

Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych

Bogdan Przeradzki

Spis treści

1	Zagadnienie początkowe	21
1.1	Twierdzenie o funkcji uwikłanej Irwina–Nowaka	21
1.2	Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	25
1.3	Zależność od warunków początkowych i parametrów	28
1.4	Analityczność rozwiązań	33
2	Problem przedłużania rozwiązań	35
2.1	Jak daleko można przedłużać rozwiązania?	35
2.2	Oszacowania <i>a priori</i>	37
2.3	Twierdzenie o globalnej rozwiązalności	39
3	Równania wyższych rzędów	43
3.1	Istnienie, jednoznaczność i przedłużanie rozwiązań dla równań wyższych rzędów	43
4	Równania liniowe	47
4.1	Ogólne własności różniczkowych równań liniowych	47
4.2	Równania liniowe o stałych współczynnikach	57
4.3	Równania liniowe o współczynnikach okresowych	63
4.4	Równania liniowe wyższych rzędów	66

5	Układy dynamiczne	69
5.1	Równania autonomiczne	69
5.2	Układ zachowawczy z jednym stopniem swobody	76
5.3	Abstrakcyjne układy dynamiczne	80
5.4	Układy dynamiczne w \mathbb{R}^2	90
6	Podstawy teorii stabilności	103
6.1	Pojęcie stabilności rozwiązania	103
6.2	Stabilność rozwiązań równań liniowych	105
6.3	Metoda bezpośrednia Lapunowa	111
6.4	Linearyzacja	115
7	Zagadnienia brzegowe	119
7.1	Zagadnienia brzegowe	119
8	Bifurkacje	131
8.1	Bifurkacje kowymiaru 1	131
8.2	Bifurkacje kowymiaru 2	134
9	Wprowadzenie do chaosu	139
9.1	Układy chaotyczne z czasem ciągłym	139
9.2	Dyskretne układy chaotyczne	144
10	Równania w \mathbb{R}	149
10.1	Równania o zmiennych rozdzielonych	149
10.2	Zmiana zmiennych	153
10.3	Równania liniowe i pokrewne w \mathbb{R}^1	155
10.4	Równanie zupełne i czynnik całkujący	159
11	Równania liniowe	165
11.1	Równania liniowe	165
11.2	Rozwiązywanie równań liniowych przez rozwinięcie w szereg potęgowy	168
12	Metody dodatkowe	175
12.1	Całki pierwsze	175
12.2	Badanie stabilności rozwiązań	180

12.3 Ćwiczenia różnorodne	183
12.4 Eksperymenty numeryczne	186
A Rachunek różniczkowy w przestrzeniach Banacha	201
B Całka Riemanna funkcji o wartościach wektorowych	209
C Analityczność i holomorficzność	213
D Rachunek operatorowy Dunforda–Riesza	219
E Stopień topologiczny i punkty stałe odwzorowań	241
Wstęp	

Co to jest równanie różniczkowe? Na tak postawione pytanie nie ma właściwie sensownej odpowiedzi i to z dwóch powodów. Pierwszy z nich to ogólna trudność logiczna zawarta w samym pojęciu równania (wszelkie definicje w rodzaju „dwa wyrażenia połączone znakiem równości” należy od razu zdyskwalifikować). Drugi z powodów wynika z faktu istnienia ogromnej liczby możliwych sposobów pojawienia się pochodnej w równaniu i rodzajów tej pochodnej. Dlatego zdefiniujemy od razu pojęcie rozwiązania równania różniczkowego, traktując te trzy słowa łącznie, a na razie, rezygnując ze ścisłości (wierząc, że Czytelnik posiada intuicję, czym w ogóle jest równanie), wymienimy ograniczenia, jakie będziemy przyjmować poniżej. Przez równanie różniczkowe rozumiemy więc będziemy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja, przy czym w równaniu wystąpi przynajmniej jedna z pochodnych tej funkcji. Rozważać będziemy jedynie równania różniczkowe zwyczajne, tzn. argumentem niewiadomej funkcji jest zmienna rzeczywista i tym samym jej pochodna jest zwyczajna (nie cząstkowa). Niewiadoma funkcja najczęściej przyjmuje wartości w przestrzeni \mathbb{R}^k , ale ponieważ wiele rezultatów dowodzi się dokładnie tak samo dla dowolnej przestrzeni Banacha, takie też będzie nasze typowe założenie. W równaniu, poza pochodnymi różnych rzędów niewiadomej funkcji, może też wystąpić sama funkcja oraz jej argument. Wszystkie te wielkości występują w równaniu w złożeniu „z zewnątrz” z daną funkcją wielu zmiennych.

Dokładniej, niech X będzie przestrzenią Banacha, V będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{R} \times X^{n+1}$ (X^{n+1} oznacza sumę prostą $n + 1$ egzemplarzy przestrzeni X), a $F : V \rightarrow X$. Wtedy *rozwiązaniem równania różniczkowego*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

nazywać będziemy każdą funkcję $\phi : (a, b) \rightarrow X$ o własnościach

- (1) ϕ jest n -krotnie różniczkowalna na (a, b) ,
- (2) $(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^n(t)) \in V$ dla $t \in (a, b)$,
- (3) $F(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^n(t)) = 0$ dla $t \in (a, b)$.

Liczbę n nazywamy *rzędem* tego równania. Zwykle zwracamy uwagę tylko na warunek (3), bo w nim ukryte są dwa poprzednie jako milczące założenia. Zatem równaniami różniczkowymi nie są:

$$x' = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$$

(jest to tzw. równanie różniczkowo-całkowe),

$$x' = f(t, x(t - r))$$

(jest to tzw. równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem), a także

$$x'(f(t)) = g(t, x)$$

i wiele innych.

Potrzeba rozwiązywania równań różniczkowych (i samo pojęcie pochodnej) pojawiła się najpierw w fizyce. Najbardziej typowe równanie w fizyce to zależność między zmianą danej wielkości a samą tą wielkością, czyli – precyzyjniej – między pochodną pewnej funkcji zależnej od czasu a tą funkcją. Ta zależność jest wyrażona właśnie przez równanie różniczkowe zwyczajne. Wyjaśnia to używane przez nas oznaczenie zmiennej niezależnej t – tak oznaczany jest w fizyce czas (z ang. *time*). Należy jednak podkreślić, że nie zawsze w zastosowaniach zmienna niezależna jest czasem. Pokażemy teraz kilka przykładów zagadnień prowadzących do równań różniczkowych zwyczajnych.

Przykład 0.1. Przypuśćmy, że poruszając się jakimś pojazdem (np. samochodem albo rakieta) mamy możliwość pomiaru prędkości w każdej

chwili, a nie wiemy, jaką drogę pokonaliśmy po danym czasie, a więc w jakim punkcie naszej jednowymiarowej drogi jesteśmy w danej chwili. Oznacza to, że znamy funkcję prędkości $t \mapsto v(t)$, interesuje nas natomiast nasze położenie w dowolnej chwili. Jeśli przez x oznaczyć położenie na drodze (punkty na drodze utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi), to równaniem opisującym x w zależności od t jest

$$x' = v(t),$$

jak wynika po prostu z definicji prędkości, a rozwiązać to równanie możemy całkując funkcję v . Oczywiście wartość rozwiązania ϕ w chwili t możemy określić znając położenie w dowolnej chwili początkowej t_0 , powiedzmy x_0 ,

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

Sytuacja taka jest typowa: poza spełnianiem równania różniczkowego na rozwiązanie nakładamy jeszcze dodatkowy warunek. Wynika to zarówno z argumentacji fizycznej, jak i z samej własności tych równań – jeśli równanie różniczkowe posiada w ogóle jakieś rozwiązanie, to posiada ich nieskończenie wiele, nawet gdy ograniczymy się do rozwiązań określonych na przedziałach maksymalnych.

Przykład 0.2. Niech teraz, w sytuacji ruchu pojazdu po drodze jednowymiarowej opisanej w przykładzie 0.1, próbujemy przewidzieć jego położenie, znając zależność prędkości od miejsca na drodze, w którym pojazd się znajduje: $v(x)$. Nieco naciągając rozumowanie, możemy wyobrazić sobie, że pojazdem tym jest samochód i poruszamy się nim z maksymalną prędkością, uwzględniając znaki drogowe, zakręty (prędkość zmniejsza się w określony sposób) i wzniesienia (pod górę jedziemy wolniej, a z góry szybciej). Jak poprzednio prędkość jest pochodną funkcji położenia, a więc naszym równaniem różniczkowym jest teraz

$$x' = v(x).$$

Jest to jedno z najprostszych równań różniczkowych (tzw. równanie o zmiennych rozdzielonych), a jednak jego dyskusję pozostawiamy na później.

Przykład 0.3. Niech $N(t)$ oznacza liczbę jąder atomowych pewnej substancji promieniotwórczej w próbce. Jądra te ulegają rozpadowi, przy czym prędkość tego rozpadu jest proporcjonalna do liczby jąder w danej chwili. Już samo określenie prędkości rozpadu nastęrcza pewnych trudności, ponieważ funkcja N przyjmuje tylko wartości naturalne, a więc nie może być ciągła, a z drugiej strony, jako rozwiązanie równania różniczkowego musi być taka. Zaniedbajmy na razie ten kłopot i napiszmy równanie opisujące $N(t)$:

$$N' = -kN,$$

gdzie $k > 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności (znak „-” po prawej stronie wynika z faktu, że liczba jąder powinna się zmniejszać wraz z upływem czasu). Rozwiązaniem tego równania jest

$$N(t) = N(0)e^{-kt},$$

co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Znowu otrzymamy różne rozwiązania wybierając różne wartości $N(0)$. Oczywiście $N(t)$ dane powyższym wzorem przyjmuje wartości nie tylko całkowite, ale w praktyce $N(t)$ jest liczbą tak dużą (rzędu 10^{20}), że część ułamkową możemy zaniedbać. Sytuacja, w której modelujemy matematycznie pewne zjawisko, z natury dyskretne, za pomocą funkcji ciągłej jest typowa i stanowi o wielości zastosowań równań różniczkowych.

Przykład 0.4. Do tej pory w przykładach występowały tylko równania w przestrzeni $X = \mathbb{R}$, teraz pora na równania wielowymiarowe. Jeśli przypomnimy sobie równanie II zasady dynamiki Newtona $F = ma$, i znaczenie poszczególnych, występujących w nim symboli, to okaże się, że jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego w przestrzeni trójwymiarowej:

$$x'' = m^{-1}F(t, x, x');$$

m oznacza tu masę punktu materialnego, który porusza się w przestrzeni pod wpływem siły F zależnej od czasu $t \in \mathbb{R}$, położenia tego punktu w przestrzeni $x \in \mathbb{R}^3$ i prędkości punktu $x' \in \mathbb{R}^3$. W wielu sytuacjach siła zależy tylko od x , przy czym funkcja F o wartościach w \mathbb{R}^3 jest pochodną pewnej funkcji rzeczywistej (tzw. zachowawczy układ mechaniczny), co bardzo ułatwia rachunki.

Jeśli punktów materialnych jest więcej, np. n , to równanie Newtona ma postać układu

$$x_i'' = m_i^{-1} F_i(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n'), \quad i = 1, \dots, n.$$

Przyjmując $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$, możemy traktować ten układ jako równanie różniczkowe rzędu drugiego w przestrzeni \mathbb{R}^{3n} . Widać już potrzebę badania równań różniczkowych w dowolnych przestrzeniach skończonej wymiarowości.

Przykład 0.5. W ostatnich 20 latach coraz częściej próbuje się modelować za pomocą równań różniczkowych (i pokrewnych) układy biologiczne, ekologiczne czy społeczne. Są to przybliżenia ogromnie upraszczające, a więc niedoskonałe, ale stanowią pierwsze kroki w kierunku opisu ilościowego i możliwości przewidywania zjawisk przez tę dziedzinę wiedzy. Pokażemy przykład takiego modelu. Niech x oznacza liczbę osobników pierwszego gatunku w danym środowisku, a y liczbę osobników drugiego gatunku, przy czym pierwszy gatunek (ofiara) stanowi główne pożywienie drugiego (drapieżnik). Jak w przykładzie 0.3, zaniedbujemy części ułamkowe x i y . Nietrudno zauważyć, że liczba osobników każdego gatunku w danej chwili wpływa na tempo przyrostu (być może ujemnego) obu gatunków: liczba ofiar rośnie tym szybciej, im jest ich więcej i im mniej jest drapieżników, a liczba drapieżników rośnie wraz ze wzrostem liczby ofiar, a spada, gdy drapieżników jest zbyt dużo. Najprostszym układem równań opisujących te zależności jest *układ równań Lotki–Volterry*:

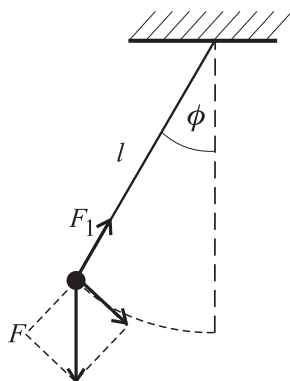
$$x' = ax - bxy,$$

$$y' = bxy - cy,$$

gdzie a , b i c są stałymi dodatnimi. Możemy je traktować jako jedno równanie rzędu pierwszego w przestrzeni \mathbb{R}^2 . Liczba uproszczeń, jakich dokonujemy, wybierając takie równania, jest ogromna (brak innych gatunków, nieuwzględnienie sposobu odżywiania gatunku ofiar, proporcjonalne warunki wzrostu itd.). Mimo to rozwiązując ten układ, przy odpowiednio wybranych stałych a , b i c , otrzymuje się wyniki zadziwiająco zgodne z rzeczywistością. Wprowadzając nowe gatunki (czyli nowe zmienne z , u , ...) i uwzględniając zależności wyższego rzędu (po

prawej stronie x^2, y^2, \dots) możemy modelować sytuację rzeczywistą z większą dokładnością.

Przykład 0.6. Rozważmy równanie Newtona dla ruchu punktu materialnego o masie m , zawieszonoego na sztywnym i nieważkim drucie o długości l i umieszczonego w tzw. jednorodnym polu grawitacyjnym. Oznacza to, że na punkt ten działa siła $\|F\| = mg$, gdzie g jest pewną stałą, a kierunek i zwrot tej siły też jest stały („pionowy w dół”). Zawieszenie na sztywnym drucie powoduje, że punkt ten może poruszać się jedynie po okręgu o środku w punkcie zaczepienia drutu i promieniu l , a ponadto poza wymienioną siłą grawitacji działa na niego także siła reakcji drutu (na rys. 1 $-F_1$).



Rys.1

Można wykazać, że każde rozwiązanie równania Newtona leży w pewnej płaszczyźnie (wyznaczonej przez punkt zaczepienia i wektor prędkości w chwili początkowej). Położenie x w tej płaszczyźnie opisane jest przez jedną liczbę rzeczywistą ϕ – kąt między wektorem F a drutem naszego wahadła. Nie ma sensu rozważać współrzędnej radialnej (odległość od punktu zaczepienia), bowiem dla niej suma sił działających na punkt wynosi $F_1 + (-F_1) = 0$, a więc ruch w tej współrzędnej nie odbywa się (por. sztywność drutu). Tak więc z równania Newtona pozostanie

$$m(l\phi)'' = F_2,$$

czyli po wstawieniu $F_2 = -mg \sin \phi$,

$$\phi'' + \frac{g}{l} \sin \phi = 0.$$

Jest to *równanie wahadła matematycznego*. Na lekcjach fizyki w szkole stosuje się równanie przybliżone – jeśli $\phi \approx 0$, to $\sin \phi \approx \phi$, co zamienia równanie wahadła na *równanie oscylatora harmonicznego*

$$\phi'' + \frac{g}{l}\phi = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że punkty ϕ i $\phi + 2k\pi$ określają to samo położenie, a więc na przykład rozwiązanie opisujące okresowy obrót wokół punktu zaczepienia nie będzie funkcją okresową. Jest tak dlatego, że równanie wahadła opisuje właściwie ruch w przestrzeni $X = S^1$, a nie w \mathbb{R} . Powinniśmy zatem rozwijać teorię równań różniczkowych na rozmaitościach gładkich (hiperpowierzchniach), a nie w przestrzeniach „płaskich”. Nie zrobimy tego, ponieważ dla zagadnień lokalnych nie ma tu żadnych różnic, a kwestie dotyczące globalnych własności rozwiązań są bardzo słabo zbadane i znacznie trudniejsze.

Przykład 0.7. W wielu zagadnieniach fizycznych napotykamy na równania różniczkowe cząstkowe. Przypuśćmy, że interesuje nas ruch struny zaczepionej w dwóch punktach końcowych. Jeśli na strunę nie działa żadna siła z wyjątkiem jej sprężystości, to ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie, a wychylenie $u(x, t)$ punktu struny leżącego w odległości x od jednego końca w chwili t jest opisane równaniem (wyprowadzenie *równania falowego* i jego dyskusję można znaleźć w [?]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie c jest pewną stałą. Rozwiązanie u musi spełniać dwa tzw. warunki brzegowe, wynikające z faktu zaczepienia struny na końcach:

$$u(t, 0) = 0 = u(t, l)$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ oraz dwa warunki początkowe (powinniśmy znać położenie i prędkość każdego punktu struny w chwili $t = 0$):

$$u(0, x) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x),$$

gdzie g i h są dwiema danymi funkcjami określonymi na $[0, l]$. Jeżeli funkcję u będziemy traktowali jako $t \mapsto u(t, \cdot)$, to równanie cząstkowe

sprowadza się do równania zwyczajnego $u'' = c^2 Au$, gdzie A jest operatorem działającym w pewnej przestrzeni funkcyjnej, której elementami są funkcje $[0, l] \ni x \mapsto \mathbb{R}$, a operator A różniczkuje je dwukrotnie. Tutaj jednak natrafiamy na poważną przeszkodę: nie ma takiej przestrzeni Banacha X , aby $A : X \rightarrow X$ i był ciągły. Albo przestrzeń X jest ogólniejszego typu (np. przestrzeń funkcji klasy C^∞ z naturalną topologią jest przestrzenią Frécheta, przestrzeń dystrybucji jest lokalnie wypukła itd.), albo operator A przestaje być ciągły i jako liniowy jest zdefiniowany tylko na pewnej podprzestrzeni gęstej (typowym przykładem jest wybór $X = \{u \in C[0, l] : u(0) = u(l) = 0\}$, gdy A jest określony na podprzestrzeni funkcji klasy $C^2(0, l)$). Zatem to równanie różniczkowe zwyczajne nie wpada do klasy badanych tutaj równań, a teoria równań różniczkowych cząstkowych nie jest fragmentem teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Podamy teraz pewną metodę rozwiązywania problemów, takich jak powyższy, pochodzącą od Fouriera. Prowadzi ona do równań różniczkowych zwyczajnych i to takich, w których zmienna niezależna nie jest czasem. Załóżmy więc, że rozwiązanie jest szczególnej postaci

$$u(t, x) = \phi(t)\psi(x).$$

Wstawiając je do równania otrzymamy $\phi''(t)\psi(x) = c^2\phi(t)\psi''(x)$, czyli ilorazy

$$c^{-2} \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \lambda$$

muszą być stałe. Z warunków brzegowych wynika $\psi(0) = \psi(l) = 0$, czyli funkcja ψ powinna spełniać równanie różniczkowe wraz z dwoma warunkami:

$$\psi''(x) = \lambda\psi(x), \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Jest to przykład tzw. zagadnienia brzegowego, o czym będzie jeszcze mowa w tej książce. Jak łatwo zauważyć, przy każdej wartości λ funkcja $\psi = 0$ spełnia wszystkie potrzebne warunki. Jest jednak nieciekawa, bo zeruje nam całe rozwiązanie u . Należy więc wybrać takie wartości λ , przy których problem brzegowy posiada rozwiązanie niezerowe (nazywamy je wartościami własnymi problemu brzegowego, co odpowiada

temu samemu pojęciu dla operatora liniowego, znanemu z algebry liniowej). Przekonamy się później, że wartościami własnymi są

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a odpowiadającymi im rozwiązaniami niezerowymi wielokrotności funkcji (własnych)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\frac{\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tak się szczęśliwie składa, że układ funkcji ψ_n jest ortonormalny zupełny w przestrzeni $L^2(0, l)$ (po to pomnożyliśmy funkcję sinus przez $\sqrt{2/l}$, aby uzyskać normę 1 funkcji ψ_n w tej przestrzeni). Nie jest to przypadek, ale podstawowa własność operatorów zwartych samosprężonych. Tym samym przy założeniu, że funkcje g i h należą do przestrzeni $L^2(0, l)$, możemy je rozwinąć w szereg Fouriera względem tego układu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(x).$$

Z drugiej strony, jeśli $\psi = \psi_n$, to funkcja $\phi = \phi_n$ będzie musiała spełniać równanie

$$\phi_n'' = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{l^2} \phi_n.$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcje

$$\phi_n(t) = \alpha_n \sin n\frac{\pi c}{l}t + \beta_n \cos n\frac{\pi c}{l}t$$

spełniają to równanie, a z teorii równań różniczkowych liniowych wynika, że innych rozwiązań nie ma.

Spróbujmy teraz znaleźć rozwiązanie naszego zadania w postaci

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \psi_n(x),$$

gdzie funkcje ϕ_n nie są do końca określone, bo musimy jeszcze odpowiednio wybrać stałe α_n i β_n . Nietrudno zauważyć, że warunki na

funkcję u , wynikające z zaczepienia struny na końcach, są spełnione niezależnie od wyboru tych stałych. Równanie różniczkowe cząstkowe będzie także spełnione, o ile dopuszczalne jest różniczkowanie sumy szeregu wyraz po wyrazie. Pozostaje wyznaczyć stałe z warunków początkowych. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(0)\psi_n(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(0)\psi_n(x) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n(x).$$

Wobec jednoznaczności rozwinięcia w szereg Fouriera i $\phi_n(0) = \beta_n$, $\phi'_n(0) = \frac{n\pi c}{l}\alpha_n$, dostajemy wzory na szukane stałe:

$$\alpha_n = \frac{l}{n\pi c}b_n, \quad \beta_n = a_n.$$

Potrzebnym rozwiązaniem jest więc funkcja

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi c} b_n \sin n \frac{\pi c}{l} t + a_n \cos n \frac{\pi c}{l} t \right) \sin n \frac{\pi}{l} x$$

dana w postaci sumy szeregu. Aby jednak szereg ten można było różniczkować wyraz po wyrazie, należy narzucić pewne warunki na ciągi (a_n) i (b_n) , a więc na funkcje g i h . Tym problemem nie będziemy się tu zajmować.

Przykład 0.8. W mechanice kwantowej rozważa się tzw. *równanie Schrödingera*, które opisuje gęstość prawdopodobieństwa znalezienia danej cząstki w punkcie. W najprostszym przypadku, kiedy cząstka znajduje się w polu sił o zadanym potencjale V , a przestrzeń jest jednowymiarowa, jest to równanie

$$u'' + (\lambda - V(x))u = 0.$$

Poszukujemy takich wartości λ , przy których równanie to posiada niezerowe rozwiązanie $u \in L^2(\mathbb{R})$. Znowu więc jest to problem znajdowania wartości własnych.

Po tym przeglądzie przykładów praktycznych, wróćmy do matematycznej strony zagadnienia. Widzieliśmy, że większość równań miała postać

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Z drugiej strony możliwość rozwikłania równań względem najwyższej pochodnej jest własnością dość typową (por. tw. o funkcji uwikłanej), zatem możemy się zająć tylko takimi równaniami. Trzeba oczywiście zdawać sobie sprawę z wielu ograniczeń tego podejścia, bo przecież tw. o funkcji uwikłanej informuje tylko o istnieniu lokalnym takiej funkcji f , ale decydujący jest fakt, że nie umiemy zbudować dostatecznie bogatej teorii dla równań nierozwikłanych względem najwyższej pochodnej.

Drugie założenie, jakie czynimy, nie jest restryktywne: ograniczymy się w teorii ogólnej do równań rzędu pierwszego. Istotnie, każde równanie $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ sprowadza się do układu równań rzędu pierwszego:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x'_{n-1} &= x_n, \\ F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_n) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie x_1 reprezentuje samą funkcję, x_2 – jej pierwszą pochodną, \dots , x_n – $n-1$ -szą pochodną. Układ ten można traktować jako jedno równanie w przestrzeni X^n , pamiętając o tym, że każdą funkcję $\phi : (a, b) \rightarrow X^n$ można uważać za układ n funkcji $\phi_i : (a, b) \rightarrow X$, $i = 1, \dots, n$, a pochodną ϕ jest wtedy układ ϕ'_i , $i = 1, \dots, n$. Reasumując, będziemy rozważać równania różniczkowe postaci

$$x' = f(t, x),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times X \supset U \rightarrow X$ i U jest otwarty. Przy naszej definicji rozwiązania należy założyć ciągłość f , aby otrzymać sensowną teorię. Ta definicja nie jest jedyna, a więc i założenie ciągłości przy innych podejściach (np. Carathéodory'ego) jest osłabiane.

Z przyczyn wspomnianych przy okazji omawiania przykładów będziemy nakładać dodatkowy warunek na rozwiązanie. Najprostszy jest warunek początkowy. Mówimy, że funkcja $\phi : (a, b) \rightarrow X$ jest rozwiązaniem

zagadnienia początkowego (albo Cauchy'ego):

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

jeżeli ϕ jest rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego, $t_0 \in (a, b)$ i $\phi(t_0) = x_0$. Jak łatwo sprawdzić, funkcja ϕ jest rozwiązaniem tego zagadnienia początkowego wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłym rozwiązaniem równania

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Okazuje się, że wygodniej jest badać to równanie całkowe zamiast wyjściowego zagadnienia. Występująca tutaj całka jest całką Riemanna funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha. Jej definicja i własności są analogiczne, jak dla funkcji rzeczywistej, a wiadomości na ten temat (i inne) można znaleźć w Dodatku B.

Zdecydowaną większą część wykładu zajmuje jakościowa teoria równań różniczkowych, a nie metody rozwiązywania tych równań. Dzieje się tak dlatego, że prawie żadnego równania różniczkowego nie można efektywnie rozwiązać, przy czym stopnie tej nieefektywności są bardzo różne: niezwykle rzadko rozwiązania możemy wyrazić przez funkcje elementarne (albo znane i stabilizowane funkcje specjalne); w zasadzie uważa się równanie za rozwiązane, gdy podamy jego rozwiązania w postaci całki od danych funkcji lub w postaci szeregu, dla którego istnieje procedura obliczania wyrazów; ale najczęściej nie jest aż tak dobrze. Wówczas cenne są informacje, takie jak: czy rozwiązanie istnieje, na jaki przedział daje się przedłużyć, czy jest funkcją ograniczoną, jaka jest klasa gładkości tej funkcji, jeśli jest ona określona na przedziale nieograniczonym, to jakie jest jej zachowanie w nieskończoności, czy ma ona miejsca zerowe i jaki jest ich rozkład itp. Własności te chcemy poznać bez rozwiązywania samego równania, a jedynie na podstawie danych funkcji występujących w równaniu. Te informacje mają podwójne znaczenie. Z jednej strony możemy stwierdzić, czy nasze rozwiązania pozostają z grubsza w zgodzie z zachowaniem obiektu realnego opisanego przez równanie. Jeśli nie, to model matematyczny należy odrzucić. Jeśli zachodzi jakościowa zgodność, można przejść do drugiego etapu weryfikacji modelu. Znajdujemy wówczas rozwiązania

przybliżone (por. [?]) równania posługując się na przykład komputerem i sprawdzamy ich zgodność ilościową z zachowaniem obiektu realnego. Do wyboru metody znajdowania rozwiązań przybliżonych także potrzebne są informacje o własnościach rozwiązania dokładnego, a przede wszystkim sam fakt jego istnienia. Nie ma takiej metody numerycznej, którą można stosować do wszystkich równań, a ponadto metody o szerszym zakresie stosowalności są mniej dokładne. W części I będziemy więc rozwijać jakościową teorię równań różniczkowych zwyczajnych, a w części II przedstawimy szereg metod rachunkowych prowadzących do rozwiązania lub opisu rozwiązania takich równań. Obie części zaopatrzone są w ćwiczenia, których rozwiązanie jest w większości niezbędne do zrozumienia całości wykładu.

W ostatnich latach coraz częściej mówi się o równaniach różniczkowych zwyczajnych z pozycji teorii układów dynamicznych. W tym względzie autor nie jest więc oryginalny. W szczególności omówiono tutaj teorię układów chaotycznych i zaproponowano eksperymenty numeryczne pozwalające na odkrywanie nowych układów. Wydaje się, że teoria układów chaotycznych, mimo burzliwego rozwoju, jest ciągle na etapie doprecyzowania definicji, mnogości hipotez – ich liczba chyba przekracza liczbę udowodnionych rezultatów – i poszukiwania nowych metod. Jest dziedziną mającą liczne zastosowania praktyczne, leżącą na pograniczu wielu nauk. Nektórzy nawet mówią o nowym paradygmacie matematyki [?].

Książka zawiera też rozdział o zagadnieniach brzegowych, które w większości polskich monografii są całkowicie nieobecne. Sądzimy jednak, że są one prostym wstępem do zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych, gdzie leżą w samym sercu teorii. Z drugiej strony ich rozważanie jest prawie niemożliwe bez zastosowania metod topologicznych analizy nieliniowej bazujących na ideach wielkiego polskiego matematyka Juliusza Schaudera (por. Dodatek E).

Pominięto natomiast całkowicie tematykę metod numerycznych dla równań różniczkowych zwyczajnych, które stanowią ważny element praktycznego zastosowania tej dziedziny. Jeśli używamy komputera do narysowania wykresu rozwiązania równania, czy też jego trajektorii, wtedy odbywa się to po uprzednim znalezieniu rozwiązań przybliżonych. Stosując zintegrowane pakiety matematyczne, takie jak MAPLE, nie wi-

dzimy procesu, który się za tym kryje. Ta tematyka jest jednak bardzo obszerna i dobrze zaprezentowana w łatwo dostępnej literaturze (po polsku [?, ?, ?]). W dwóch pierwszych wspomnianych pozycjach można też znaleźć więcej informacji o pakiecie MAPLE używanym poniżej w eksperymentach numerycznych.

Niniejsza książka powstała na bazie notatek z wykładu o metodach matematycznych mechaniki, prowadzonego wielokrotnie przez autora dla studentów czwartego roku studiów matematycznych specjalności: zastosowania matematyki. Znajduje to odbicie w sposobie przedstawienia materiału. Zakładamy mianowicie znaczne ogólnomatematyczne przygotowanie czytelnika, chociaż dla ułatwienia na końcu znajdują się dodatki zawierające potrzebne wiadomości z analizy matematycznej w przestrzeniach Banacha, analizy funkcjonalnej, ze szczególnym uwzględnieniem rachunku operatorowego, czy też z topologicznych metod analizy nieliniowej. Czytelnik nieprzyzwyczajony do języka analizy funkcjonalnej będzie miał jednak ogromne trudności ze zrozumieniem tego podręcznika. Język ten pozwala na wydobycie zasadniczych treści matematycznych bez balastu zapisu funkcji we współrzędnych, ale wymaga znacznej kultury matematycznej. Zdaniem autora również sztywny i suchy język, którego często używają autorzy podręczników matematycznych, utrudnia zrozumienie idei ukrytych w gąszczu schematów do zapamiętania. Być może więc autor posunął się za daleko na drodze do „uczłowieczenia” poruszanych zagadnień. W ten sposób zresztą ograniczył grono czytelników do studentów studiów matematycznych lat wyższych, doktorantów i zawodowych matematyków specjalności innych niż równania różniczkowe. Dla nich wszystkich jest oczywiste, że nie ma innej drogi do opanowania pewnej wiedzy matematycznej niż droga samodzielnych przemyśleń, samodzielnego rozwiązania zadań (ćwiczeń). Stąd wiele zagadnień jest zaledwie poruszonych w tej książce, wiele rozumowań ma charakter szkicowy. Znaczną liczbę błędów wykryli recenzenci tego podręcznika, a wcześniej także studenci i doktoranci autora, za co w tym miejscu bardzo dziękuję. Nie zmienia to faktu, że za sposób prezentacji materiału, wszelkie usterki i poważniejsze błędy, które być może pozostały, odpowiedzialność ponosi wyłącznie autor.

Eksperymenty numeryczne

W podrozdziale tym przekonamy się, że posługując się komputerem osobistym wyposażonym w jakikolwiek program matematyczny wspomagający obliczenia – my zastosujemy MAPLE – możemy badać układy dynamiczne dyskretne i z czasem ciągłym, wybierając te, które prawdopodobnie są chaotyczne. Nasze programy, zresztą bardzo proste, można z łatwością przełożyć na którykolwiek z systemów: Mathematica, Matlab, czy Derive. Fakt, że programy te mogła napisać osoba bez przygotowania informatycznego świadczy o tym, że eksperymentować w ten sposób z chaosem może właściwie każdy. Mamy też nadzieję, że będzie to stanowić zachętę do takich działań. Wydaje się zresztą, że w tej dziedzinie matematyki asysta komputera będzie konieczna nawet na tak „ludzkim” etapie działania, jak dowodzenie twierdzeń. Świadczą o tym tak spektakularne wyniki, jak prace Mrozka, Mishaikova, Szymczaka [?, ?] o chaotyczności układu Lorenza, nie wspominając o innych.

Zacznijmy od eksperymentów z jednowymiarowymi układami dyskretnymi. Ilustracją będzie układ logistyczny

$$f(x) := \mu x(1 - x), \quad x \in [0, 1],$$

ale czytelników zachęcamy do zbadania innych, takich jak:

$$f(x) := \mu \sin(1 - x/\pi),$$

$$f(x) := x \exp(r(1 - x)),$$

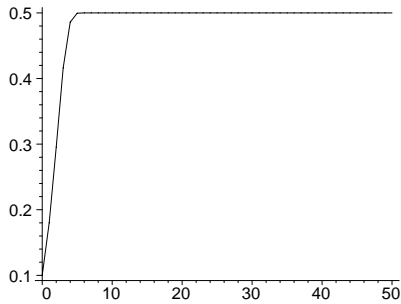
$$f(x) := r[1 - (2x - 1)^4],$$

i do samodzielnych prób.

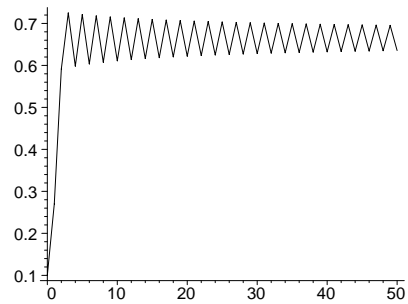
```
iteracje:=proc(f,x0,n)
local i;
x(0):=x0;
for i from 1 to n do
    x(i):=f(x(i-1))
od;
PLOT(CURVES([seq([j,x(j)],j=0..n)]));
end;
```

Procedura iteracje rysuje uciąglony wykres funkcji $j \rightarrow f(j)$ dla j od 1 do n przy punkcie startu x_0 .

```
iteracje(x->2*x*(1-x),.1,50);
iteracje(x->3*x*(1-x),.1,50);
```



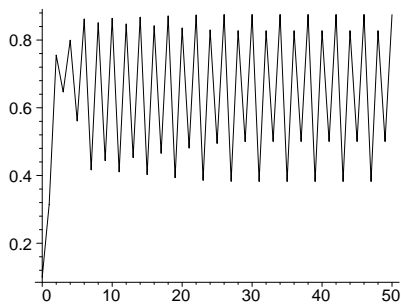
Rys. 14



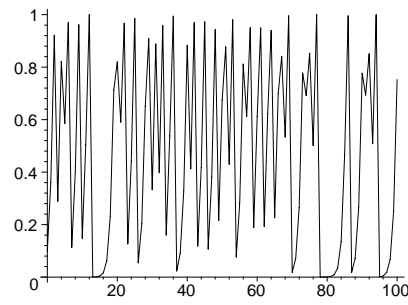
Rys. 15

Widzimy przyciągającą trajektorię okresową o okresie 2 na rys. 15. Na rys. 14 przyciągający jest punkt stały.

```
iteracje(x->3.5*x*(1-x),.1,50);
iteracje(x->4*x*(1-x),.1,100);
```



Rys. 16



Rys. 17

Na rys. 16 mamy przyciągającą trajektorię o okresie 4, a na rys. 17 nie widać już żadnej trajektorii okresowej. Oczywiście nie możemy być pewni, że jej nie ma, bo przykładowo okres może być większy niż badany odcinek trajektorii.

```
iteracje2:=proc(f,x0,y0,n)
local i;
x(0):=x0; y(0):=y0;
```

```

for i from 1 to n do
    x(i):=f(x(i-1));
    y(i):=f(y(i-1))
od;
PLOT(CURVES([seq([j,x(j)],j=0..n)]),
POINTS(seq([j,y(j)],j=0..n)))
end:

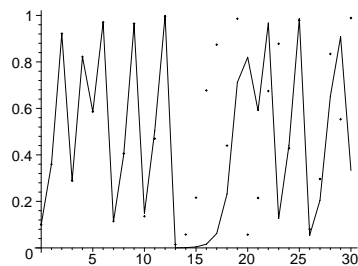
```

Ta procedura rysuje jednocześnie dwa wykresy dla dwóch punktów startu x_0 i y_0 . Drugi z nich nie jest uciągłony. Dla bardzo bliskich punktów startu możemy przekonać się, że po niewielkiej liczbie kroków trajektorie całkowicie się rozchodzą (rysunek poniżej). To zjawisko wrażliwości na warunki początkowe jest charakterystyczne dla układów chaotycznych.

```

iteracje2(x->4*x*(1-x),.1,.10001,30);

```



Rys. 18

```

gestosc:=proc(f,dlugosc,r0,rk,m,siec,n)
local i,j,k,step;
step:=(rk-r0)/m;
r(0):=r0;
for j from 0 to m do
    r(j):=r(0)+j*step;
    for k from 1 to dlugosc/siec do
        x(j,0,k):= k*siec;
        for i from 1 to n do
            x(j,i,k):=f(r(j),x(j,i-1,k))
        od;
    od;
end:

```

```

od;
od;
PLOT(POINTS(seq(seq(seq([r(j),x(j,i,k)],i=10..n),
k=2..dlugosc/siec),j=0..m),SYMBOL(POINT)));
end:

```

Procedura powyższa zaznacza na układzie współrzędnych (μ, x) trajektorie dyskretnego układu dynamicznego danego przez funkcję f zależną od parametru μ . Dla kolejnych wartości parametru wybiera cały zestaw trajektorii, przy czym początkowe 10 punktów trajektorii jest opuszczanych. W rezultacie, jeśli trajektoria jest przyciągana przez jakiś punkt, to na wykresie zobaczymy tylko ten punkt, za to „pogrubiony”. Jeżeli dla danej wartości parametru μ trajektorie równomiernie rozkładają się na całym odcinku, wtedy cały przedział nad μ jest zaczeroniony. Jeżeli trajektorie są przyciągane przez trajektorie okresowe, wówczas nad μ zobaczymy tylko skończoną liczbę punktów.

Argumenty procedury:

dlugosc – długość odcinka, na którym działa dyskretny układ dynamiczny;

r0 – początkowa wartość parametru μ ;

rk – końcowa wartość parametru μ ;

m – ilość pośrednich wartości μ (na tyle przedziałów dzielimy odcinek $[r0, rk]$);

siec – punktami startu kolejnych trajektorii są $0 + k \cdot siec$, gdzie k zmienia się od 1 do $\frac{dlugosc}{siec}$;

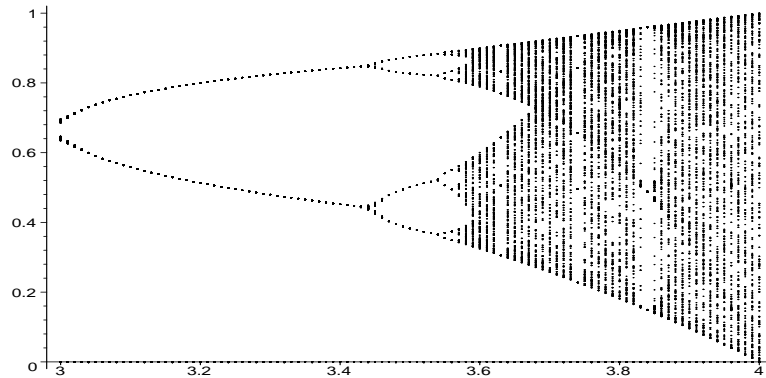
n – długość trajektorii.

Uwaga. Procedura jest dostosowana do układów określonych na przedziale o lewym końcu 0. W ogólnym przypadku należałoby ją nieco zmodyfikować.

```

gestosc((mu,x)->mu*x*(1-x),1.,3.,4.,100,.1,100);

```



Rys. 19

Obraz, który widzimy na rys. 19 jest często nazywany „drzewem figowym”. Wartości parametru μ , dla których mamy rozwidlenia, to punkty bifurkacji podwojenia okresu. Dla większych wartości μ obraz jest ciemny. Tam można podejrzewać zachowania chaotyczne układu. W tych ciemnych obszarach znajdują się wąskie przerwy, tzw. „okna”, gdzie znowu mamy przyciągające trajektorie okresowe. Dla $\mu = 4$ znowu mamy zachowanie aperiodyczne.

```

rozklad:=proc(g,x0,n,m)
local x,i,j,licz;
x(0):=x0;
for j from 1 to m do
    licz(j):=0
od:
for i from 1 to n do
    x(i):=g(x(i-1));
for j from 1 to m do
if x(i)>=(j-1)/m
and x(i)<j/m then licz(j):=licz(j)+1 fi:
od:
od:
PLOT(CURVES([seq([evalf(j/m),licz(j)/n],j=1..m)]));
end:

```

Procedura `rozklad` rysuje wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu trajektorii dla dyskretnego układu dynamicznego na przedziale $[0, 1]$.

Argumenty procedury:

`g` – funkcja definiująca układ ;

`x0` – punkt startu;

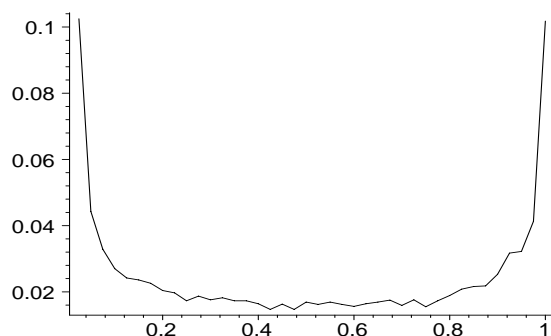
`n` – długość badanego kawałka trajektorii; tyle iteracji funkcji `g` rozpatrujemy;

`m` – liczba równych kawałków, na jakie dzielimy przedział $[0, 1]$.

Dla każdego kawałka bierzemy częstość pojawiania się punktów trajektorii w tym kawałku.

Charakterystyczny dla układu logistycznego wykres prawie stały w środku przedziału, gwałtownie rosnący przy jego krańcach widzimy na rys. 20. Funkcja, którą tu tylko aproksymujemy jest znana: $\phi(x) = (\pi^2 x(1-x))^{-1/2}$ (por. [?]).

`rozklad(x->4*x*(1-x), .2, 10000, 40)` ;



Rys. 20

Jedną z najważniejszych charakterystyk liczbowych układów dynamicznych jest wykładnik Lapunowa. Zdefiniujemy go dla układu semidynamicznego dyskretnego na prostej lub odcinku, chociaż istnieją odpowiedniki dla układów wielowymiarowych i ciągłych. Niech $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ będzie funkcją klasy C^1 i $x_0 \in (a, b)$. Tworzymy ciąg $(x_n) \subset (a, b)$ dany rekurencyjnie:

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Wtedy *wykładnikiem Lapunowa* nazywamy liczbę

$$\lambda(x_0) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

W wielu książkach o układach dynamicznych dla fizyków, chemików, biologów lub inżynierów, np. [?], zamiast granicy górnej pojawia się tu zwykła granica, mimo że nie wiemy, czy rozpatrywany ciąg jest zbieżny. Jeżeli sam ciąg (x_i) jest zbieżny do pewnej liczby x_∞ , to na podstawie tw. Stolza (zob. dowolny podręcznik klasycznej analizy matematycznej)

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| - \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|}{(n+1) - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |f'(x_n)| = \ln |f'(x_\infty)| \leq 0, \end{aligned}$$

bo $x_i \rightarrow x_\infty$ wyklucza $|f'(x_\infty)| > 1$. Nieco trudniej pokazać, że ciąg w definicji wykładnika Lapunowa jest zbieżny do liczby niedodatniej dla trajektorii dążących do pewnej trajektorii okresowej y_0, y_1, \dots, y_{p-1} , gdzie $y_{i+1} = f(y_i)$, $y_p = y_0$. Wtedy

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(y_i)|.$$

Jednak także dla innych trajektorii możemy uzyskać istnienie granicy. Jeszcze innym problemem jest zależność λ od x_0 . Okazuje się, że poza zbiorem miary zero funkcja λ jest stała.

Za [?] zobaczmy, jak można interpretować wykładnik Lapunowa. Wybierzmy x_0 i $\varepsilon > 0$. Interesuje nas oszacowanie odchylenia $r_n(x_0, \varepsilon) = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|$, gdzie f^n oznacza n -krotną iterację funkcji f . Odchylenie to jest w pierwszym przybliżeniu proporcjonalne do ε . Jeśli zapiszemy

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon \exp(n\mu),$$

gdzie μ jest liczbą zależną od ε i n , podzielimy obie strony przez ε i przejdziemy do granicy z $\varepsilon \rightarrow 0$, to dostaniemy

$$(f^n)'(x_0) = \exp(n\mu).$$

Stąd po wyliczeniu μ otrzymamy

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \lambda(x_0). \end{aligned}$$

Zatem niedodatniość wykładnika Lapunowa oznacza, że błąd, jaki popełniamy, wybierając nieco zmieniony punkt startu, nie rośnie wzdłuż trajektorii (a nawet maleje, gdy $\lambda(x_0) < 0$). Jeśli natomiast $\lambda(x_0) > 0$, wtedy błąd ten rośnie wykładniczo wraz z n . Otrzymujemy wrażliwość na warunki początkowe przynajmniej w punkcie x_0 .

```

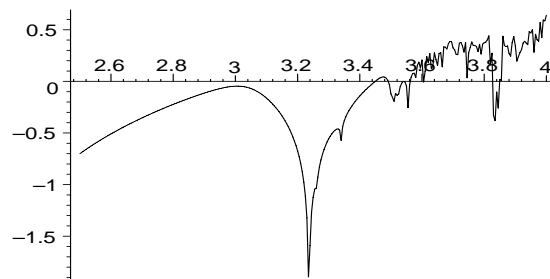
lapunov:=proc(f,r0,rk,m,x0,n,epsilon)
local i,j,step,r,la;
step:=(rk-r0)/m;
r(0):=r0;
x(0):=x0;
for j from 0 to m do
r(j):=r(0)+j*step;
for i from 1 to n do
x(i):=f(r(j),x(i-1));
if abs(evalf(subs(x=x(i),diff(f(r(j),x),x))))<10-3)
then x(i):=x(i)+epsilon
else x(i):=x(i)
fi;
od;
la(j):=1/n*sum(ln(abs(subs(x=x(k),diff(f(r(j),x),x))))),
k=1..n);
od;
PLOT(CURVES([seq([r0+k*step,la(k)],k=0..m)]))
end:

```

Procedura lapunov rysuje wykres funkcji wykładnika Lapunowa dla jednowymiarowego dyskretnego układu dynamicznego danego przez funkcję f w zależności od parametru r (pierwszy argument tej funkcji). Argumenty procedury:

f – funkcja dwóch zmiennych;

r_0, r_k – zakres zmienności parametru;
 m – ilość pośrednich wartości parametru, dla których obliczamy wykładnik;
 x_0 – punkt startu;
 n – w definicji wykładnika Lapunowa występuje granica przy n dążącym do nieskończoności. Ten parametr trzeba wybrać dość duży, nie mamy bowiem kontroli nad różnicą między granicą a n -tym wyrazem ciągu;
 ϵ – mały parametr kontrolny związany z problemem, gdy trajektoria zbliży się za bardzo do punktu, w którym pochodna f znika. Wówczas logarytm w definicji wykładnika zbliża się do $-\infty$ i taki składnik albo nie może być obliczony, albo błąd z nim związany niszczy wartość całych obliczeń. Przyjeliśmy arbitralnie, że kłopot pojawia się, gdy wspomniana pochodna ma moduł mniejszy od 10^{-3} . Wtedy do punktu trajektorii dodajemy ϵ .

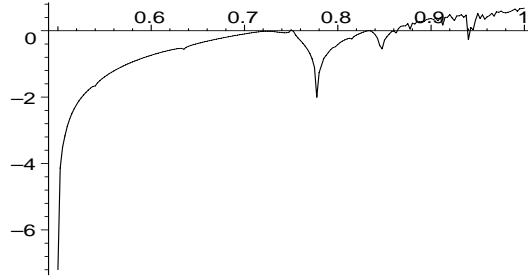


Rys. 21

To jest wykres funkcji parametr \rightarrow wykładnik Lapunowa dla układu logistycznego. Miejsca zerowe tej funkcji to punkty bifurkacji podwojenia okresu. Przedziały, gdzie ten wykładnik jest dodatni, to obszary chaosu.

Uwaga 0.1. Dla funkcji $x \rightarrow r \sin(\pi x)$ należy zapisać π w postaci przybliżonej (ang. *floating number*).

Uwaga 0.2. Procedura może źle działać dla funkcji nieróżniczkowalnych w pewnych punktach.



Rys. 22

Dla funkcji $x \rightarrow r \sin(\pi x)$ obraz jest, jak widać, bardzo podobny.

Zajmiemy się teraz jeszcze inną liczbową charakterystyką układów 1-wymiarowych – funkcją autokorelacji (por. [?]). Załóżmy, że dla wybranego punktu startu x_0 istnieje wartość średnia dla całej trajektorii

$$\bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i.$$

Oznaczmy przez \hat{x}_i odchylenie i -tego punktu trajektorii od wartości średniej: $\hat{x}_i := x_i - \bar{x}$. Wówczas dla $m = 1, 2, 3, \dots$ możemy zdefiniować *funkcję autokorelacji*

$$C(m) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{x}_{i+m} \hat{x}_i.$$

Łatwo zauważyć, że dla trajektorii o okresie p $C(p)$ jest liczbą dodatnią równą

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \hat{x}_i^2$$

(por. z wariancją rozkładu prawdopodobieństwa), a dla pozostałych m $C(m) = 0$. Podobnie jest dla trajektorii zblizających się do okresowych. W układach chaotycznych funkcja autokorelacji $m \mapsto C(m)$ ma więcej niż jeden „pik”.

autokorel := proc(g, z0, n)

```

local i,m,xsr,C;
x(0):=z0;
for i from 1 to 2*n do
x(i):=g(x(i-1))
od;
xsr:=sum(x(j),j=0..2*n)/(2*n+1);
for m from 1 to n do
C(m):=sum((x(j+m)-xsr)*(x(j)-xsr),j=0..n)/(n+1)
od;
RETURN(seq([k,C(k)],k=1..n));
end:

```

Procedura autokorel oblicza przybliżoną funkcję autokorelacji dla 1-wymiarowego dyskretnego układu dynamicznego. Mierzy ona samopodobieństwo sygnału $x(j)$, j i jego przesunięcia $x(j + m)$, j . Argumenty: g – funkcja; $z0$ – punkt startu; n – liczba iteracji, natomiast procedura autokorel1 rysuje wykres funkcji autokorelacji $k \rightarrow C(k)$.

```

autokorel1:=proc(g,z0,n)
local i,m,xsr,C;
x(0):=z0;
for i from 1 to 2*n do
x(i):=f(x(i-1))
od;
xsr:=sum(x(j),j=0..2*n)/(2*n+1);
for m from 1 to n do
C(m):=sum((x(j+m)-xsr)*(x(j)-xsr),j=0..n)/(n+1)
od;
PLOT(CURVES([seq([j,C(j)],j=1..n)]));
end:

```

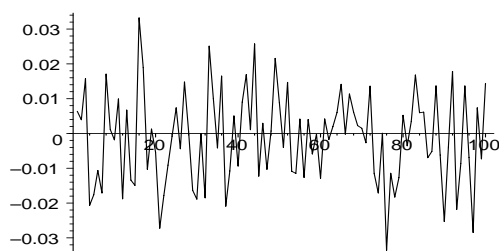
Zobaczymy efekt zastosowania tych procedur.

```
autokorel(x->4*x*(1-x):, .1, 20);
```

$[1, -1.1454893867e - 1]$, $[2, -9.788668647e - 2]$, $[3, .3353366716e - 1]$,

```
[4, -.1869500762e - 1], [5, -.1870018666e - 1], [6, -.7007384153e - 2],
[7, -.9731856133e - 2], [8, .6298727904e - 2], [9, -.2180873155e - 2],
[10, -.4307367347e - 2], [11, .1783201632e - 1], [12, -.2067747624e - 1],
[13, .1264753304e - 1], [14, -.1567200480e - 1], [15, -.1849488553e - 1],
[16, .3019274304e - 1], [17, .4647608576e - 2], [18, -.2092977306e - 1],
[19, .3161403249e - 2], [20, .1862292337e - 1],
```

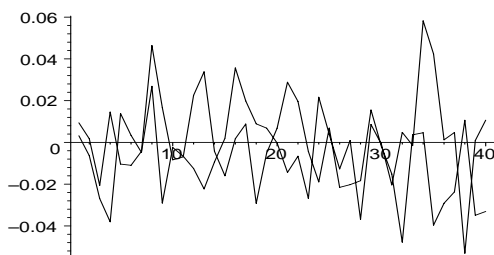
```
autokorel1(x->4*x*(1-x):, .1, 100);
```



Rys. 23

Teraz na jednym wykresie przedstawimy funkcje autokorelacji dla dwóch wartości parametru

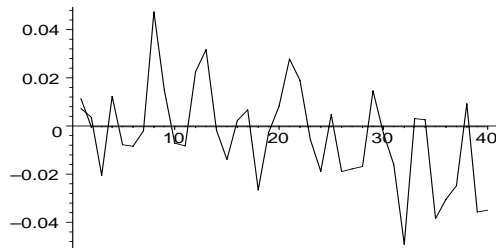
```
with(plots):
display(autokor1(x->4*x*(1-x), .15, 40), autokor1(x->
3.8*x*(1 - x), .15, 40));
```



Rys. 24

i dla różnych punktów startu:

```
display(autokor1(x->4*x*(1-x), .4, 40), autokor1(x->
4*x*(1-x), .5, 40));
```



Rys. 25

Ćwiczenie 0.1. Wyjaśnić charakter wykresu bez „pików”.

W naszych rozważaniach już kilkakrotnie pojawiały się pojęcia charakterystyczne dla probabilistyki (wartość średnia, wariancja). O stochastycznym podejściu do teorii układów dynamicznych traktuje książka [?].

Przejdźmy do układów dynamicznych z czasem ciągłym. Dla układu Lorenza możemy zaobserwować zachowanie chaotyczne.

```

sigma:=10:
b:=evalf(8/3):
r:=25
lorenz:=diff(x(t),t)=sigma*(y(t)-x(t)),diff(y(t),t)=
-x(t)*z(t)+r*x(t) -y(t),diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t):

ff:=proc(x0,y0,z0)
dsolve({lorenz,x(0)=x0,y(0)=y0,z(0)=z0},[x(t),y(t),z(t)],
numeric,output=listprocedure);
end proc:

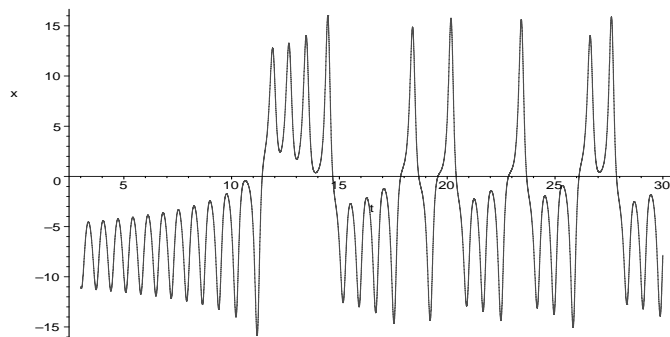
```

Dla $r = 25$ narysujemy wykres (rys. 26) współrzędnej x rozwiązania z przypadkowo wybranym punktem startu dla zakresu zmiennej niezależnej t od 3 do 30, a następnie wykresy (rys. 27 i 28) pozostałych dwóch współrzędnych. Z wykresu x możemy odczytać liczby obiegów jednego skrzydła, aż do przejścia na drugie (por. podrozdział 9.1). Następnie wykresy współrzędnych y i z .

```

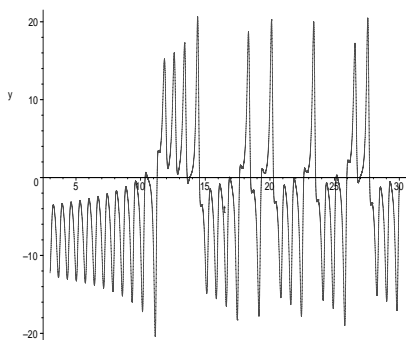
with(plots):
odeplot(ff(1,2,3),[t,x(t)],3..30);

```

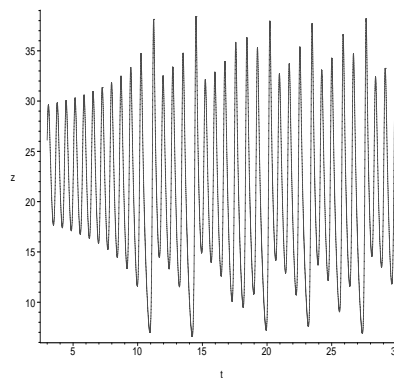


Rys. 26

```
odeplot(ff(1,2,3), [t,y(t)], 3..30);
odeplot(ff(1,2,3), [t,z(t)], 3..30);
```



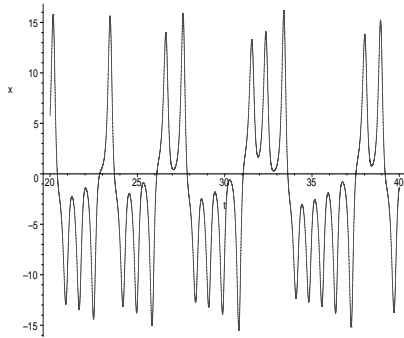
Rys. 27



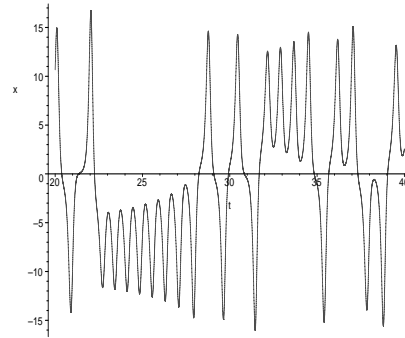
Rys. 28

Na ry 29 i 30 prezentujemy wykresy współrzędnej x dla punktów startu różniących się o 0.0001. Widzimy, że wykresy różnią się w liczbach obiegów skrzydeł, co sygnalizowaliśmy w rozdziale o układach chaotycznych. Zakres zmiennej t – od 20 do 40. Oczywiście, gdybyśmy narysowali wykresy od $t = 0$, to dla małych t oba wykresy prawie by się pokrywały.

```
odeplot(ff(1,2,3), [t,x(t)], 20..40);
odeplot(ff(1.0001,2,3), [t,x(t)], 20..40);
```



Rys. 29



Rys. 30

Ćwiczenie 0.2. Powtórzyć powyższe eksperymenty z innymi wartościami parametru r i innymi punktami startu.

Ćwiczenie 0.3. Zbadać układy Rösslera i Chua.

Czytelnik nieznający MAPLE może skorzystać z książki [?] poświęconej układom dynamicznym ze wspomaganie komputerowym lub z każdej innej dotyczącej tego programu.