

Równania różniczkowe zwyczajne

Bogdan Przeradzki

11 grudnia 2006

Literatura

1. W. Arnold „Równania różniczkowe zwyczajne”
2. W. Arnold „Metody matematyczne mechaniki klasycznej”
3. H. Dębiński, I. Dziubiński „Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe”
4. N. Matwiejew „Zadania z równań różniczkowych zwyczajnych”
5. J. Muszyński, A. Myszkis „Równania różniczkowe zwyczajne”
6. J. Ombach „Wykłady z równań różniczkowych zwyczajnych”
7. A. Palczewski „Równania różniczkowe zwyczajne”
8. B. Przeradzki „Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych”

1 Źródła przyrodnicze równań różniczkowych zwyczajnych

1) równanie przebytej drogi

$$x'(t) = v(t)$$

v – zadana funkcja prędkości, x – droga przebyta po czasie t

2) równanie rozpadu promieniotwórczego

$$N'(t) = kN(t)$$

N – liczba jąder przed reakcją rozpadu

3) równanie ruchu Newtona

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

gdzie $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$, położenie punktu materialnego o masie $m \in \mathbb{R}$, a

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadana funkcja siły

4) równanie Lotki–Volterry (układ drapieżcy i ofiary)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases}$$

a, b, c, d – stałe dodatnie, x – liczba ofiar, y – liczba drapieżników

5) model epidemii SIR (Kermacka–McKendricka)

$$\begin{cases} S'(t) = -aS(t)I(t) \\ I'(t) = aS(t)I(t) - bI(t) \\ R'(t) = bI(t) \end{cases}$$

gdzie S liczba podatnych, I liczba chorych, R liczba wyleczonych, a więc już odpornych, a, b – stałe dodatnie

6) prąd elektryczny (obwód RLC)

$$\begin{cases} LI'(t) = U_1(t) & \text{prawo Faradaya} \\ CU_2'(t) = I(t) & \\ RI(t) = U_3(t) & \text{prawo Ohma,} \\ U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = 0 & \text{prawo Kirchoffa,} \end{cases}$$

gdzie I – natężenie prądu, U_1 – napięcie na cewce indukcyjnej, U_2 – napięcie na kondensatorze, U_3 – napięcie na oporniku, L – indukcyjność cewki, C – pojemność kondensatora, a R – opór opornika. Stąd

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0$$

7) najprostszy model ekonomiczny

$$K'(t) = Y(t) - C(t),$$

gdzie K – kapitał, Y – wytworzony produkt, C – konsumpcja. Y jest postulowaną funkcją K i L – siła robocza, jednorodną tzn. $F(K, L) = LF(K/L, 1)$, przy czym $F(k) = F(k, 1)$ jest rosnąca i wężła, $C = sY$. L rośnie wykładniczo $L(t) = L(0)e^{nt}$. Stąd równanie na kapitał na głowę ludności

$$k'(t) = (1 - s)F(k(t)) - nk(t)$$

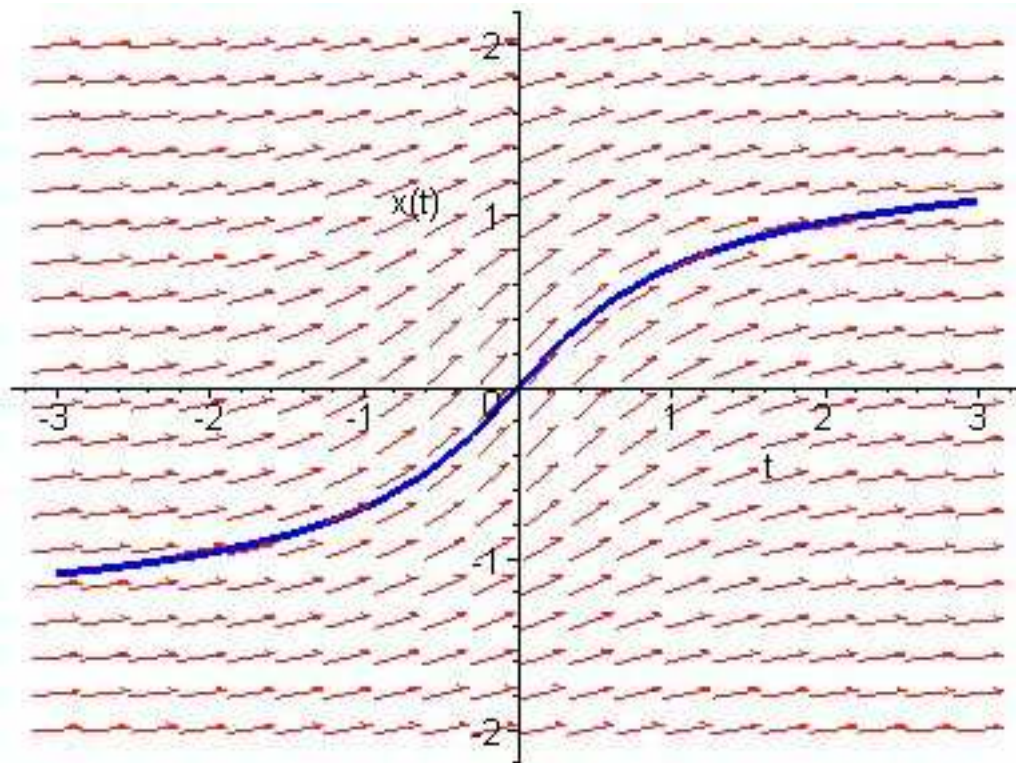
W dalszym ciągu w równaniu różniczkowym opuszczamy argument przy zmiennych zależnych.

2 Podstawy

$$x' = f(t, x)$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$ – funkcja ciągła, U – otwarty.

Warunek początkowy $x(t_0) = x_0$, gdzie $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$, przy czym $(t_0, x_0) \in U$.



Równania wyższych rzędów sprowadzają się do rzędu pierwszego np.

$$x'' = F(t, x, x')$$

przechodzi na

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(t, x, y) \end{cases}$$

i $X = (x, y)$, $f(t, X) = (y, F(t, x, y))$ – jeśli $x \in \mathbb{R}^k$, to $(x, y) \in \mathbb{R}^{2k}$.

Definicja rozwiązania równania $x' = f(t, x)$:

Funkcję $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy rozwiązaniem, gdy dla każdego $t \in (\alpha, \beta)$ $(t, \varphi(t)) \in U$, $\varphi'(t)$ istnieje i

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Lemat podstawowy. Funkcja φ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła i spełnia równanie całkowe

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności. Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie ciągła i lipschitzowsko ciągła względem drugiej zmiennej tzn.

każdy punkt $(\bar{t}, \bar{x}) \in U$ posiada otoczenie V i stałą L takie, że dla $(t, x_1), (t, x_2) \in V$ zachodzi nierówność

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

– symbol $|\cdot|$ oznacza tu i dalej normę euklidesową w przestrzeni \mathbb{R}^k :

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}.$$

Wtedy każde zagadnienie początkowe dla równania $x' = f(t, x)$ posiada rozwiązanie określone w pewnym otoczeniu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Rozwiązanie to jest jedyne w tym sensie, że jeśli są dwa $\varphi_i : (t_0 - \delta_i, t_0 + \delta_i) \rightarrow \mathbb{R}^k, i = 1, 2$, to na części wspólnej ich dziedzin są one równe.

Dowód. Wybieramy kostkę $Q = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset V$, na którym f spełnia warunek Lipschitza względem x ze stałą L . Niech $M = \sup_Q |f(t, x)|$ i

$$\delta < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

Definiujemy ciąg funkcji określonych na przedziale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ o wartościach w kuli w \mathbb{R}^k o środku x_0 i promieniu b wzorem:

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds$$

dla $n \geq 0$. Indukcyjnie sprawdzamy, że $(s, \varphi_n(s)) \in Q$ dla $|s - t_0| \leq \delta$ i $|x - x_0| \leq b$ dla każdego n , oraz że φ_n są ciągłe. Następnie zauważamy, że dla $q = L\delta < 1$ mamy

$$\begin{aligned} \sup_t |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| &\leq L\delta \sup_t |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq \\ &\leq q^2 \sup_t |\varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-2}(t)| \leq \dots \leq q^n \sup_t |\varphi_1(t) - x_0|. \end{aligned}$$

W konsekwencji dla $m > n$ dostaniemy

$$\sup_t |\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| \leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n) \sup_t |\varphi_1(t) - x_0|$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu funkcji φ_n do pewnej funkcji ciągłej $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow B(x_0, \delta)$ (kula w \mathbb{R}^k). Z tw. o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki funkcja φ spełnia potrzebne równanie całkowe.

Gdyby dwie funkcje φ i ψ spełniały to równanie całkowe, to

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - \psi(s)| ds \leq q \sup_{s \in [t_0, t]} |\varphi(s) - \psi(s)|,$$

co wobec $q < 1$ daje $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$.

Jeśli opuścimy założenie lipschitzowskiej ciągłości funkcji f względem x , to istnienie rozwiązania pozostanie, ale utracimy jednoznaczność. Pokazuje to przykład

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0,$$

dla którego funkcje $\varphi(t) \equiv 0$ i $\psi(t) = \frac{1}{27}t^3$ są dwoma nierównymi poza 0 rozwiązaniami. Istnienie rozwiązania wynika z tw. Schaudera o punkcie stałym (np. w podręczniku Musielaka „Wstęp do analizy funkcjonalnej”).

3 Przedłużanie rozwiązań

Jeśli rozwiązanie φ jest określone na przedziale o prawym końcu otwartym β i istnieje granica

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = x_1 \quad \text{i} \quad (\beta, x_1) \in U,$$

to rozwiązanie to można skleić z rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' = f(t, x) \quad x(\beta) = x_1$$

otrzymując rozwiązanie na szerszym przedziale. W rezultacie przy założeniach tw. o istnieniu i jednoznaczności każde rozwiązanie zagadnienia początkowego można przedłużać w prawo aż do β takiego, że albo $\beta = +\infty$ albo

$$\limsup_{t \rightarrow \beta^-} |\varphi(t)| = \infty$$

albo

$$\liminf_{t \rightarrow \beta^-} d((t, \varphi(t)), \partial U) = 0.$$

Podobnie dla przedłużania w lewo.

Najczęściej $U = (a, b) \times \mathbb{R}^k$. Wtedy informacja, że istnieje taka ciągła funkcja $\vartheta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, że rozwiązanie zagadnienia początkowego spełnia oszacowanie (a priori)

$$|\varphi(t)| \leq \vartheta(t)$$

tam, gdzie jest określone, pozwala wykluczyć wszystkie inne możliwości i φ przedłuża się na cały przedział (a, b) .

Lemat Gronwalla. Niech $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe, $u \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ i $t_0 \in (a, b)$. Jeżeli

$$v(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds \quad \text{dla } t \geq t_0, \quad (1)$$

to

$$v(t) \leq c \cdot \exp \int_{t_0}^t u(s) ds \quad \text{dla } t \geq t_0 \quad (2)$$

i analogicznie, gdy w obu nierównościach zamienimy miejscami t i t_0 , dla $t \leq t_0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że nierówność (1) jest dla każdego $t \geq t_0$ ostra. Wtedy

$$v(t_0) < c \leq c \exp \int_{t_0}^t u(s) ds,$$

a więc z ciągłości v nierówność

$$v(t) < c \exp \int_{t_0}^t u(s) ds$$

zachodzi dla t z pewnego prawostronnego otoczenia punktu t_0 . Gdyby nie zachodziła ona dla wszystkich $t \geq t_0$, to istniałaby liczba $t_1 \in (t_0, b)$ taka, że dla $t \in [t_0, t_1)$ nierówność ta jest prawdziwa, a

$$v(t_1) = c \exp \int_{t_0}^{t_1} u(s) ds. \quad (3)$$

Ale wtedy

$$\begin{aligned} v(t_1) &< c + \int_{t_0}^{t_1} u(s)v(s) ds \leq c + \int_{t_0}^{t_1} u(s) \left(c \exp \int_{t_0}^s u(r) dr \right) ds \\ &= c + c \int_0^d \exp w dw = c + c \exp d - c = c \exp \int_{t_0}^{t_1} u(r) dr, \end{aligned}$$

gdzie dla prostoty zapisu oznaczyliśmy

$$d = \int_{t_0}^{t_1} u(r) dr$$

i zastosowaliśmy podstawienie

$$w(s) = \int_{t_0}^s u(r) dr.$$

Ostatnia nierówność przeczy (3).

Jeśli zachodzi nierówność nieostra (1), to dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy ostrą nierówność (1) ze stałą $c + \epsilon$ w miejsce c . Na mocy pierwszej części dowodu zachodzi ostra nierówność (2) z $c + \epsilon$ zamiast c . Z dowolności $\epsilon > 0$ wynika teza. Dla $t \leq t_0$ dowód jest analogiczny.

Tw. o globalnej rozwiązalności. Niech $f : (a, b) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie ciągła i lipschitzowsko ciągła względem drugiej zmiennej oraz

$$|f(t, x)| \leq M(t)|x| + N(t), \quad \text{dla } t \in (a, b), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad (4)$$

gdzie $M, N : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi. Wówczas dowolne zagadnienie początkowe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Dowód. Należy poszukać ograniczenia górnego $|\varphi|$. Ale φ spełnia równanie całkowe

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad (5)$$

czyli

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t N(s) ds + \int_{t_0}^t M(s) |\varphi(s)| ds \end{aligned}$$

dla $t \in [t_0, b)$. Na podstawie lematu Gronwalla dla tych t mamy

$$|\varphi(t)| \leq \left(|x_0| + \int_{t_0}^t N(s) ds \right) \exp \int_{t_0}^t M(s) ds.$$

Z drugiej części lematu Gronwalla wynika ta sama nierówność dla $t \in (a, t_0]$ z zamianą w całce t z t_0 . Zatem mamy oszacowanie a priori rozwiązania przez funkcję

$$\vartheta(t) = \left(|x_0| + \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} N(s) ds \right) \exp \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} M(s) ds.$$

O funkcji f , która ma własność (4) mówimy, że ma wzrost liniowy względem x . Zauważmy, że już dla tak prostego równania jak

$$x' = x^2 + 1,$$

w którym funkcja $f(t, x) = x^2 + 1$ ma wzrost szybszy niż liniowy, rozwiązania na przykład $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ nie są przedłużalne na całą prostą – „po skończonym czasie uciekają do nieskończoności”.

4 Zależność rozwiązania od warunku początkowego i parametru

Oznaczmy przez φ_{x_0} rozwiązanie zagadnienia początkowego $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ i analogicznie przez φ_{x_1} rozwiązanie analogicznego zagadnienia, gdzie punkt startu x_0 zastąpimy przez x_1 . Niech f spełnia założenia tw. o

istnieniu i jednoznaczności, a kostka Q , o której mowa w dowodzie będzie na tyle duża, by oba rozwiązania były określone na przedziale $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Zastosujmy lemat Gronwalla:

$$|\varphi_{x_1}(t) - \varphi_{x_0}(t)| \leq |x_1 - x_0| + L \int_{t_0}^t |\varphi_{x_1}(s) - \varphi_{x_0}(s)| ds$$

implikuje

$$|\varphi_{x_1}(t) - \varphi_{x_0}(t)| \leq |x_1 - x_0| \exp \int_{t_0}^t L ds \leq |x_1 - x_0| \exp(L\delta)$$

i analogicznie, gdy $t < t_0$. Jeśli więc przez Φ oznaczymy przestrzeń funkcji ciągłych $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ z metryką zadaną przez normę

$$\|\varphi\| = \sup_{|t-t_0| \leq \delta} |\varphi(t)|$$

(zbieżność jednostajna), to otrzymamy

Tw. o ciągłej zależności rozwiązania od warunku początkowego.

Przy podanych założeniach i oznaczeniach odwzorowanie

$$\mathbb{R}^k \ni x_0 \mapsto \varphi_{x_0} \in \Phi$$

jest ciągłe. Jeśli więc $x_n \rightarrow x_0$, to $\varphi_{x_n} \rightarrow \varphi_{x_0}$ jednostajnie.

Wybór przedziału $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ nie jest tu istotny. Jeśli wszystkie rozwiązania ciągu φ_{x_n} zadane są na tym samym przedziale $[a, b]$, to dla każdego $t_1 \in [a, b]$ znajdziemy δ_{t_1} tak, aby warunki tw. o istnieniu i jednoznaczności pozwalały znaleźć rozwiązania odpowiednich zagadnień początkowych na $[t_1 - \delta_{t_1}, t_1 + \delta_{t_1}]$. Następnie z pokrycia $[a, b]$ przedziałami $(t_1 - \delta_{t_1}, t_1 + \delta_{t_1})$ wybieramy podpokrycie skończone, a zbieżność jednostajna na każdym przedziale pokrycia skończonego oznacza zbieżność jednostajną na całym $[a, b]$.

Okazuje się, że jeśli f jest funkcją gładką względem x , np. klasy C^p , gdzie $p = 1, 2, \dots, \infty$, to także $x_0 \mapsto \varphi_{x_0}(t)$ jest funkcją klasy C^p przy każdym t . Jest to tzw. tw. o gładkiej zależności rozwiązania od warunku początkowego. Dowód polega na zręcznym zastosowaniu lematu Gronwalla.

Rozważmy teraz zagadnienie początkowe z parametrem:

$$x' = f(t, x, \mu) \quad x(t_0) = x_0 \tag{6}$$

Założmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest ciągła i lipschitzowsko ciągła względem x i μ :

$$|f(t, x_1, \mu_1) - f(t, x_2, \mu_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |\mu_1 - \mu_2|)$$

dla punktów z pewnego otoczenia dowolnego punktu z U – stała L może zależeć od otoczenia. Oznaczmy przez $\varphi_{x_0, \mu}$ rozwiązanie tego zagadnienia początkowego istniejące na mocy tw. o istnieniu i jednoznaczności. Łatwo zauważyć, że funkcja ta jest jednocześnie rozwiązaniem zagadnienia początkowego w przestrzeni \mathbb{R}^{k+1} :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = 0, & y(t_0) = \mu \end{cases}$$

W rezultacie odwzorowanie $(x_0, \mu) \mapsto \varphi_{x_0, \mu} \in \Phi$ jest ciągłe. Mówimy o ciągłej zależności rozwiązania od parametru. Jeśli f jest funkcją klasy C^p względem x, μ , to i wspomniane odwzorowanie jest klasy C^p . Jeśli f jest klasy C^p tylko względem μ , to argument x_0 należy ustalić i odwzorowanie $\mu \mapsto \varphi_{x_0, \mu}$ będzie klasy C^p . Wszędzie $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mówimy wtedy o gładkiej zależności rozwiązania od parametru.

5 Równania wyższych rzędów

Cała teoria dotycząca równania rzędu 1 przenosi się na:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k \supset V \rightarrow \mathbb{R}^k$ dzięki zamianie na układ równoważny:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Jest to równanie rzędu pierwszego w \mathbb{R}^{nk} $X' = F(t, X)$, gdzie $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a

$$F(t, X) = (x_2, \dots, x_n, f(t, X)).$$

Warunki początkowe przyjmują postać

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Przy założeniu, że f jest ciągła i lipschitzowsko ciągła względem X otrzymamy istnienie rozwiązania lokalnego dla dowolnego zagadnienia początkowego. Przy dodatkowym założeniu, że f ma wzrost liniowy względem X

$$|f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \sum_{i=1}^n M_i(t) |x_i| + N(t)$$

otrzymamy rozwiązanie globalne. Rozwiązanie zagadnienia początkowego jest ciągłą funkcją $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, a gdy f jest klasy C^p jako funkcja X , to i rozwiązanie zależy w ten sposób od warunków początkowych.

6 Równania liniowe

$$x' = A(t)x + r(t) \quad (7)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^k$, $A : (a, b) \rightarrow M(k)$ – zadana funkcja ciągła, $M(k)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych $k \times k$, które możemy utożsamiać z odwzorowaniami liniowymi $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ – zadana funkcja ciągła. Z tw. o istnieniu i jednoznaczności i z tw. o globalnej rozwiązalności każde zagadnienie początkowe dla równania (7) posiada dokładnie jedno rozwiązanie zadane na całym przedziale (a, b) .

Równanie takie nazywamy liniowym, ponieważ operator $\varphi \rightarrow \varphi' - A(t)\varphi$ jest liniowy. Z algebry wiadomo, że:

1) zbiór rozwiązań równania jednorodnego $x' = A(t)x$ jest przestrzenią liniową;

2) jeśli znamy jedno rozwiązanie równania (7) – φ_0 , to dowolne rozwiązanie tego równania jest postaci $\varphi_0 + \psi$, gdzie ψ jest rozwiązaniem równania jednorodnego.

Ustalmy $t_0 \in (a, b)$ i zdefiniujmy odwzorowanie $T : \mathbb{R}^k \rightarrow C^1((a, b), \mathbb{R}^k)$ wzorem $T(x_0) = \varphi_{x_0}$, gdzie φ_{x_0} jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego $x' = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$. Łatwo zauważyć, że T jest liniowe i różnowartościowe. Zatem jest to izomorfizm \mathbb{R}^k na przestrzeń rozwiązań równania jednorodnego. Zatem wymiar tej ostatniej wynosi k .

Jeśli wybierzemy bazę wspomnianej wyżej przestrzeni liniowej $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, i utworzymy funkcję o wartościach macierzowych $t \mapsto X(t) \in M(k)$, gdzie kolejnymi kolumnami macierzy $X(t)$ są $\varphi_i(t)$, to nazywamy ją macierzą fundamentalną równania liniowego. Funkcja X spełnia równanie $X' = A(t)X$ (tu $A(t)X$ oznacza mnożenie macierzy). Wyznacznik dowolnej macierzy fundamentalnej równania liniowego nazywamy wrońskianem:

$$W(t) = \det X(t).$$

Tw. Liouville’a. Wrońskian równania liniowego spełnia równanie

$$W' = \operatorname{tr} A(t) \cdot W,$$

gdzie $\operatorname{tr} A$ oznacza ślad macierzy A

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^k a_{ii}, \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,k}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_1^k(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \dots & \varphi_2^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^1(t) & \varphi_k^2(t) & \dots & \varphi_k^k(t) \end{bmatrix}$$

Wtedy wykorzystując równości

$$(\varphi_i^j)'(t) = \sum_{l=1}^k a_{il}(t)\varphi_l^j(t)$$

i własności wyznacznika dostaniemy

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^k \det \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_1^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_i^1)'(t) & (\varphi_i^2)'(t) & \dots & (\varphi_i^k)'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^1(t) & \varphi_k^2(t) & \dots & \varphi_k^k(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^k \det \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_1^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^k a_{ij}(t)\varphi_j^1(t) & \sum_{j=1}^k a_{ij}(t)\varphi_j^2(t) & \dots & \sum_{j=1}^k a_{ij}(t)\varphi_j^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^1(t) & \varphi_k^2(t) & \dots & \varphi_k^k(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}(t) \det \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_1^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_j^1(t) & \varphi_j^2(t) & \dots & \varphi_j^k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^1(t) & \varphi_k^2(t) & \dots & \varphi_k^k(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Widać, że dla $i \neq j$ wiersze i -ty i j -ty pokrywają się, a dla $i = j$ otrzymamy $W(t)$. Stąd wynika teza.

W szczególności

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds$$

co oznacza, że $W(t)$ nigdzie nie znika

Ustalmy $t_0 \in (a, b)$ i wybierzmy macierz fundamentalną równania taką że $X(t_0) = I$ – macierz jednostkowa. Oznaczmy $U(t, t_0) = X(t)$. Mamy więc funkcję $U : (a, b) \times (a, b) \rightarrow M(k)$. Spełnia ona warunki:

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t)U(t, s),$$

$$U(s, s) = I.$$

Zachodzi tzw. wzór na uzmiennianie stałych na rozwiązanie równania niejednorodnego (7) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$:

$$\varphi(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)r(s) ds.$$

Do dowodu wystarczy zastosować własności U (uwaga na różniczkowanie całki – t występuje w dwóch miejscach: jako granica całkowania i w funkcji podcałkowej).

7 Równania liniowe o stałych współczynnikach

Jest to równanie liniowe, dla którego $A(t) \equiv A$. Wtedy

$$U(t, t_0) = \exp(t - t_0)A,$$

gdzie eksponentę macierzy definiujemy wzorem

$$\exp B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}, \quad B^0 = I, \quad B^1 = B, \quad B^{n+1} = BB^n.$$

Przestrzeń macierzy-odwzorowań liniowych $M(k)$ jest unormowana przez

$$\|B\| = \sup_{|x| \leq 1} |Bx|,$$

jest zupełna (por. wykład z analizy funkcjonalnej) i $\|BC\| \leq \|B\| \cdot \|C\|$, więc $\|B^n\| \leq \|B\|^n$. Zatem szereg definiujący eksponentę jest bezwzględnie zbieżny.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(t - t_0)A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} (t - t_0)^n A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n(t - t_0)^{n-1} A^n \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} A^n = A \exp(t - t_0)A \end{aligned}$$

oraz $\exp(t_0 - t_0)A = \exp 0 = I$.

Zastąpmy \mathbb{R}^k przez \mathbb{C}^k . Zachodzi wtedy tw. o postaci endomorfizmu por. [8]:

Dla każdego odwzorowania liniowego $A : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ istnieje rozkład

$$\mathbb{C}^k = \bigoplus_{s=1}^p X_s$$

na sumę prostą podprzestrzeni liniowych X_s o własnościach:

$$A(X_s) \subset X_s,$$

jedyną wartością własną $A|_{X_s}$ jest liczba zespolona λ_s będąca jednym z pierwiastków wielomianu charakterystycznego $Q(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (wielomian stopnia k),

jeśli krotność tego pierwiastka wynosi n_s , to

$$X_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(A - \lambda_s I)^n = \bigcup_{n=1}^{n_s} \ker(A - \lambda_s I)^n.$$

Zobaczmy, jak efektywnie policzyć $\exp tA \cdot x_0$ korzystając z tego twierdzenia: $x_0 = \sum_{s=1}^p x_s$, gdzie $x_s \in X_s$; wtedy

$$\begin{aligned} \exp tA \cdot x_0 &= \sum_{s=1}^p \exp tAx_s = \sum_{s=1}^p e^{t\lambda_s} \exp t(A - \lambda_s I)x_s \\ &= \sum_{s=1}^p e^{t\lambda_s} \left(\sum_{n=0}^{n_s-1} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_s I)^n x_s \right). \end{aligned}$$

W praktyce szukamy liniowo niezależnych rozwiązań równania $x' = Ax$ i, jak stąd widać, są one postaci

$$\varphi(t) = e^{\lambda_s t} P_{n_s-1}(t),$$

gdzie P_{n_s-1} jest wielomianem stopnia co najwyżej $n_s - 1$ o współczynnikach z \mathbb{C}^k .

W przypadku $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ rozważamy operator liniowy na \mathbb{C}^k o tej samej (rzeczywistej) macierzy. Jej wielomian charakterystyczny ma współczynniki rzeczywiste, więc jeśli liczba $\lambda_s = \mu_s + i\nu_s$ jest wartością własną, to i liczba sprzężona $\bar{\lambda}_s = \mu_s - i\nu_s$ także. Wtedy

$$e^{\lambda_s t} = e^{\mu_s t} \cos \nu_s t + ie^{\mu_s t} \sin \nu_s t.$$

Należy się więc spodziewać rozwiązań rzeczywistych postaci

$$\varphi(t) = e^{\mu_s t} \cos \nu_s t P_{n_s-1}(t)$$

i

$$\varphi(t) = e^{\mu_s t} \sin \nu_s t Q_{n_s-1}(t).$$

Równanie liniowe rzędu n w \mathbb{R}^k

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = r(t)$$

sprowadza się do równania rzędu 1 w \mathbb{R}^{nk}

$$X' = A(t)X + R(t)$$

gdzie $X = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})^t$, $R(t) = (0, 0, \dots, r(t))^t$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Dla przypadku stałych współczynników $a_i(t) \equiv a_i$ i $k = 1$ zamiast jednak stosować ogólną teorię, dla znalezienia układu fundamentalnego rozwiązań

równania jednorodnego (zbioru n liniowo niezależnych rozwiązań) podstawiamy do równania jednorodnego $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. Po podzieleniu obu stron otrzymanego równania przez $e^{\lambda t}$ mamy wielomian charakterystyczny

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Jeśli liczba rzeczywista λ_s jest pierwiastkiem tego wielomianu krotności n_s , to do układu fundamentalnego wchodzi funkcje

$$\varphi(t) = t^j e^{\lambda_s t}, \quad j = 0, 1, \dots, n_s - 1,$$

a jeśli jest to liczba zespolona $\lambda_s = \mu_s + i\nu_s$, to

$$\varphi(t) = t^j e^{\mu_s t} \cos \nu_s t, \quad j = 0, 1, \dots, n_s - 1,$$

$$\psi(t) = t^j e^{\mu_s t} \sin \nu_s t, \quad j = 0, 1, \dots, n_s - 1.$$

8 Układy dynamiczne

Równanie autonomiczne

$$x' = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^k,$$

gdzie f jest funkcją lipschitzowsko ciągłą ma własność:

jeśli $\varphi : (a, b) \rightarrow U$ jest jego rozwiązaniem, to dla dowolnego $\tau \in \mathbb{R}$ funkcja $\psi_\tau : (a - \tau, b - \tau) \rightarrow U$ dana wzorem

$$\psi_\tau(t) = \varphi(t - \tau)$$

także jest rozwiązaniem tego równania. Obrazy dla obu funkcji są przy tym takie same. Nazywamy je trajektoriami równania. Zauważmy, że zbiór U rozpada się na sumę parami rozłącznych trajektorii naszego równania (jednoznaczność). W interpretacji fizycznej trajektorie są torami ruchów punktu, a wybór rozwiązania spośród wszystkich ψ_τ definiujących daną trajektorię zależy od chwili startu.

Szczególne rodzaje są trajektorie jednopunktowe odpowiadające rozwiązaniom stałym $\varphi(t) \equiv x_0$. Punkty stałe odpowiadają miejscom zerowym funkcji f . Drugi rodzaj to trajektorie okresowe odpowiadające rozwiązaniom okresowym: $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ (T ustalone). Jeśli T jest okresem rozwiązania, to oczywiście nT dla $n \in \mathbb{N}$ także. Zbiór okresów stanowi więc grupę (podgrupę grupy $(\mathbb{R}, +)$). Jeśli w zbiorze dodatnich okresów istnieje element najmniejszy, to trajektoria okresowa jest właściwa. W przeciwnym razie każda liczba rzeczywista jest okresem i trajektoria jest punktem stałym.

Portretem fazowym układu nazywamy rysunek jego trajektorii wraz ze wskazanym kierunkiem ruchu po nich.

W znajdowaniu trajektorii pomaga znajomość tzw. całek pierwszych równania. Funkcję $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy całką pierwszą równania $x' = f(x)$, jeśli dla $x \in U$ iloczyn skalarny

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = 0,$$

gdzie $F'(x) = [F_{x_1}(x), \dots, F_{x_k}(x)]$ jest gradientem funkcji F . Jest tak dlatego, że każda całka pierwsza jest stała wzdłuż trajektorii. Poziomica funkcji F , o ile funkcja ta spełnia warunek $F'(x) \neq 0$, jest hiperpowierzchnią $k - 1$ -wymiarową. Jeśli znamy n całek pierwszych F_j , $j = 1, \dots, n$, spełniających

$$\text{rz } [F_{j,x_i}]_{i \leq k, j \leq n} = n,$$

to na podstawie tw. o funkcji uwikłanej zbiór

$$M_{c_1, \dots, c_n} = \{x \in U : F_j(x) = c_j \text{ dla } j = 1, \dots, n\}$$

jest hiperpowierzchnią $k - n$ -wymiarową. Jeśli $n = k - 1$, to jest to krzywa i po wydzieleniu z niej punktów stałych otrzymamy gotowe trajektorie.

Zbadajmy układy zachowawcze z jednym stopniem swobody:

$$x'' = f(x), \quad x \in (a, b) \subset \mathbb{R},$$

gdzie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest lipschitzowsko ciągła. Odpowiada mu układ

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) \end{cases}$$

w \mathbb{R}^2 a jego całką pierwszą jest funkcja

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \int_{x_0}^x f(u) du$$

zwana całką energii. Jej część

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(u) du$$

nazywamy potencjałem układu. (Masa jednostkowa, stąd utożsamienie potencjału i energii potencjalnej). Druga część całki energii to energia kinetyczna. Trajektorie naszego układu leżą na poziomicach funkcji E

$$y^2 = 2(E - U(x)).$$

Poziomice są krzywymi symetrycznymi względem osi x . Przy ustalonej wartości E trajektoria leży nad zbiorem tych x , że $U(x) \leq E$. Gdy $E = U(a) = U(b)$, $a < b$ i $U(x) < E$ dla $x \in (a, b)$ oraz $U'(a) < 0$, $U'(b) > 0$. Wtedy ta część

poziomicy, która leży nad $[a, b]$ jest zbiorem dyfeomorficznym z okręgiem i nie ma na niej punktów stałych. Zatem jest to trajektoria okresowa. Połową okresu podstawowego jest czas ruchu po części tej trajektorii dla $y \geq 0$

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

W punktach x_0 , gdzie $U'(x_0) = 0$ mamy rozwiązanie stacjonarne $\varphi(t) \equiv x_0$. Jeżeli f jest klasy C^1 , to zachowanie trajektorii w otoczeniu $(x_0, 0)$ zależy od $U''(x_0)$:

gdy ta liczba jest dodatnia, to U ma w x_0 minimum lokalne, więc dla E nieco większych mamy sytuację wcześniej omówioną czyli trajektorię okresową, gdy ta liczba jest ujemna, mamy maksimum potencjału.

Rozważmy autonomiczne równanie liniowe jednorodne

$$x' = Ax \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

gdzie $\det A \neq 0$. Punkt $0 = (0, 0)$ jest jedynym punktem stałym układu, a jego portret fazowy zależy tylko od wartości własnych A .

Jeżeli A ma dwie różne rzeczywiste wartości własne, to przy odpowiednim wyborze bazy w \mathbb{R}^2 (odpowiadające im wektory własne), równanie ma postać

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $\varphi(t) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t})$ C_i – stałe dowolne. Stąd trajektorie

$$x_2 = C x_1^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad C \in \mathbb{R},$$

lub $x_1 = 0$. Jeśli obie wartości własne są tego samego znaku, wówczas mamy „parabolopodobny” portret fazowy (węzeł), gdy są przeciwnych znaków, wtedy jest on złożony z krzywych „hiperbolopodobnych” (siodło). Analogicznie dla $\lambda_1 = \lambda_2$ o ile $\dim \ker(A - \lambda_1 I) = 2$. Kierunek ruchu po trajektorii zależy od znaków λ_i ; w szczególności, gdy obie wartości własne są ujemne mamy ruch do punktu stałego 0, a gdy obie są dodatnie od tego punktu.

Przypadek, gdy $\lambda_1 = \lambda_2$, ale $\dim \ker(A - \lambda_1 I) = 1$ prowadzi do układu

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = x_1 + \lambda_1 x_2 \end{cases}$$

przy wyborze bazy e_1 – wektor własny, $e_2 = A e_1$. Rozwiązanie tego uproszczonego układu jest znowu możliwe – równanie trajektorii

$$x_2 = \left(C_2 + \frac{C_1}{\lambda_1} \ln \frac{x_1}{C_1} \right) \frac{x_1}{C_1}, \quad x_1 = 0.$$

Znowu krzywe „parabolopodobne” (węzeł zdegenerowany).

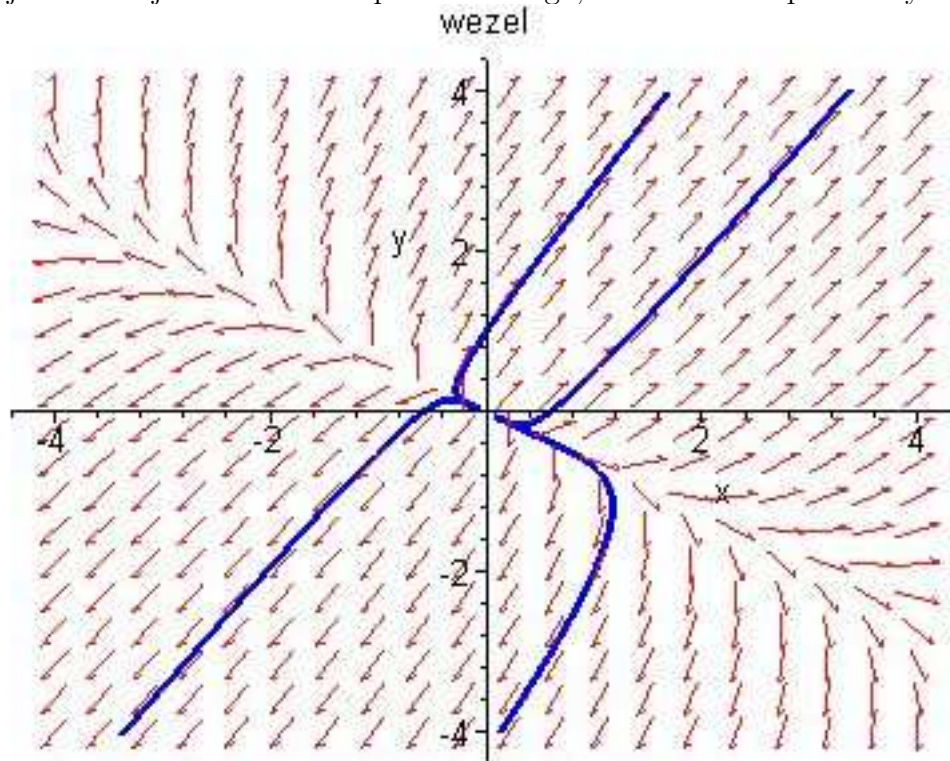
Pozostał nam przypadek pary zespolonych sprzężonych wartości własnych $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Wtedy równanie sprowadza się do postaci

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}$$

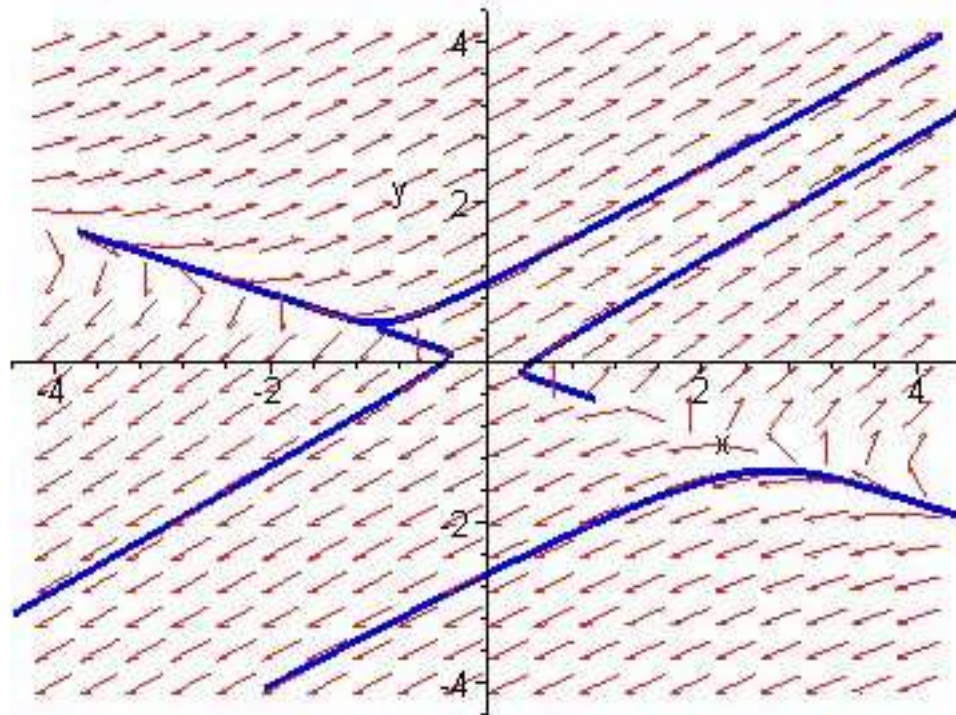
które rozwiązujemy we współrzędnych biegunowych

$$(r^2)' = 2\alpha r^2, \quad \theta' = -\beta.$$

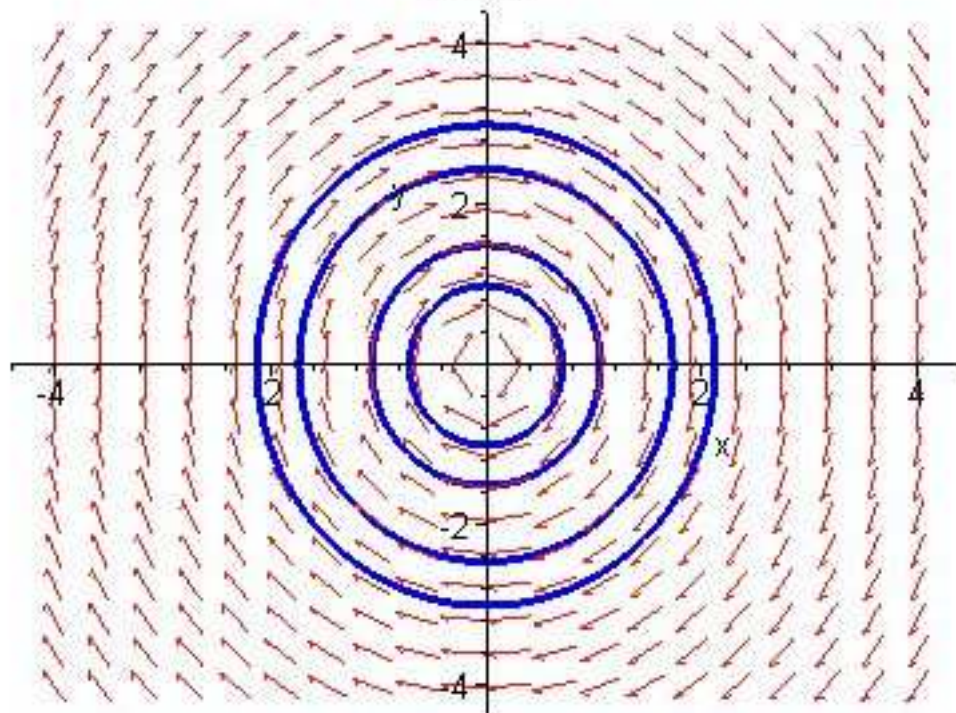
Stąd $\theta(t) = -\beta t + C_1$, $r(t) = C_2 e^{\alpha t}$. Zatem dla $\alpha = 0$ trajektoriami są okręgi, a przy $\alpha \neq 0$ spirale Archimedesusa. Po powrocie do pierwotnej bazy charakter portretów fazowych nie ulega zmianie – dla $\alpha = 0$ trajektoriami są krzywe zamknięte, a dla $\alpha \neq 0$ „spirale” wychodzące z początku układu. Pierwszy przypadek – centrum, drugi – ognisko. Dla ogniska, gdy $\alpha < 0$ ruch po trajektoriach jest w kierunku punktu stałego, a dla $\alpha > 0$ – przeciwny.

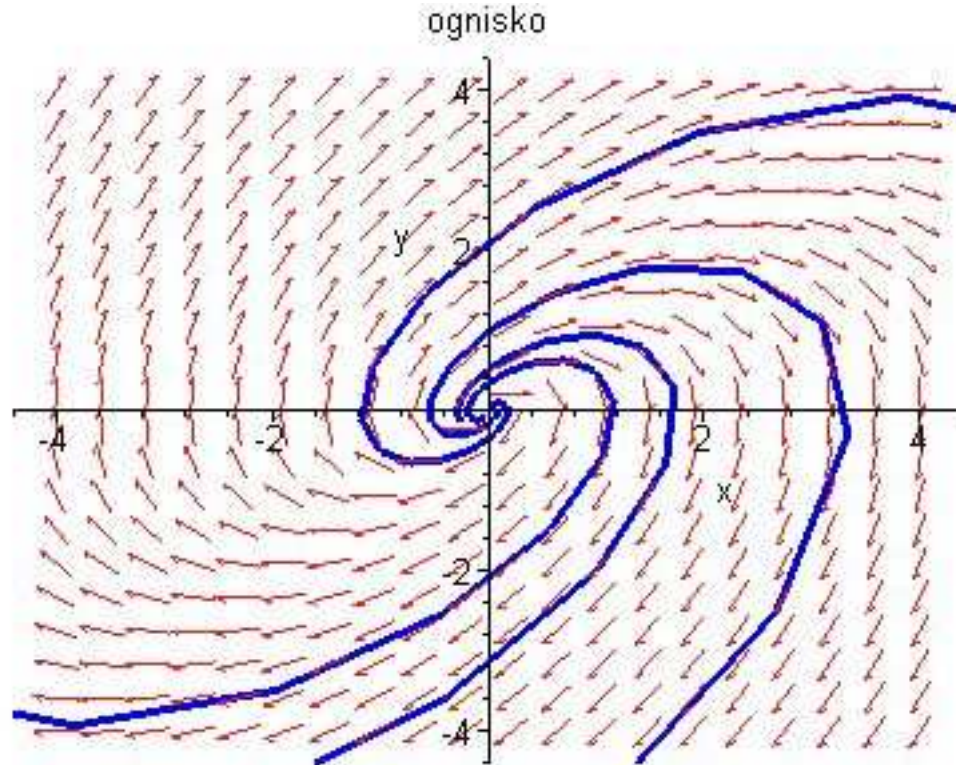


siodlo



centrum





Jest bardzo ciekawe, że dla równań nieliniowych $x' = f(x)$, jeśli $f \in C^1$, $f(x_0) = 0$ i $\det f'(x_0) \neq 0$ (punkt stały x_0 jest izolowany) portret fazowy w otoczeniu tego punktu stałego jest dyfeomorficznym obrazem portretu dla równania liniowego $y' = f'(x_0)y$ we wszystkich przypadkach z wyjątkiem centrum. Tak więc,

jeśli obie wartości własne macierzy $f'(x_0)$ są rzeczywiste ujemne, to trajektorie startujące blisko x_0 zблиżają się do punktu x_0 , przy czym obiegają ten punkt tylko skończoną liczbę razy, a jeśli te wartości własne są dodatnie ruch jest po tych samych krzywych, ale w przeciwną stronę – węzeł;

jeśli obie wartości własne są rzeczywiste i przeciwnych znaków wtedy mamy parę trajektorii „wchodzących” do punktu x_0 i parę „wychodzących”, a pozostałe najpierw zблиżają się do tego punktu, a później oddalają – siodło;

jeśli mamy parę sprzężonych wartości własnych o części rzeczywistej niezerowej, wówczas mamy ruch jak w przypadku węzła, ale liczba obiegów wokół punktu x_0 jest nieskończona – ognisko;

jeśli $f'(x_0)$ ma wartości własne $\pm i\beta$, wtedy w punkcie x_0 układ nieliniowy ma centrum (wszystkie trajektorie bliskie tego punktu są zamknięte) albo ma ognisko. Ruch po spiralach może odbywać się zarówno do punktu x_0 jak i od tego punktu. O zachowaniu trajektorii wokół punktu stałego decydują wtedy następane składniki we wzorze Taylora dla funkcji f .

9 Stabilność rozwiązań

Rozważmy równanie

$$x' = f(t, x), \quad f : [0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad U \subset \mathbb{R}^k,$$

z prawą stroną gwarantującą istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień początkowych. Niech $\varphi : [0, \infty) \rightarrow U$ będzie jego rozwiązaniem. Mówimy, że φ jest stabilne (w sensie Lapunowa), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że rozwiązanie ψ dla którego $|\psi(0) - \varphi(0)| \leq \delta$, spełnia $|\psi(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$ przy wszystkich $t > 0$. Punkt 0 zamiast t_0 jest tu wybrany dla uproszczenia zapisu; analogicznie można mówić o stabilności rozwiązań na $(-\infty, 0]$.

Mówimy, że φ jest asymptotycznie stabilne, gdy jest stabilne i istnieje δ_0 taka, że z warunku $|\psi(0) - \varphi(0)| \leq \delta_0$ wynika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Tw. 1 Jeżeli rozwiązanie zerowe równania liniowego jednorodnego $x' = A(t)x$ jest stabilne (odp. asymptotycznie stabilne), to przy dowolnej ciągłej funkcji $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ dowolne rozwiązanie równania $x' = A(t)x + r(t)$ jest stabilne (odp. asymptotycznie stabilne).

Dowód jest elementarny – wynika z faktu, że różnica dwóch rozwiązań równania niejednorodnego spełnia równanie jednorodne. Możemy więc mówić o (asymptotycznej) stabilności równania liniowego.

Tw. 2 Stabilność równania liniowego $x' = A(t)x$ jest równoważna każdemu z dwóch warunków:

- (i) dowolne rozwiązanie jest ograniczone na $[0, \infty)$;
- (ii) funkcja $t \mapsto U(t, 0)$ jest ograniczona.

Analogicznie asymptotyczna stabilność jest równoważna każdemu z warunków:

- (i') dowolne rozwiązanie dąży do 0 w ∞ ;
- (ii') $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, 0) = 0$.

Dla równań liniowych o stałych współczynnikach oznacza to następującą charakteryzację: równanie $x' = Ax$ jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A mają niedodatnie części rzeczywiste i te wartości własne λ dla których $\operatorname{Re} \lambda = 0$ mają krotność równą $\dim \ker(A - \lambda I)$. Dla tych ostatnich w układzie fundamentalnym nie będzie funkcji $e^{0t} P(t) \sin(\cos) \operatorname{Im} \lambda t$ z różnymi od stałych wielomianami P .

Równanie $x' = Ax$ jest asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste.

Dla równań nieliniowych jedno rozwiązanie może być (asymptotycznie) stabilne, a inne nie, jak pokazuje przykład

$$x' = x(1 - x)$$

którego rozwiązanie stacjonarne $\varphi_1(t) \equiv 1$ jest asymptotycznie stabilne, a rozwiązanie $\varphi_0(t) \equiv 0$ nie jest nawet stabilne.

Łatwo jednak zauważyć, że rozwiązanie η równania $x' = f(t, x)$ jest stabilne (odp. asymptotycznie stabilne) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie zerowe równania $y' = f(t, y + \eta(t)) - f(t, \eta(t))$ jest takie. Wystarczy podstawić $y = x - \eta(t)$. W dalszym ciągu będziemy się więc zajmować badaniem stabilności rozwiązania zerowego równania $x' = f(t, x)$. Dla uproszczenia zakładamy, że f nie zależy od t – równanie autonomiczne.

I tw. Lapunowa. Jeżeli istnieje funkcja $V : U \rightarrow [0, \infty)$ klasy C^1 znikająca jedynie w 0 i taka, że funkcja

$$\dot{V}(x) = \langle f(x), V'(x) \rangle$$

jest wszędzie niedodatnia, to rozwiązanie zerowe równania $x' = f(x)$ jest stabilne.

Dowód. Weźmy $\varepsilon > 0$ takie, by kula $K(0, \varepsilon)$ wraz z domknięciem zawierała się w zbiorze U . Oznaczmy

$$\alpha = \inf_{|x|=\varepsilon} V(x) > 0$$

i wybierzmy $\delta > 0$ tak małe, by $V(x) < \alpha$ dla $|x| \leq \delta$. Wtedy rozwiązanie φ startujące z kuli o środku 0 i promieniu δ spełnia $V(\varphi(0)) < \alpha$. Pochodną funkcji $t \mapsto V(\varphi(t))$ jest $\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$, więc nasza funkcja jest nierosnąca. Tym samym rozwiązanie φ nie może przeciąć brzegu kuli $K(0, \varepsilon)$. Zatem (oszacowanie a priori) rozwiązanie to przedłuża się na $[0, \infty)$ i spełnia dla wszystkich $t > 0$ warunek $|\varphi(t)| < \varepsilon$.

II tw. Lapunowa. Jeżeli istnieje funkcja $V : U \rightarrow [0, \infty)$ klasy C^1 znikająca jedynie w 0 i taka, że funkcja $\dot{V}(x)$ jest ujemna dla $x \neq 0$, to rozwiązanie zerowe równania $x' = f(x)$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód. Weźmy δ i φ z poprzedniego dowodu i zauważmy, że $V(\varphi)$ jest malejąca i ≥ 0 ma więc granicę

$$b = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t)) \geq 0.$$

Gdyby $b > 0$, to dla pewnego $r > 0$ byłoby $|\varphi(t)| \geq r$. Wtedy biorąc

$$-\beta = \sup_{r \leq |x| \leq \varepsilon} \dot{V}(x)$$

mielibyśmy $\beta > 0$, a więc pochodna funkcji $t \mapsto V(\varphi(t))$ byłaby mniejsza lub równa $-\beta$. Stąd $V(\varphi(t)) \leq V(\varphi(0)) - \beta t$, co niemożliwe dla wszystkich $t > 0$. Zatem $b = 0$, co daje $\varphi(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$.

Zamiast odgadywać funkcję V wygodniejsze w zastosowaniu jest

Tw. o stabilności w pierwszym przybliżeniu. Rozważmy równanie autonomiczne

$$x' = f(x),$$

gdzie $f \in C^1$ i jego punkt stały x_0 . Jeżeli części rzeczywiste wartości własnych macierzy $f'(x_0)$ są ujemne, to rozwiązanie stacjonarne $\varphi_0(t) \equiv x_0$ jest asymptotycznie stabilne.

Jeżeli choć jedna z wartości własnych tej macierzy ma dodatnią część rzeczywistą, to rozwiązanie φ_0 nie jest stabilne.

Dowód pierwszej części polega na zastosowaniu II tw. Lapunowa z funkcją

$$V(x) = \int_0^\infty |\exp sA \cdot x|^2 ds.$$

Dowód drugiej wymaga znajomości tw. Lapunowa o niestabilności.

10 Zagadnienia Sturma–Liouville’a

Rozważmy równanie liniowe rzędu 2

$$-x'' + (q(t) + \lambda)x = r(t),$$

gdzie $q, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $\lambda \in \mathbb{R}$ z warunkami brzegowymi jednego z czterech rodzajów:

$$x(a) = x(b) = 0, \quad x'(a) = x(b) = 0, \quad x(a) = x'(b) = 0, \quad x'(a) = x'(b) = 0.$$

Są one szczególnymi przypadkami tzw. warunków Sturma–Liouville’a

$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0 = \gamma x(b) + \delta x'(b),$$

dla których początkowe rezultaty dostaje się po dość subtelnych rozważaniach (p. J. Dieudonné „Foundations of Modern Analysis”).

Tw. Dla $\lambda > -\inf q$ zagadnienie brzegowe jednorodne ($r = 0$) posiada tylko rozwiązanie zerowe.

Dowód. Niech $\varphi; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem. Pomnóżmy tożsamość $-\varphi''(t) + (q(t) + \lambda)\varphi(t) = 0$ przez $\varphi(t)$ i scałkujmy od a do b (przez części)

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_a^b \varphi''(t)\varphi(t) dt + \int_a^b (q(t) + \lambda) \varphi(t)^2 dt \\ &= -\varphi(b)\varphi'(b) + \varphi(a)\varphi'(a) + \int_a^b \varphi'(t)^2 dt + \int_a^b (q(t) + \lambda) \varphi(t)^2 dt \\ &\geq \int_a^b \varphi'(t)^2 dt + \inf(q(t) + \lambda) \int_a^b \varphi(t)^2 dt > 0, \end{aligned}$$

co dowodzi $\varphi \equiv 0$.

Weźmy λ jak w tym twierdzeniu i ustalmy rozwiązanie φ_1 równania jednorodnego spełniające pierwszy warunek brzegowy – dla ustalenia uwagi

$x(a) = 0$, a następnie rozwiązanie φ_2 równania jednorodnego spełniające drugi warunek – $x(b) = 0$. Na podstawie tw. rozwiązania te są liniowo niezależne, więc stanowią układ fundamentalny rozwiązań. Definiujemy funkcję $G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{W} (\varphi_1(t)\varphi_2(s)) & \text{dla } t \leq s, \\ \frac{1}{W} (\varphi_1(s)\varphi_2(t)) & \text{dla } t > s, \end{cases}$$

gdzie W oznacza wrońskian układu i jest funkcją stałą – p. tw. Liouville’a. Funkcja G jest ciągła i symetryczna

$$G(t, s) = G(s, t)$$

i nazywamy ją funkcją Greena zagadnienia Sturma-Liouville’a.

Tw. Zagadnienie niejednorodne posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla każdej ciągłej funkcji r dane wzorem

$$\psi_r(t) = \int_a^b G(t, s)r(s) ds.$$

Dowód. Pokażemy jedynie, że ψ_r jest rozwiązaniem. Spełnianie warunków brzegowych jest oczywiste. Ponadto

$$\begin{aligned} \psi_r'(t) &= \frac{1}{W}\varphi_2'(t) \int_a^t \varphi_1 r + \frac{1}{W}\varphi_1'(t) \int_t^b \varphi_2 r \\ \psi_r''(t) &= \frac{1}{W}\varphi_2''(t) \int_a^t \varphi_1 r + \frac{1}{W}\varphi_1''(t) \int_t^b \varphi_2 r - r(t) \\ &= (q(t) + \lambda)\psi_r(t) - r(t). \end{aligned}$$

Pewnej wiedzy z analizy funkcjonalnej wymaga udowodnienie, że zagadnienie brzegowe S.-L. ma tylko przeliczalną liczbę takich λ , dla których nie zachodzi pierwsze (a więc i drugie) twierdzenie i stanowią one ciąg zbieżny do $-\infty$. Wynika to z pełności operatora całkowego zdefiniowanego na przestrzeni $C[a, b]$ przez prawą stronę wzoru na ψ_r . Liczby λ_n , $n \in \mathbb{N}$, nazywane są wartościami własnymi zagadnienia i każdej z nich odpowiada jednowymiarowa podprzestrzeń rozwiązań jednorodnego zagadnienia S.-L. . Wybierając element φ_n będący rozwiązaniem, którego norma w $L^2(a, b)$ jest jednostkowa

$$\int_a^b \varphi_n(t)^2 dt = 1$$

otrzymamy układ ortonormalny zupełny w tej przestrzeni. Więcej na ten temat – W. Kołodziej „Wybrane rozdziały analizy matematycznej”.

11 Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień początkowych

Zagadnienie początkowe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

gdzie $f : \mathbb{R}^{k+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^k$ możemy rozwiązać w sposób przybliżony ustalając krok $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i metodę, która pozwala znaleźć ciąg x_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, elementów \mathbb{R}^k przybliżających $\varphi(t_i)$, gdzie $t_i = t_{i-1} + h$, a φ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego.

Najprostszy jest schemat Eulera

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$$

wynikający z faktu, że iloraz różnicowy przybliża pochodną. Schemat ten jest, niestety, mało dokładny.

Następny jest zmodyfikowany schemat Eulera

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + \frac{h}{2} (f(t_i, \tilde{x}_i) + f(t_{i+1}, \tilde{x}_i + hf(t_i, \tilde{x}_i))).$$

Jest on nieco dokładniejszy szczególnie dla zagadnień, których rozwiązania szybko rosną.

Wspomnimy jeszcze schemat Rungego–Kutty rzędu czwartego

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

gdzie

$$K_1 = f(t_i, \hat{x}_i), \quad K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{x}_i + \frac{h}{2}K_1\right),$$
$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{x}_i + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t_i + h, \hat{x}_i + hK_3).$$

Jest to metoda najczęściej stosowana do numerycznego rozwiązywania zagadnień początkowych ze względu na dużą dokładność.

Należy zaznaczyć, że obliczenia nie zawsze można wykonywać w nieskończoność, bowiem użycie danej metody musi być przerwane, gdy po prawej stronie pojawi się argument nie należący do dziedziny funkcji f .

Przez dokładność metody zwykle rozumie się rodzaj zależności błędu metody od kroku h . Jeśli (przy założonej dostatecznej gładkości f) błąd jest mniejszy od $c|h|^p$, gdzie c jest stałą zależną tylko od f , a $p = 1, 2, 3, \dots$, to mówimy o metodzie rzędu p . Im większy ten rząd, tym metoda jest dokładniejsza. Dla metody Eulera $p = 1$, dla zmodyfikowanej metody Eulera $p = 2$, a dla metody Rungego–Kutty czwartego rzędu $p = 4$. Można wyobrazić sobie metody dokładniejsze, ale odbywa się to kosztem długości obliczeń.

Oto implementacja metody Eulera w MAPLE:

```
euler1:=proc(f,t0,x0,h,N)
local t,x,i,a;
a:=array(1..N,1..2);
t:=t0;
x:=x0;
for i from 1 to N do
    a[i,1]:=evalf(t);
    a[i,2]:=evalf(x);
    x:=evalf(x+h*f(t,x));
    t:=evalf(t+h)
end do;
[seq([a[i,1],a[i,2]],i=1..N)];
end proc;
```

a następnie zmodyfikowanej metody Eulera:

```
modif-euler:=proc(f,t0,x0,h,N)
local t,x,i,a,k1;
a:=array(1..N,1..2);
t:=t0;
x:=x0;
for i from 1 to N do
    a[i,1]:=evalf(t);
    a[i,2]:=evalf(x);
    k1:=evalf(f(t,x));
    x:=evalf(x+h*f(t+h/2,x+(h/2)*k1));
    t:=evalf(t+h)
end do;
[seq([a[i,1],a[i,2]],i=1..N)];
end proc;
```

Porównajmy ich działanie dla zagadnienia

$$x' = x^2 + 1, \quad x(0) = 0.$$

```
A:=euler1((t,x)->x^2+1,0,0,.01,156);
```

```
A := [[0., 0.], [0.10, .1002858314], [0.20, .2025044393], [0.30, .3088431654],
[0.40, .4218374459], [0.50, .5446309253], [0.60, .6813618498],
[0.70, .8377851312], [0.80, 1.022345249], [0.90, 1.248158929],
[1.00, 1.536977456], [1.10, 1.927908283], [1.20, 2.499212463],
[1.30, 3.433430546], [1.40, 5.273821003], [1.50, 10.60617297],
[1.53, 14.86347923], [1.54, 17.08270938], [1.55, 20.01089898]]
```

```
B:=modif-euler((t,x)->x^2+1,0,0,.01,156);
```

```
B := [[0., 0.], [0.10, .1003338064], [0.20, .2027080948], [0.30, .3093327588],
[0.40, .4227873097], [0.50, .5462926437], [0.60, .6841203528],
[0.70, .8422604669], [0.80, 1.029589963], [0.90, 1.260070240],
[1.00, 1.557239063], [1.10, 1.964407796], [1.20, 2.571315614],
```

[1.30, 3.599634218], [1.40, 5.786744985], [1.50, 13.93579823],
 [1.53, 23.69362436], [1.54, 30.72907335], [1.55, 43.30996490]]

i porównajmy z rozwiązaniem dokładnym $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$:

```
seq([i*.01,tan(i*.01)],i=0..155);
[0., 0.], [.10, .1003346721], [.20, .2027100355], [.30, .3093362496],
[.40, .4227932187], [.50, .5463024898], [.60, .6841368083],
[.70, .8422883805], [.80, 1.029638557], [.90, 1.260158218],
[1.00, 1.557407725], [1.10, 1.964759657], [1.20, 2.572151622],
[1.30, 3.602102448], [1.40, 5.797883715], [1.50, 14.10141995],
[1.53, 24.49841044], [1.54, 32.46113891], [1.55, 48.07848248].
```

Na koniec metoda Rungego–Kutty w MAPLE i wyniki dla niej

```
rk4:=proc(f,t0,x0,h,N)
local t,x,i,a,k1,k2,k3,k4;
a:=array(1..N,1..2);
t:=t0;
x:=x0;
for i from 1 to N do
    a[i,1]:=evalf(t);
    a[i,2]:=evalf(x);
    k1:=evalf(f(t,x));
    k2:=evalf(f(t+1/2*h,x+1/2*h*k1));
    k3:=evalf(f(t+1/2*h,x+1/2*h*k1));
    k4:=evalf(f(t+h,x+h*k3));
    x:=evalf(x+1/6*h*(k1+2*k2+2*k3+k4));
    t:=evalf(t+h)
end do;
[seq([a[i,1],a[i,2]],i=1..N)]
end proc;
C:=rk4((t,x)-> x^2+1,0,0,.01,156);
```

C := [[0., 0.], [.10, .1003346613], [.20, .2027099435], [.30, .3093359140],
 [.40, .4227923350], [.50, .5463005103], [.60, .6841327408],
 [.70, .8422803731], [.80, 1.029622995], [.90, 1.260127594],
 [1.00, 1.557345105], [1.10, 1.964622185], [1.20, 2.571811206],
 [1.30, 3.601061782], [1.40, 5.793033424], [1.50, 14.02581753],
 [1.53, 24.11535860], [1.54, 31.61120019], [1.55, 45.60206572]]

Porównajmy wartości w punkcie $t = 1.55$ funkcji kolejno
 w metodzie Eulera 20.01089898
 w zmodyfikowanej metodzie Eulera 43.30996490
 w metodzie Rungego–Kutty 45.60206572

i wreszcie $\operatorname{tg} 1.55 = 48.07848248$.

12 Chaos

Zachowanie dwuwymiarowego układu dynamicznego nie może być zbyt skomplikowane. Trajektorie takiego układu mogą zbliżać się do punktów stałych lub do trajektorii okresowych. Precyzyjniej:

Niech $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \supset \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ będzie funkcją taką, że $\varphi(\cdot, x_0)$ jest rozwiązaniem równania $x' = f(x)$, $x \in V$, z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Przez $\omega(x_0)$ oznaczmy zbiór wszystkich granic ciągów zbieżnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0),$$

gdzie $t_n \rightarrow +\infty$. Analogicznie definiuje się zbiory $\alpha(x_0)$ jako zbiory granic przy $t_n \rightarrow -\infty$. Zbiory te nazywamy zbiorami ω - i α -granicznymi dla układu dynamicznego $x' = f(x)$. Zbiory graniczne zależą tylko od wyboru trajektorii, a więc jeśli x_1 należy do trajektorii punktu x_0 , tzn. $x_1 = \varphi(t_0, x_0)$, to $\omega(x_1) = \omega(x_0)$ i $\alpha(x_1) = \alpha(x_0)$. Zbiory graniczne składają się z całych trajektorii, tzn. jeśli $x \in \omega(x_0)$ i $t \in \mathbb{R}$, to $\varphi(t, x) \in \omega(x_0)$ i analogicznie dla α . Ponadto wprost z definicji

$$\omega(x_0) \subset \overline{\{\varphi(t, x_0) : t \geq 0\}}, \quad \alpha(x_0) \subset \overline{\{\varphi(t, x_0) : t \leq 0\}}.$$

Okazuje się, że dla $k = 2$ zbiory graniczne są bardzo proste. Główną przyczyną tego jest topologia płaszczyzny, a dokładniej twierdzenie Jordana:

Dopełnienie na płaszczyźnie zbioru homeomorficznego z okręgiem jest sumą dwóch zbiorów otwartych i spójnych, z których jeden jest ograniczony (i homeomorficzny z kołem).

Jego konsekwencją, choć nie bezpośrednio, jest

Twierdzenie Poincaré-Bendixsona. Jeżeli zbiór

$$\{\varphi(t, x_0) : t \geq 0\}$$

jest zbiorem ograniczonym na płaszczyźnie i jego domknięcie nie zawiera punktów stałych, to $\omega(x_0)$ jest trajektorią okresową.

Twierdzenie to stosuje się najczęściej do dowodu istnienia trajektorii okresowych. Zbadajmy układ:

$$\begin{cases} x' = x - y - x^3 \\ y' = x + y - y^3. \end{cases}$$

Jeśli jego prawą stronę oznaczmy przez $f(x, y)$, to iloczyn skalarny

$$\langle f(x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4),$$

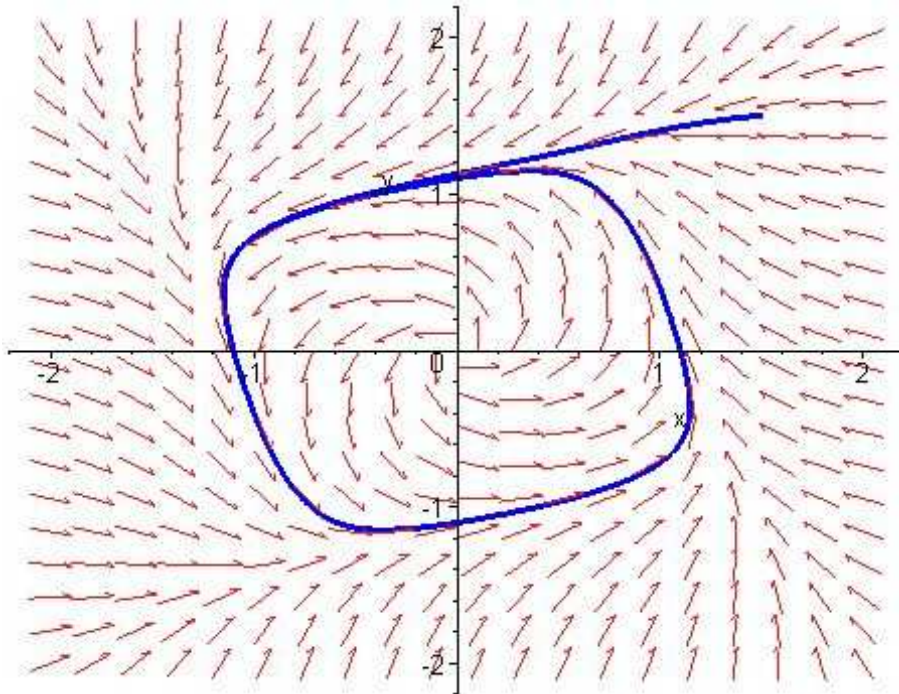
więc na brzegu koła o środku $(0, 0)$ i promieniu $r = r^2 - r^4 + 2x^2y^2$ i wobec nierówności $2xy \leq x^2 + y^2 = r^2$ mamy

$$\langle f(x, y), (x, y) \rangle \leq r^2 - \frac{r^4}{2}.$$

W rezultacie dla $r^2 > 2$ pole wektorowe jest skierowane do wnętrza koła, a więc wszystkie trajektorie wchodzą ce do koła już go nie opuszczają. Z drugiej strony

$$\langle f(x, y), (x, y) \rangle \geq r^2 - r^4,$$

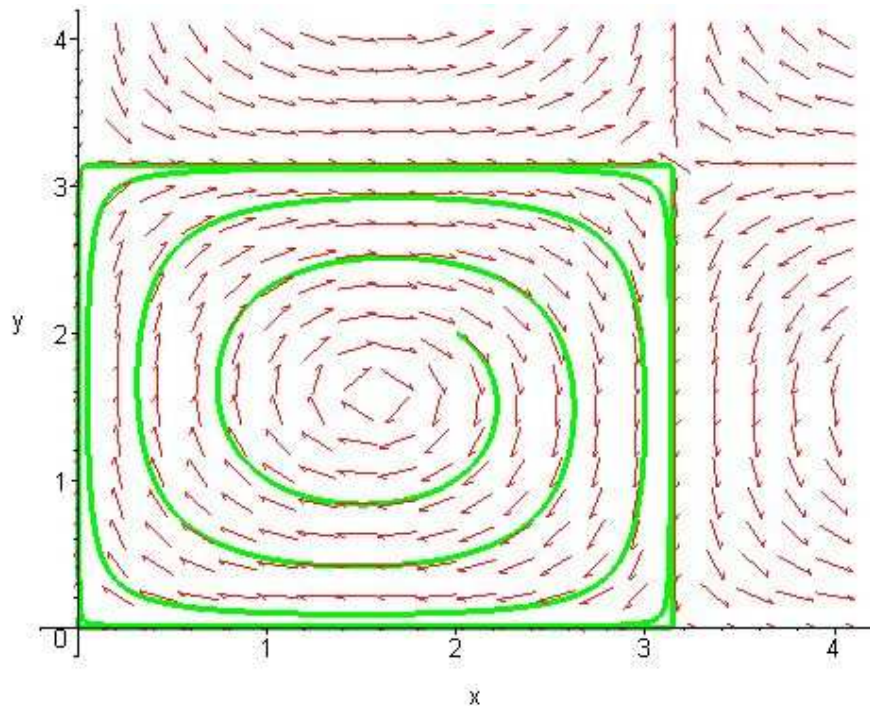
więc dla $r < 1$ jest skierowane na zewnątrz koła. Ustalmy $r_0 < 1$ i $r_1 > \sqrt{2}$. Każda trajektoria wchodząca do tego pierścienia zatem go nie opuszcza i do jej zbioru ω -granicznego możemy zastosować tw. Poincaré-Bendixsona. Wymaga to jeszcze sprawdzenia, że jedynym punktem stałym układu jest $(0, 0)$, który nie należy do pierścienia, a więc i do zbioru ω -granicznego. W efekcie w pierścieniu tym zawiera się pewna trajektoria okresowa.



Zobaczmy jeszcze przykład układu, gdzie zbiór ω -graniczny jest sumą czterech trajektorii heteroklinicznych łączących cztery punkty stałe i tych punktów stałych. Jest to

$$x' = \sin x (-0.1 \cos x - \cos y)$$

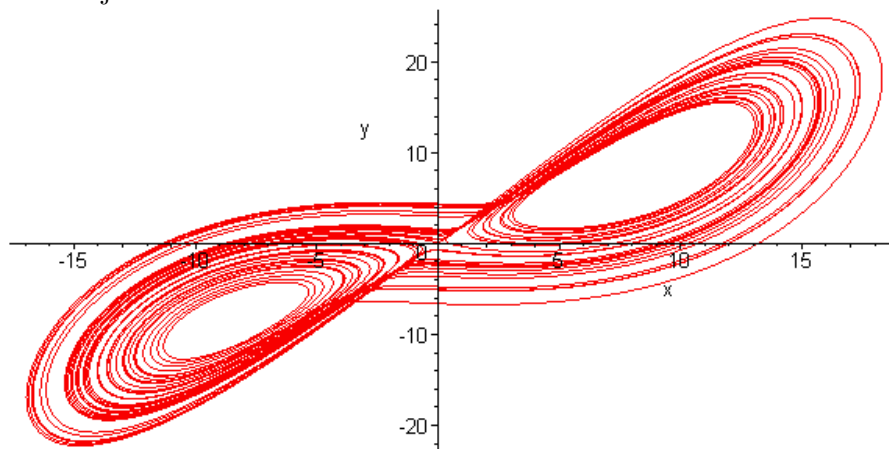
$$y' = \sin y (\cos x - 0.1 \cos y) :$$



Dla $k \geq 3$ zbiory graniczne mogą być już bardzo skomplikowane. Pierwszym historycznie przykładem jest tu układ Lorentza:

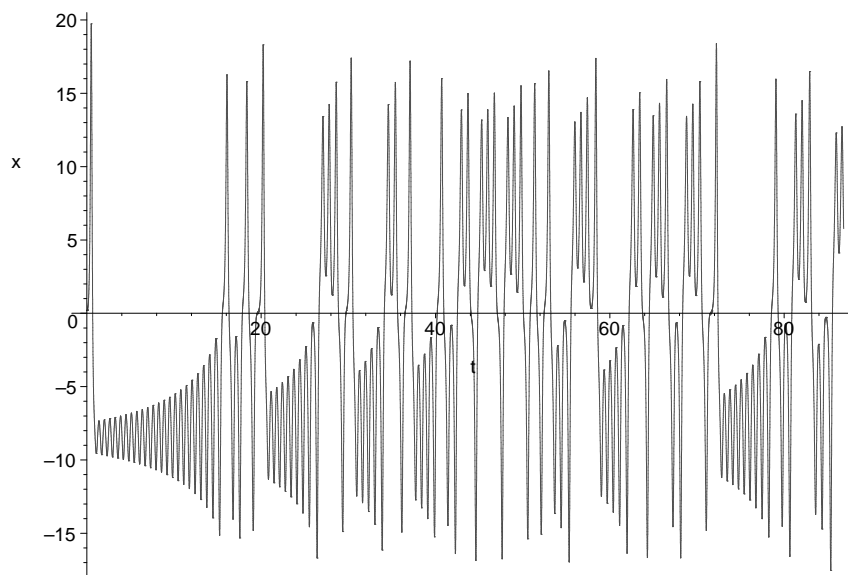
$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

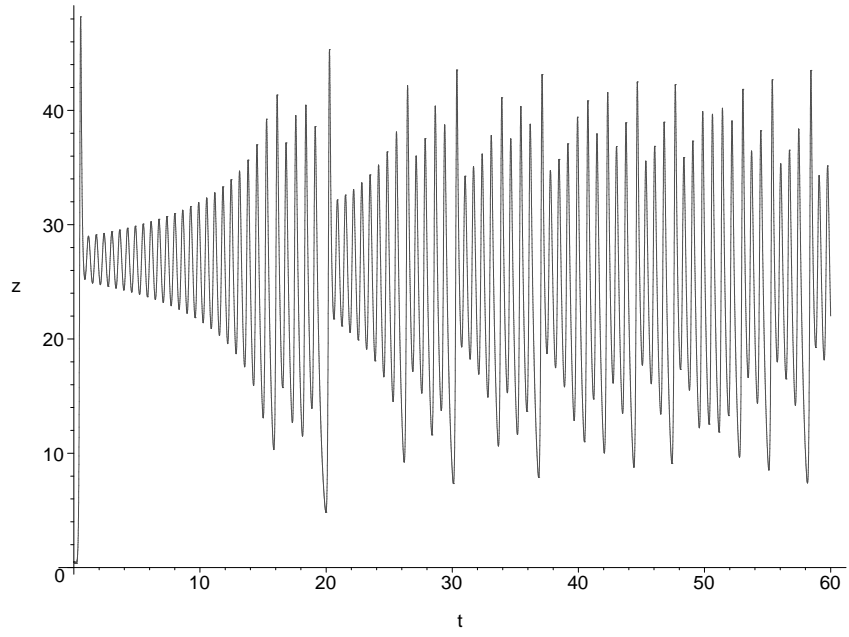
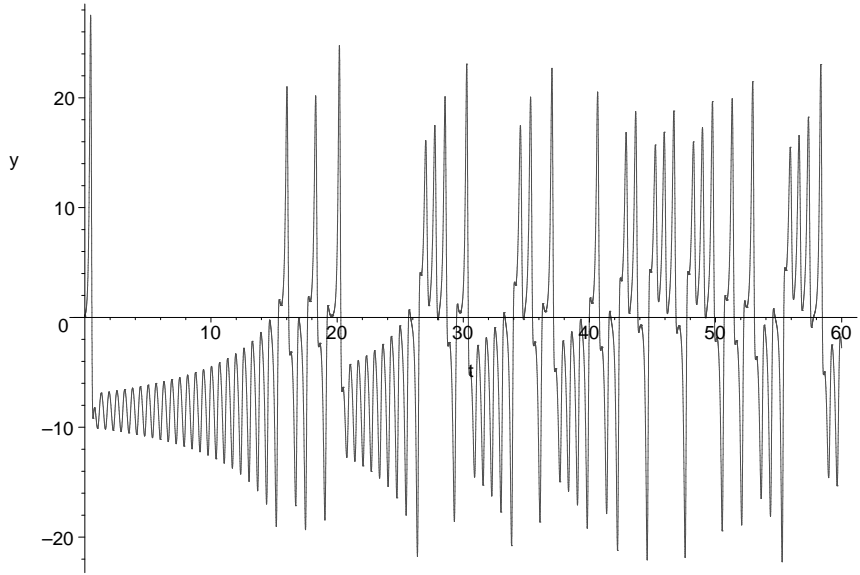
gdzie σ, r, b są dodatnimi stałymi. Równanie to powstaje z ogromnego uproszczenia układu równań cząstkowych opisujących zjawiska pogodowe. Dla pewnych wartości stałych np. $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ zaobserwowano numerycznie trajektorie



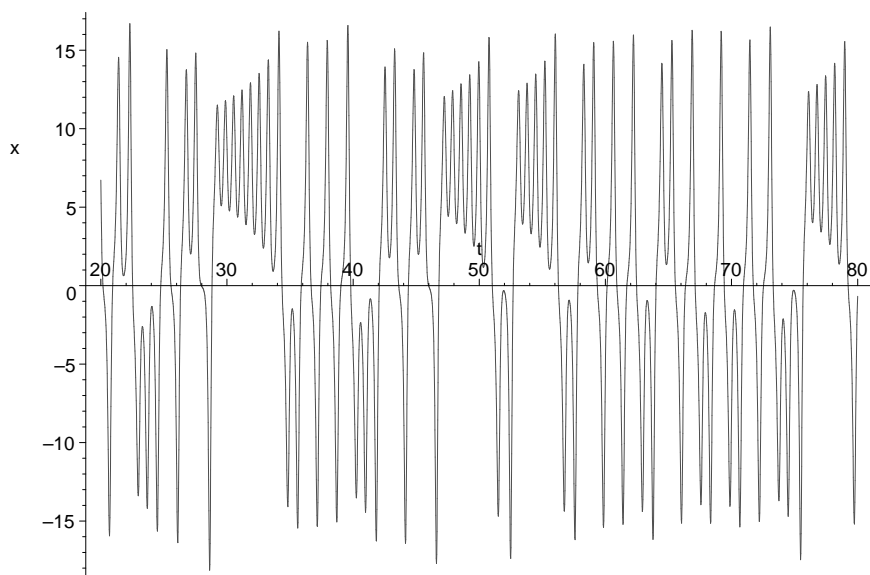
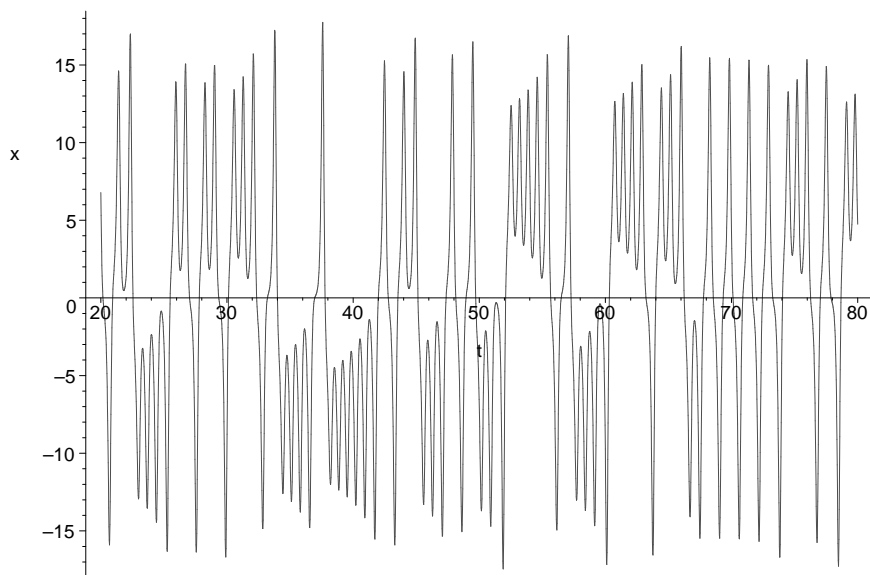
Powyższy obrazek nie zależy praktycznie od wyboru punktu startu – dowolna trajektoria zbliża się do pewnego zbioru leżącego na powierzchni dwóch „skrzydeł motyla.” Okazuje się, że zbiór ten nie jest trajektorią okresową, choć lokalnie jest homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim prostej ze

zbiorem Cantora, ma objętość (trójwymiarową miarę Lebesgue'a) 0, a ruch po tym skomplikowanym zbiorze zwanym dziwnym atraktorem jest „chaotyczny” w tym sensie, że jeśli napiszemy ciąg liczb naturalnych – kolejnych liczb obiegu dwóch skrzydeł, to otrzymany ciąg nie będzie wykazywał żadnej regularności; co więcej takie ciągi otrzymane dla różnych dowolnie bliskich punktów startu będą całkowicie różne (oczywiście początkowe wyrazy mogą się pokrywać – tw. o ciągłej zależności rozwiązania od warunku początkowego). Poniżej pokazujemy rzuty wykresu funkcji $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ będącej rozwiązaniem na kolejne osie x , y i z .





Poniżej wykresy rzutów na oś x dwóch rozwiązań dla punktów startu $[0.3, 0.2, 0.5]$ i $[0.30001, 0.2, 0.5]$.



Jest interesujące, że możliwość pojawienia się skomplikowanej dynamiki podejrzewał już Poincaré w pracy o zaganieniu trzech ciał, ale przez długi czas nie było na ten temat żadnej teorii ani żadnych pewnych danych. Dopiero upowszechnienie komputerów spowodowało, że właściwie każdy może zobaczyć przybliżony obraz trajektorii dowolnego układu dynamicznego. Stąd

obserwacja chaosu w ostatnich 35 latach w bardzo wielu układach: Rösslera, Chua, Duffinga, sprzężone wahadła i.t.d. Inna sprawa, że nadal nie było precyzyjnej definicji układu chaotycznego. Były różne definicje, ale dla żadnej z nich nie udawało się udowodnić, że jakikolwiek układ wykazujący „chaos numeryczny” ją spełnia. Dopiero w końcu lat 90-tych w pracach m. in. Mariana Mrozka z Krakowa (UJ) pojawiły się metody, które dokonały przełomu. O przyjętej definicji chaosu i więcej p. [8].