s(\theta) = a \sin \theta + b \cos \theta + \frac{GM}{c^2},$$

gdzie  $a$  i  $b$  są dowolnymi stałymi. Jeśli weźmiemy  $\theta_0$  takie, że

$$\sin \theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

to kładąc  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$  wobec wzoru

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0,$$

otrzymamy

$$s(\theta) = k \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{c^2}.$$

Wracając do funkcji  $r$ , otrzymamy

$$r(\theta) = \frac{c^2}{c^2 k^2 \cos(\theta - \theta_0) + GM}$$

czyli po wstawieniu nowych stałych  $\alpha = \frac{c^2}{GM}$ ,  $\varepsilon = \alpha k^2$  mamy

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (5)$$

gdzie  $\alpha > 0$ , natomiast  $\varepsilon \geq 0$ . Możemy przyjąć, że  $\theta_0 = 0$  odpowiednio wybierając oś rzeczywistą na naszej płaszczyźnie zespolonej ( $\theta = \theta_0 -$  równanie dodatniej półosi rzeczywistej). Jeśli w równaniu (5) przejść do współrzędnych kartezjańskich  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , to zapisze się ono w postaci

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\alpha \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x}$$

i po prostych przekształceniach

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha - \varepsilon x,$$

skąd po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy równanie kwadratowe

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\alpha\varepsilon x - \alpha^2 = 0. \quad (6)$$

Jak wiadomo, równania kwadratowe opisują krzywe rzędu drugiego, czyli okrąg, elipsę, parabolę lub hiperbolę. Taki jest więc kształt trajektorii ruchu ciała  $m$ .

Zobaczmy teraz, że o kształcie trajektorii decyduje nieujemny współczynnik  $\varepsilon$  zwany *mimośrodem*. Niech najpierw  $\varepsilon = 0$ . Wtedy równanie (5) przyjmuje postać  $r = \alpha$  – równanie okręgu. Jeżeli  $\varepsilon \in (0, 1)$ , to w (5) mianownik nie znika dla żadnego kąta  $\theta$ , czyli jest to równanie krzywej zamkniętej (okresowość funkcji cosinus). Taką krzywą spośród wymienionych powyżej jest elipsa. Nietrudno zauważyć, że stosunek długości półosi tej elipsy wynosi  $\frac{1}{1-\varepsilon^2}$ , dąży więc do 1 przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  – wtedy elipsa zbliża się do okręgu. Przy rosnącym do 1  $\varepsilon$ , elipsa coraz bardziej się spłaszcza.

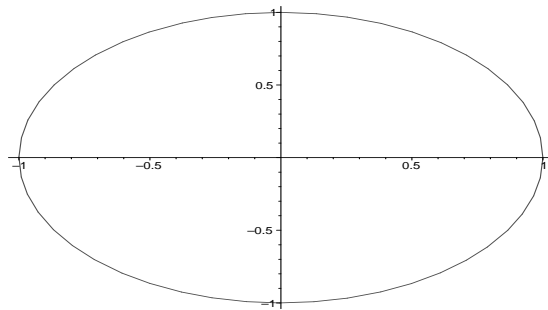
Dla  $\varepsilon = 1$  równanie nasze przyjmuje postać we współrzędnych kartezjańskich

$$y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = 0$$

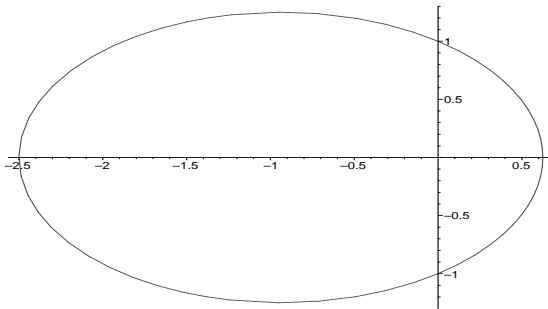
i oczywiście opisuje parabolę. Nie jest to już krzywa zamknięta, ciało  $m$  zbliża się do centrum, aby następnie uciec do nieskończoności. Ośią symetrii toru jest oś  $x$ , a tor ten przecina się z osią  $x$  w punkcie  $\alpha/2$ , a z osią  $y$  w punktach  $\pm\alpha$ . Dla  $\varepsilon > 1$  równanie toru ruchu opisuje hiperbolę. Możemy zaobserwować, że początek układu współrzędnych znajduje się w ognisku jednej z dwóch gałęzi tej hiperboli.

Poniżej przedstawiamy obrazy trajektorii otrzymane przy pomocy MAPLE dla różnych wartości parametru  $\varepsilon$ .

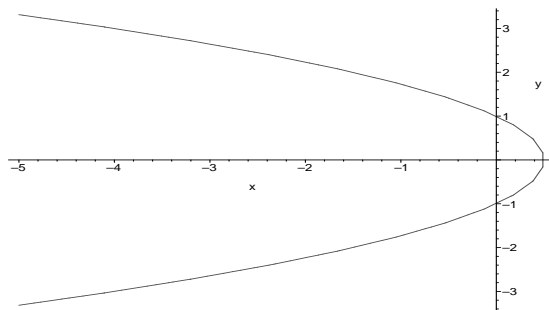
```
alpha:=1: varepsilon:=0:
plot(alpha/(1+epsilon*cos(theta)),theta=0..6.28,coords=polar);
```



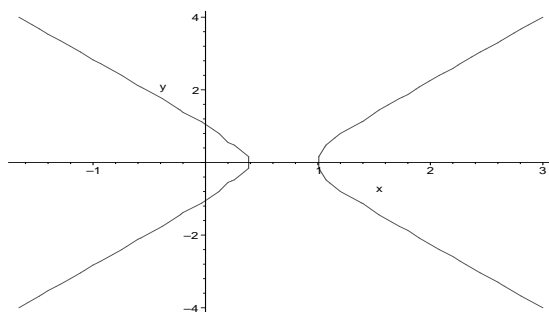
```
alpha:=1: epsilon:=0.6:
plot(alpha/(1+epsilon*cos(theta)),theta=0..6.28,coords=polar);
```



```
alpha:=1: epsilon:=1:
plots[implicitplot](y^2+2*alpha*x-alpha^2=0,x=-5..0.6,y=-4..4);
```



```
alpha:=1: epsilon:=2:
plots[implicitplot]((1-epsilon^2)*x^2+y^2+2*alpha*epsilon*x-alpha^2=0,
x=-5..5,y=-4..4);
```



Wróćmy do równań (2) i (3). Przypomnijmy, że drugie z nich prowadzi do całki pierwszej  $r^2\theta'$ ; przypomnijmy też wzór na pole obszaru ograniczonego krzywą zadaną we współrzędnych biegunowych wzorem  $\theta \mapsto r(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  oraz półprostymi  $\theta = \theta_1$  i  $\theta = \theta_2$  :

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta.$$

Skoro  $\theta$  jest funkcją czasu możemy zbudować funkcję  $t \mapsto S(t)$  przyjmując we wzorze na pole  $\theta_1 = \theta(0)$  i  $\theta_2 = \theta(t)$ . Pamiętamy, że funkcja  $t \mapsto \theta(t)$  jest rosnąca (malejąca), a dla dużych  $t$ , gdy będziemy mieli  $|\theta(t) - \theta_1| > 2\pi$ , pola zakreślone po całym obrocie należy liczyć powtórnie. Zatem

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta(t)} r(\theta)^2 d\theta$$

i stąd

$$S'(t) = r(\theta(t))^2\theta'(t) = c.$$

Oznacza to, że funkcja  $t \mapsto S(t)$  jest liniowa:  $S(t) = c_1t + c_2$ . Kepler zauważał stąd, że gdy przedziały czasowe  $[t_1, t_2]$  i  $[t_3, t_4]$  mają równą długość, to

$$S(t_2) - S(t_1) = c_1(t_2 - t_1) = c_1(t_4 - t_3) = S(t_4) - S(t_3)$$

i formułował to w postaci zwanej dzisiaj *drugim prawem Keplera*:

Poła zakreślane przez promień wodzący planety w równych odstępach czasu są równe.

(Arnold „Metody matematyczne mechaniki klasycznej” pisze o stałej prędkości polowej  $c$ , która jest bezpośrednio związana z momentem pędu.)

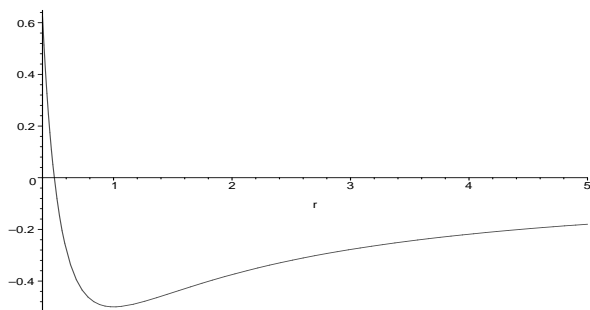
Przypomnijmy teraz równanie (2) z uwzględnieniem stałości prędkości polowej  $c$  :

$$r'' = \frac{c^2}{r^3} - GM \frac{1}{r^2}. \quad (7)$$

Według terminologii stosowanej przez Arnolda jest to układ zachowawczy z jednym stopniem swobody. Teoria takich układów była omówiona w na wykładzie z równań różniczkowych zwyczajnych. Wprowadza się funkcję zwaną potencjałem; jest to dowolna funkcja pierwotna dla –prawej strony równania (7), czyli tutaj

$$U(r) = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}.$$

Poniżej przedstawiamy kształt wykresu potencjału.



Potencjał wyznacza drugą całkę pierwszą – energię (całkowitą):

$$E = \frac{1}{2}r'^2 + U(r).$$

Z tego wykresu możemy wywnioskować, że dla energii ujemnych mamy trajektorie zamknięte (wobec wcześniejszych rozważań elipsy lub okręgi). Minimum potencjału łatwo znaleźć – jest ono dla  $r = r_0 = \frac{c^2}{GM}$ . Dla tej wartości promienia otrzymujemy orbitę kołową. Odpowiada ona energii  $E_0 = U(r_0) = -\frac{GM^2}{2c^2}$ . Dla energii ujemnych, ale większych od  $E_0$  mamy dwa rozwiązania równania  $U(r) = E$  :

$$r_1 = \frac{GM - \sqrt{G^2M^2 - 2|E|c^2}}{2|E|}, \quad r_2 = \frac{GM + \sqrt{G^2M^2 - 2|E|c^2}}{2|E|}.$$

Okres obiegu trajektorii zamkniętej odpowiadającej energii  $E$  jest równy (por. [1])

$$T = \sqrt{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}. \quad (8)$$

Po prostym całkowaniu dostaniemy

$$T = \left( \frac{\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}}{E} - \frac{GM}{\sqrt{2}|E|^{3/2}} \arcsin \frac{GM - 2|E|r}{\sqrt{GM - 2|E|c^2}} \right)_{r_1}^{r_2}$$

i po uwzględnieniu tego, że  $\sqrt{2Er^2 + 2GMr - c^2}$  znika dla  $r = r_1$  i  $r = r_2$ , dostaniemy

$$T = \frac{GM\pi}{\sqrt{2}|E|^{3/2}}. \quad (9)$$

Znajdziemy teraz długości półosi elipsy w zależności od energii. Zauważmy, że środek elipsy leży na osi  $x$ , że początek układu współrzędnych leży wewnątrz elipsy, a półoś na osi  $y$  jest krótsza. Stąd krótsza półoś ma długość  $\hat{a} := \alpha = \frac{c^2}{GM}$ , a znaleźć półoś dłuższą można na dwa sposoby. Z jednej strony

$$2\hat{a} = r_1 + r_2 = \frac{GM}{|E|},$$

a z drugiej

$$2\hat{a} = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} + \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2}.$$

Zatem  $\hat{a} = GM/2|E|$  i porównując ten wynik z (9) otrzymamy

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \hat{a}^{3/2}$$

lub

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \hat{a}^3.$$

Kepler wyrażał to w postaci nazywanej dzisiaj *trzecim prawem Keplera*:

Kwadraty okresów obiegu planet mają się do siebie tak, jak sześciiany dużych półosi elips, po których te planety się poruszają.