

# Równania różniczkowe cząstkowe

Bogdan Przeradzki

4 kwietnia 2008

## Literatura

1. A. W. Bicadze „Równania fizyki matematycznej”
2. A. W. Bicadze, D.F. Kaliniczenko „Zbiór zadań z równań fizyki matematycznej”
3. D. Bleecker, G. Csordas „Basic Partial Differential Equations”
4. L. C. Evans „Równania różniczkowe cząstkowe”
5. S. Farlow „Partial Differential Equations for Scientists & Engineers”  
(jest przekł.rosyjski)
6. H. Marcinkowska „Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych”
7. J. Ombach „Wykłady z równań różniczkowych”
8. B. Przeradzki „Równania różniczkowe cząstkowe – wybrane zagadnienia”

## 1 Źródła przyrodnicze równań różniczkowych cząstkowych

1) Równanie przewodnictwa cieplnego (albo dyfuzji)

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t, x),$$

gdzie  $a > 0$ ,  $\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$  operator Laplace’a,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dana funkcja ciągła, a symbolami  $u_t$ ,  $u_{x_i}$ ,  $u_{x_i x_i}$  oznaczamy pochodne cząstkowe funkcji  $u$  zmiennych  $t, x_1, \dots, x_n$ . Funkcja  $u$  jest tu temperaturą ciała zmieniającą się w czasie  $t$  i w przestrzeni  $(x_1, x_2, x_3)$  ( $n = 3$ ), stała  $a$  zależy od współczynnika przewodnictwa cieplnego. W wersji opisującej dyfuzję pewnej substancji  $u$  jest jej stężeniem w chwili  $t$  w danym punkcie  $x \in \mathbb{R}^3$ . Funkcja  $f$  opisuje zewnętrzne źródło ciepła lub wspomnianej substancji.

2) Równanie falowe

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f(t, x),$$

gdzie  $c > 0$  jest stałą, pozostałe oznaczenia jak wyżej, opisuje rozchodzenie się drgań np. struny ( $n = 1$ ), membrany ( $n = 2$ ), lub ośrodka 3-wymiarowego. W pierwszych dwóch przypadkach  $u$  oznacza wychylenie od położenia równowagi, w trzecim  $u$  jest gęstością ośrodka.  $f$  oznacza siłę

zewnątrzną – źródło dźwięku. Stała  $c$  zależy od własności ośrodka (struny, membrany) okazuje się później prędkością rozchodzenia się zaburzenia. Wyprowadzenie równań opiera się na zasadach mechaniki Newtona (por. [5,8]).

3) Równanie Laplace’a i Poissona

$$\Delta u = 0 \quad \Delta u = f(x).$$

Opisują natężenia pola grawitacyjnego lub elektrycznego w próżni ze źródłem  $f$ . Są też równaniami opisującymi stacjonarne (niezależne od czasu) rozwiązania poprzednich równań. Często do nich dążą przy  $t \rightarrow \infty$  pozostałe rozwiązania równania ciepła czy falowego.

Wymieńmy jeszcze: równanie Schrödingera – opis stanu układu kwantowego, równanie ciągłości – opisuje przemieszczanie się np. masy, równania Maxwella – pole elektromagnetyczne, równania nieliniowe takie jak Monge’a-Ampere’a, Kortewega-deVriesa, Sine-Gordona, Burgersa, Naviera-Stokesa – przepływ cieczy lub gazu. Wymieńmy jeszcze równanie Blacka-Scholesa

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + r s u_s - r u = 0$$

– służy do wyceny tzw. instrumentów pochodnych w matematyce finansowej,  $u$  jest funkcją zmiennych  $t$  i  $s$ .

Rząd równania różniczkowego = rząd najwyższej pochodnej cząstkowej niewiadomej funkcji  $u$  występującej w równaniu.

## 2 Równanie liniowe i quasi liniowe rzędu pierwszego

Równanie liniowe rzędu 1:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + b(x) u = f(x). \quad (1)$$

$a_i, b, f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  – dane funkcje ciągłe. Jeśli prawą stronę równania oznaczmy przez  $Lu$ , wtedy  $L$  jest odwzorowaniem liniowym przestrzeni funkcji klasy  $C^1(U)$  w przestrzeń funkcji ciągłych  $C(U)$ .

Równaniem charakterystycznym dla (1) nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$x' = a(x),$$

gdzie  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest polem wektorowym o współrzędnych  $a_i, i = 1, \dots, n$ , a jego trajektorie nazywamy charakterystykami równania (1). Jeśli znamy całkę pierwszą  $F$  równania charakterystycznego, wówczas z definicji

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) F_{x_i}(x) = 0.$$

Jak wiemy z wykładu z równań różniczkowych zwyczajnych, istnieje (lokalnie w otoczeniu punktu  $x_0$  takiego, że  $a(x_0) \neq 0$ ) dokładnie  $n - 1$  niezależnych całek pierwszych  $F_1, \dots, F_{n-1}$

$$\text{rz } [F_{i,x_j}(x)]_{i \leq n-1, j \leq n} = n - 1.$$

Wyznaczają one charakterystyki. Dowolnym rozwiązaniem równania

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} = 0$$

jest wtedy funkcja

$$u(x) = \Phi(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x)),$$

gdzie  $\Phi$  jest dowolną funkcją klasy  $C^1$   $n - 1$  zmiennych.

Przejdźmy do dowolnego równania (1). Niech  $t \mapsto x(t)$  będzie rozwiązaniem równania charakterystycznego i niech  $u$  będzie rozwiązaniem (1). Różniczkując funkcję złożoną  $\varphi(t) := u(x(t))$  dostajemy

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x(t)) \cdot x'_i(t) = -b(x(t))\varphi(t) + f(x(t)).$$

Zatem  $\varphi$  jest rozwiązaniem równania zwyczajnego

$$v' + \tilde{b}(t)v = \tilde{f}(t),$$

gdzie  $\tilde{b} = b \circ x$ ,  $\tilde{f} = f \circ x$  – jest to też równanie liniowe. Znając wartość rozwiązania w jednym punkcie charakterystyki  $u(x(t_0)) = v_0$  możemy użyć wartości rozwiązania równania (1) wzdłuż całej charakterystyki.

Odpowiednikiem warunku początkowego dla równania zwyczajnego jest tu tzw. zagadnienie początkowe (Cauchy'ego) polegające na poszukiwaniu rozwiązania równania (1) t.ż

$$u|_{\Gamma} = \psi,$$

gdzie  $\Gamma$  jest hiperpowierzchnią klasy  $C^1$   $n - 1$ -wymiarową zawartą w  $U$ , a  $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadaną funkcją ciągłą. Powyższe rozumowanie pokazuje, że charakterystyki równania nie mogą być styczne w żadnym punkcie do hiperpowierzchni  $\Gamma$ .

**Twierdzenie.** Jeżeli funkcja  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest lipschitzowsko ciągłą, a hiperpowierzchnia  $\Gamma$  przecina dowolną charakterystykę w co najwyżej jednym punkcie i  $a(x) \notin T_x\Gamma$  ( $T_x\Gamma$  – przestrzeń styczna do  $\Gamma$  w punkcie  $x$ ), to zagadnienie początkowe

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + b(x)u = f(x), \quad u|_{\Gamma} = \psi$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie określone w pewnym otoczeniu  $\Gamma$ .

Jeśli sparametryzujemy lokalnie  $\Gamma$  przy pomocy funkcji

$$\mathbb{R}^{n-1} \supset V \ni s \mapsto \lambda(s) \in \Gamma,$$

i  $t \mapsto x(t, s)$  jest rozwiązaniem równania charakterystycznego z warunkiem początkowym  $x(0, s) = \lambda(s)$ , to funkcja złożona  $\Phi(t, s) = u(x(t, s))$  spełniająca równanie  $v' + \tilde{b}(t)v = \tilde{f}(t)$  względem  $t$  gwarantuje  $\Phi(0, s) = u(\lambda(s)) = \psi(\lambda(s))$ . Wystarczy więc rozwiązać równanie

$$\Phi_t + \tilde{B}(t, s)\Phi = \tilde{f}(t, s)$$

z warunkiem początkowym  $\Phi(0, s) = \psi(\lambda(s))$ .

Omówimy teraz znacznie ogólniejszą klasę równań tzw. równania quasiliniowe. Ogólna teoria równań nieliniowych - p. Evans.

Równaniem quasiliniowym rzędu I nazywamy równanie

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) u_{x_i} = b(x, u). \quad (2)$$

Jest ono nieliniowe, o ile  $b$  lub  $a_i$  zależą od  $u$ , ale traktując lewą stronę jako funkcję  $u' = [u_{x_i}]_{i \leq n}$  widzimy, że jest ona liniowa.

Niech  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  będzie pewnym rozwiązaniem. Wówczas wektorem prostopadłym do wykresu funkcji  $u$ , czyli  $n$ -wymiarowej hiperpowierzchni

$$\text{Graph}(u) = \{(x, u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

w punkcie  $x$  jest

$$[u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), -1].$$

Równanie (2) oznacza więc, że ten wektor jest prostopadły do wektora

$$[a_1(x, u(x)), \dots, a_n(x, u(x)), b(x, u(x))]. \quad (3)$$

Ale stąd wektor (3) jest styczny do wykresu funkcji  $u$ . Taką sytuację napotkaliśmy już wcześniej dla równań liniowych. Możemy więc wnioskować, że wykres rozwiązania składa się z trajektorii równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\begin{cases} x'_i = a_i(x, u), & i = 1, \dots, n, \\ u' = b(x, u). \end{cases} \quad (4)$$

w przestrzeni  $(n+1)$ -wymiarowej. Równanie to pełni analogiczną rolę, jak równanie charakterystyczne dla równań liniowych z tym, że dowolna całka pierwsza  $F$  równania (4) daje postać uwikłaną funkcji  $u$  spełniającej równanie quasiliniowe (2):  $F(x, u) = 0$ . Znając  $n$  całek pierwszych  $F_1, \dots, F_n$  spełniających warunek niezależności

$$\text{rz}[F_{j,x_i}(x, u), F_{j,u}(x, u)]_{i \leq n, j \leq n} = n$$

możemy podać postać dowolnej całki pierwszej

$$\Phi(F_1(x, u), \dots, F_n(x, u)) = 0, \quad (5)$$

gdzie  $\Phi$  jest dowolną funkcją klasy  $C^1$ . Wzór (5) opisuje więc rodzinę wszystkich rozwiązań równania quasiliniowego (2).

### 3 Klasyfikacja równań liniowych rzędu drugiego

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym. Rozważmy równanie

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \quad (6)$$

gdzie  $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  są danymi funkcjami ciągłymi. Równanie to nazywamy liniowym, ponieważ dla dowolnych funkcji klasy  $C^2 - u_1, u_2$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mamy

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Lu_1 + \beta Lu_2.$$

Przez rozwiązanie równania (6) rozumiemy funkcję klasy  $C^2$  spełniającą równanie dla wszystkich  $x$  z dziedziny  $u$ .<sup>1</sup> Zbiór rozwiązań równania jednorodnego  $Lu = 0$  tworzy z oczywistych powodów przestrzeń liniową. Mając wszystkie rozwiązania równania jednorodnego i jedno rozwiązanie  $u_0$  spełniające  $Lu_0(x) = f(x)$  możemy znaleźć wszystkie rozwiązania równania (6). Są one postaci  $u + u_0$ , gdzie  $Lu(x) = 0$ . Możemy zakładać, że  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ .

Skłasyfikujemy równania liniowe rzędu drugiego. Klasyfikacja zależy od wyboru punktu  $x \in \Omega$  i jedynie od części zawierającej pochodne rzędu drugiego. Utwórzmy formę kwadratową w  $\mathbb{R}^n$ .

$$\Lambda(x) \cdot \lambda = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Forma ta jest wyznaczona przez zadanie macierzy współczynników  $A := [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ , która jest macierzą symetryczną  $A^T = A$ . Odpowiada ona wyborowi bazy standardowej w  $\mathbb{R}^n$ . Przypomnijmy z algebry:

dla dowolnej formy kwadratowej istnieje taka baza w  $\mathbb{R}^n$ , że macierzą tej formy w nowej bazie jest diagonalna tzn. jedynie na głównej przekątnej znajdują się wyrazy różne od 0. W języku macierzy oznacza to, że istnieje nieosobliwa macierz  $S$  (opisująca przejście od bazy standardowej do nowej) taka, że

$$S^T \bullet A \bullet S = \widehat{A}$$

<sup>1</sup>Nie jest to jedyna możliwość. We współczesnych podręcznikach rozważa się częściej rozwiązania silne (spełniające równanie prawie wszędzie) i rozwiązania słabe (dystrybucyjne).

jest macierzą diagonalną. Odpowiednio wybierając długości wektorów bazowych możemy doprowadzić do tego, że na głównej przekątnej pozostaną jedynie  $+1$ ,  $-1$  i  $0$ . Postać formy kwadratowej przy takiej macierzy współczynników jest nazywana postacią kanoniczną:

$$\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 - \sum_{i=d+1}^{d+u} \lambda_i^2.$$

Sygnaturą formy kwadratowej nazywamy trójkę liczb naturalnych  $(d, u, n - d - u)$ . Pierwszą współrzędną sygnatury jest więc liczba  $+1$  w postaci kanonicznej, drugą liczba  $-1$ , a trzecią liczba  $0$ .

Mówimy, że równanie (6) jest eliptyczne w punkcie  $x \in \Omega$ , jeśli sygnaturą formy (7) jest  $(n, 0, 0)$  lub  $(0, n, 0)$ , że jest hiperboliczne w punkcie  $x$ , jeśli sygnaturą tą jest  $(n - 1, 1, 0)$  lub  $(1, n - 1, 0)$ , wreszcie, że jest paraboliczne w punkcie  $x$ , jeśli sygnatura wynosi  $(n - 1, 0, 1)$  lub  $(0, n - 1, 1)$ . Oczywiście ta klasyfikacja nie wyczerpuje wszystkich możliwych sygnatur, ale pozostałe przypadki są gorzej zbadane, a ich znaczenie fizyczne jest prawie żadne. Połączenie równań z sygnaturami  $(n, 0, 0)$  i  $(0, n, 0)$  w jedną klasę (i tak samo dla innych par) wynika z prostej obserwacji, że równania  $Lu = f$  i  $-Lu = -f$  są takie same, a odpowiadające im sygnatury tworzą daną parę.

Zobaczmy, co stanie się z naszym równaniem, gdy zastosujemy zamianę zmiennych, a więc dyfeomorfizm  $\xi = \xi(x)$ . Będziemy przy tym zajmować się jedynie częścią zawierającą najwyższe (rzędu 2) pochodne funkcji  $u$ . Połóżmy  $u = v \circ \xi$ ,  $\hat{a}_{ij}(\xi(x)) = a_{ij}(x)$ . Mamy

$$u_{x_i} = \sum_k v_{\xi_k} \cdot \xi_{k,x_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_k \left( \sum_l v_{\xi_k \xi_l} \cdot \xi_{l,x_j} \cdot \xi_{k,x_i} + v_{\xi_k} \xi_{k,x_i x_j} \right).$$

Drugi składnik zawiera tylko pochodne rzędu I nowej niewiadomej funkcji  $v = v(\xi)$ . Dla równania przekształconego forma (7) przyjmuje postać

$$\hat{\Lambda}(\xi) \cdot \lambda = \sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n \hat{a}_{ij}(\xi) \xi_{k,x_i} \xi_{l,x_j} \right) \lambda_k \lambda_l,$$

wrażenie w nawiasie jest współczynnikiem przy  $v_{\xi_k \xi_l}$ . W notacji macierzo-

$$\text{wej } A(x) = [a_{ij}(x)], \hat{A}(\xi) = \left[ \sum_{i,j}^n \hat{a}_{ij}(\xi) \xi_{k,x_i} \xi_{l,x_j} \right], S = [\xi_{l,x_j}]$$

i mamy  $\hat{A}(\xi(x)) = S^T \cdot A(x) \cdot S$ . Jeśli  $S$  jest macierzą ortogonalną, to  $S^T = S^{-1}$  i po zmianie zmiennych macierz współczynników formy kwadratowej (7) zamienia się na macierz podobną. Przy takim przekształceniu wartości własne macierzy  $A$  nie ulegną zmianie. W szczególności można tak

wybrać macierz  $S$ , by macierz  $\widehat{A}$  była diagonalna, a na jej głównej przekątnej występowały wartości własne  $A$ .

Równanie Laplace'a jest oczywiście eliptyczne w każdym punkcie – postać formy kwadratowej jest kanoniczna w bazie standardowej. Równanie falowe należy rozpatrywać w  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dodatkową  $n + 1$ -szą współrzędną jest czas  $t$ . Zatem postacią formy kwadratowej w każdym punkcie jest

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}^2$$

co oznacza, że jest to równanie hiperboliczne w dowolnym punkcie.

Wreszcie równanie przewodnictwa cieplnego (także w  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) prowadzi do formy

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 0 \cdot \lambda_{n+1}^2,$$

więc jest paraboliczne.

Równania mogą mieć różny typ w różnych punktach. Dla przykładu równanie Tricomiego

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

w  $\mathbb{R}^2$  jest eliptyczne w półpłaszczyźnie  $y > 0$ , hiperboliczne w półpłaszczyźnie  $y < 0$  i paraboliczne w punktach prostej  $y = 0$ . Równania o zmieniającym się typie są mniej zbadane.

Jeśli wiemy, że w danym punkcie równanie jest danego typu eliptycznego lub hiperbolicznego, to w otoczeniu tego punktu pozostaje tego samego typu. Powstaje pytanie, czy można dobrać dyfeomorfizm  $\xi = \xi(x)$  sprowadzający to równanie w otoczeniu tego punktu do postaci kanonicznej, tzn. takiej, w której część zawierająca pochodne rzędu drugiego ma postać  $\Delta u$  w przypadku eliptycznym i  $u_{tt} - \Delta u$  w przypadku hiperbolicznym. Odpowiedź dla  $n > 2$  jest negatywna, a dla  $n = 2$  – pozytywna.

## 4 Charakterystyki

Niech hiperpowierzchnia  $\Gamma$  –  $(n-1)$ -wymiarowa klasy  $C^1$  w  $\Omega$  – będzie zadana w postaci

$$\Gamma = \{x \in \Omega : F(x) = 0\},$$

gdzie  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$  i  $\text{rz}[F'(x)] = 1$  dla  $x \in \Gamma$ . Mówimy, że  $\Gamma$  ma orientację charakterystyczną w punkcie  $x_0$  dla równania (6), jeśli

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0) F_{x_i}(x_0) F_{x_j}(x_0) = 0. \quad (8)$$

Mówimy, że  $\Gamma$  jest charakterystyką równania (6), jeśli w każdym punkcie  $x \in \Gamma$  ma orientację charakterystyczną.

Zobaczmy dwukrotnie, jaką rolę pełnią charakterystyki w teorii równań liniowych rzędu II.

Przypuśćmy, że dana jest hiperpowierzchnia  $\Gamma = \{x : F(x) = 0\}$  mająca w punkcie  $x_0$  orientację charakterystyczną. Wówczas choć jedna z pochodnych cząstkowych  $F_{x_i}(x_0) \neq 0$ . Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że  $F_{x_n}(x_0) \neq 0$ . Wówczas odwzorowanie:  $\xi_i = x_i$  dla  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\xi_n = F(x_1, \dots, x_n)$  ma w punkcie  $x_0$  własność  $\det \xi'(x_0) = F_{x_n}(x_0) \neq 0$ . Na mocy twierdzenia o lokalnej odwracalności  $\xi$  jest dyfeomorfizmem otoczenia punktu  $x_0$  na otoczenie punktu  $\xi_0 = \xi(x_0)$ . Zobaczmy jak zmieni się część główna równania  $Lu = f(x)$ , czyli składniki zawierające pochodne rzędu drugiego niewiadomej funkcji, przy tej zmianie zmiennych. Mamy

$$\sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{i,j} \hat{a}_{ij}(\xi) \xi_{k,x_i} \xi_{l,x_j} \right) v_{\xi_k \xi_l}.$$

Dla  $k \leq n-1$ ,  $\xi_{k,x_i} = \delta_{ki}$  (symbol Kroneckera równy 1 dla  $k = i$  i równy 0 dla  $k \neq i$ ), natomiast dla  $k = n$ ,  $\xi_{n,x_i} = F_{x_i}$ . W rezultacie część główna po przekształceniu ma postać

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{n-1} \hat{a}_{kl}(\xi) v_{\xi_k \xi_l} + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \hat{a}_{il}(\xi) F_{x_i}(x) \right) v_{\xi_n \xi_l} \\ + \left( \sum_{i,j=1}^n \hat{a}_{ij}(\xi) F_{x_i}(x) F_{x_j}(x) \right) v_{\xi_n \xi_n}. \end{aligned}$$

Ten ostatni składnik znika na mocy definicji charakterystyki. Znajomość kilku charakterystyk o własności rz  $[F_{i,x_j}(x_0)]_{i=1, \dots, r}^{j \leq n} = r$  w punktach  $x_0 \in \bigcap_{i=1}^r \Gamma_i$ , gdzie  $\Gamma_i = \{x : F_i(x) = 0\}$ , pozwala wyeliminować (lokalnie) składniki zawierające  $v_{\xi_i \xi_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . W sytuacji ekstremalnej, gdy znamy  $n$  takich charakterystyk, że  $\det [F_{i,x_j}(x_0)]_{i,j \leq n} \neq 0$ , można po podstawieniu  $\xi_i = F_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , całkowicie wyeliminować wyrazy zawierające  $v_{\xi_i \xi_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i pozostaną tylko pochodne mieszane. W szczególności równanie

$$\sum_{i \neq j} \hat{a}_{ij}(\xi) v_{\xi_i \xi_j} = 0$$

można w sposób jawny rozwiązać; rozwiązaniami są wszystkie funkcje postaci

$$v(\xi) = \sum_{i=1}^n g_i(\xi_i),$$

gdzie  $g_i$  jest funkcją zmiennej rzeczywistej klasy  $C^1$ .



Wróćmy teraz do zamiany zmiennych w równaniu  $Lu = f(x)$ , którego jedną charakterystykę znamy. Funkcja  $G(\xi) = \xi_n$  ma własność

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} \hat{a}_{kl}(\xi) G_{\xi_k}(\xi) G_{\xi_l}(\xi) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \hat{a}_{il}(\xi) F_{x_i}(\xi) \right) G_{\xi_n} G_{\xi_l} = 0,$$

bowiem  $G_{\xi_l} = 0$  dla  $l \leq n-1$ . Zatem hiperpłaszczyzna  $(n-1)$ -wymiarowa  $\{\xi : \xi_n = 0\}$  jest charakterystyką przekształconego równania. Zamiana zmiennych zgodnie z funkcją opisującą charakterystykę „prostuje” tę charakterystykę.

Równanie 8 nazywa się równaniem charakterystyk równania liniowego rzędu drugiego – jego rozwiązania opisują charakterystyki równania. Dokładniej, charakterystyki są poziomiami wspomnianych rozwiązań.

Zauważmy, że na wektorze prostopadłym do charakterystyki w danym punkcie znika forma  $\Lambda(x_0)$ :

$$\Lambda(x_0) \cdot (F_{x_i}(x_0)) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) F_{x_i}(x_0) F_{x_j}(x_0) = 0.$$

Stąd otrzymujemy natychmiast, że

- równanie eliptyczne nie posiada charakterystyk;
- dla równania parabolicznego w danym punkcie kierunek prostopadły do charakterystyki jest jednoznacznie określony;
- dla równania hiperbolicznego w danym punkcie kierunki prostopadłe do charakterystyki tworzą hiperpowierzchnię  $(n-1)$ -wymiarową (stożek).

Aby uzasadnić dwa ostatnie zdania, sprowadzamy formę  $\Lambda(x_0)$  do postaci kanonicznej. Warunek  $\hat{\Lambda} \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 = 0$  oznacza, że  $\lambda_i = 0$  dla  $i = 1, \dots, n-1$ ,

a  $\lambda_n$  jest dowolne, natomiast z warunku  $\hat{\Lambda} \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 - \lambda_n^2 = 0$  dostajemy

$\lambda_n = \pm \left( \sum_1^{n-1} \lambda_i^2 \right)^{1/2}$ . Powstaje hipoteza, że dla równania parabolicznego w danym obszarze przez każdy punkt tego obszaru przechodzi dokładnie jedna charakterystyka. Nie dysponujemy środkami (w tym skrypcie) do weryfikacji tej hipotezy.

Łatwo znajdujemy charakterystyki równania przewodnictwa cieplnego:  $u_t = \alpha^2 \Delta u$ . Równaniem charakterystyk jest

$$\sum_{i=1}^n F_{x_i}^2(x, t) = 0,$$

skąd  $F_{x_i} = 0$  dla  $i = 1, \dots, n$ , i w rezultacie  $F$  nie zależy od zmiennych przestrzennych  $x$ . Charakterystykami są hiperpowierzchnie  $\Gamma_c = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(t) = C\}$

czyli  $t = \text{const}$ . Znalezienie charakterystyk  $n$ -wymiarowego równania falowego  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  wymagałoby rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego rzędu pierwszego:

$$F_t^2 = c^2 \sum_{i=1}^n F_{x_i}^2. \quad (9)$$

Potrafimy to zrobić jedynie dla  $n = 1$ :  $F_t = \pm c F_x$ .

Rozwiązaniami są funkcje  $F(x, t) = \Phi(x + ct)$  lub  $\Phi(x - ct)$ .

Stąd charakterystykami są proste  $x + ct = a$ ,  $x - ct = a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$ . Przez każdy punkt płaszczyzny  $(x, t)$  przechodzą więc dokładnie dwie charakterystyki.

Zajmiemy się teraz równaniami liniowymi rzędu 2 na płaszczyźnie:

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + R(x, y, u, u') = 0, \quad (10)$$

gdzie,  $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  są klasy  $C^1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Interesuje nas tylko część główna (wyrazy zawierające pochodne rzędu 2), stąd skrótowe oznaczenie  $R$  na pozostałe wyrazy. Wiadomo, że w ustalonym punkcie  $(x_0, y_0)$  równanie to jest jednego z trzech typów: hiperboliczne, paraboliczne lub eliptyczne w zależności od tego, czy wyróżnik

$$\Delta(x_0, y_0) = b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) \quad (11)$$

jest dodatni, zerowy lub ujemny.

Jeżeli  $\Delta(x_0, y_0) > 0$ , wówczas w pewnym otoczeniu tego punktu nadal  $\Delta > 0$ , czyli równanie pozostaje hiperboliczne. W tym otoczeniu równanie charakterystyk

$$aF_x^2 + 2bF_xF_y + cF_y^2 = 0 \quad (12)$$

można zapisać w postaci (rozkład na iloczyn)

$$a \left( F_x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a} F_y \right) \left( F_x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a} F_y \right) = 0.$$

Mamy więc alternatywę równań liniowych rzędu 1

$$\begin{aligned} aF_x + \left( b + \sqrt{\Delta} \right) F_y &= 0, \\ aF_x + \left( b - \sqrt{\Delta} \right) F_y &= 0. \end{aligned}$$

Pozostaje więc znaleźć po jednej całce pierwszej dla równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y) + \sqrt{\Delta(x, y)} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a(x, y) \\ y' = b(x, y) - \sqrt{\Delta(x, y)} \end{array} \right\}.$$

Zauważmy, że te całki pierwsze – odpowiednio oznaczone  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  – są rozwiązaniami równania charakterystyk. Na podstawie wcześniejszego rozumowania stwierdzamy, że podstawienie

$$\begin{cases} \xi = \Phi^+(x, y), \\ \eta = \Phi^-(x, y), \end{cases}$$

$v(\xi, \eta) = u \circ (\Phi^+, \Phi^-)^{-1}(\xi, \eta)$  tam, gdzie odwzorowanie  $(\Phi^+, \Phi^-)^{-1}$  istnieje, redukuje współczynniki przy  $v_{\xi\xi}$  i  $v_{\eta\eta}$  do zera. Odwzorowanie  $(\Phi^+, \Phi^-)$  przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie dowolnego punktu  $(x_1, y_1)$  na otoczenie punktu  $(\Phi^+(x_1, y_1), \Phi^-(x_1, y_1))$ , bo gdyby jakobian tego odwzorowania był równy 0, czyli wektory  $[\Phi_x^+, \Phi_x^+y]$  i  $[\Phi_x^-, \Phi_x^-y]$  w pewnym punkcie byłyby równoległe, to wektory do nich prostopadłe  $[a, b + \sqrt{\Delta}]$  i  $[a, b - \sqrt{\Delta}]$  także byłyby równoległe, co oznaczałoby

$$b + \sqrt{\Delta} = b - \sqrt{\Delta},$$

czyli  $\Delta = 0$  wbrew założeniu. W rezultacie lokalnie można sprowadzić równanie hiperboliczne do postaci

$$v_{\xi\eta} + \widehat{R}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0.$$

Teraz wystarczy podstawienie

$$s = \xi + \eta, \quad t = \xi - \eta,$$

by otrzymać postać kanoniczną

$$w_{ss} - w_{tt} + \widetilde{R}(s, t, w, w_s, w_t) = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że równość  $\Delta = 0$  zachodzi w pewnym zbiorze otwartym (teraz z paraboliczności równania w punkcie  $(x_0, y_0)$  nie możemy wnosić o jego paraboliczności w otoczeniu tego punktu). Równanie charakterystyk ma prostą postać

$$aF_x + bF_y = 0.$$

Całka pierwsza  $\Phi$  układu

$$x' = a(x, y), \quad y' = b(x, y)$$

pozwala teraz zastosować zamianę zmiennych

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y),$$

gdzie  $\Psi$  jest jakąkolwiek funkcją klasy  $C^2$  na wspomnianym zbiorze otwartym o własności

$$\det \begin{bmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \Psi_x & \Psi_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

Po zamianie zmiennych  $v(\xi, \eta) = u \circ (\Phi, \Psi)^{-1}(\xi, \eta)$  dostajemy równanie, w którym znika współczynnik przy  $v_{\xi\xi}$ . Współczynnikiem przy  $v_{\xi\eta}$  jest natomiast

$$\begin{aligned} & 2(a\Phi_x\Psi_x + b(\Phi_x\Psi_y + \Phi_y\Psi_x) + c\Phi_y\Psi_y) \\ &= 2(b\Phi_x + c\Phi_y)\Psi_y = 0 \end{aligned}$$

na mocy równości  $a\Phi_x + b\Phi_y = 0$  oraz  $0 = b(a\Phi_x + b\Phi_y) = ba\Phi_x + ac\Phi_y = a(b\Phi_x + c\Phi_y)$ . Zatem po zamianie zmiennych otrzymujemy równanie w postaci kanonicznej

$$v_{\eta\eta} + \widehat{R}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) = 0.$$

Pozostał nam przypadek eliptyczny. Jeżeli  $\Delta(x_0, y_0) < 0$ , to także w pewnym otoczeniu tego punktu  $\Delta < 0$  i równanie pozostaje eliptyczne. Równanie charakterystyk nie posiada rozwiązań, co uniemożliwia nam proste znalezienie odpowiedniej zamiany zmiennych. Zastosujemy pewien wybieg formalny. Podobnie, jak w przypadku hiperbolicznym, rozłożmy równanie charakterystyk na iloczyn, ale w dziedzinie zespolonej

$$a \left( F_x + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{a} F_y \right) \left( F_x + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{a} F_y \right) = 0.$$

Funkcja  $F$  spełniająca

$$aF_x + \left( b + i\sqrt{-\Delta} \right) F_y = 0$$

jest funkcją zespoloną  $F = \Phi + i\Psi$ , gdzie  $\Phi$  i  $\Psi$  są już rzeczywiste. Stąd

$$\begin{cases} a\Phi_x + b\Phi_y - \sqrt{-\Delta}\Psi_y = 0, \\ a\Psi_x + b\Psi_y + \sqrt{-\Delta}\Phi_y = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Z drugiego równania

$$aF_x + \left( b - i\sqrt{-\Delta} \right) F_y = 0$$

otrzymalibyśmy ten sam układ z zamianą  $\Phi$  i  $\Psi$ .

Zauważmy, że jacobian odwzorowania  $(\Phi, \Psi)$  jest różny od 0 dla  $\Phi, \Psi$  spełniających układ. Gdyby było inaczej w choć jednym punkcie, to  $[\Psi_x, \Psi_y] = \lambda[\Phi_x, \Phi_y]$  dla pewnego  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i po podstawieniu do układu :

$$\begin{cases} a\Phi_x + b\Phi_y - \lambda\sqrt{-\Delta}\Phi_y = 0, \\ \lambda a\Phi_x + \lambda b\Phi_y + \sqrt{-\Delta}\Phi_y = 0, \end{cases}$$

po pomnożeniu przez  $-\lambda$  pierwszego równania i dodaniu obu stronami, dostaniemy

$$(\lambda^2 + 1)\sqrt{-\Delta}\Phi_y = 0.$$

Stąd  $\Phi_y = 0$  (w tym punkcie), a więc i  $\Phi_x = 0$ , co nie jest możliwe.

Zastosujmy więc zamianę zmiennych

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y).$$

Mamy

$$u_x = v_\xi \cdot \Phi_x + v_\eta \cdot \Psi_x,$$

$$u_y = v_\xi \cdot \Phi_y + v_\eta \cdot \Psi_y,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} = & v_{\xi\xi} \cdot \Phi_x^2 + v_{\xi\eta} \cdot \Phi_x \cdot \Psi_x + v_\xi \cdot \Phi_{xx} \\ & + v_{\eta\xi} \cdot \Phi_x \cdot \Psi_x + v_{\eta\eta} \cdot \Psi_x^2 + v_\eta \cdot \Psi_{xx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} = & v_{\xi\xi} \cdot \Phi_x \cdot \Phi_y + v_{\xi\eta} \cdot \Phi_x \cdot \Psi_y + v_\xi \cdot \Phi_{xy} \\ & + v_{\eta\xi} \cdot \Phi_y \cdot \Psi_x + v_{\eta\eta} \cdot \Psi_x \cdot \Psi_y + v_\eta \cdot \Psi_{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} = & v_{\xi\xi} \cdot \Phi_y^2 + v_{\xi\eta} \cdot \Phi_y \cdot \Psi_y + v_\xi \cdot \Phi_{yy} \\ & + v_{\eta\xi} \cdot \Phi_y \cdot \Psi_y + v_{\eta\eta} \cdot \Psi_y^2 + v_\eta \cdot \Psi_{yy}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania otrzymamy następujące współczynniki przy pochodnych rzędu II:

– przy  $v_{\xi\xi}$

$$a_1 = a \cdot \Phi_x^2 + 2b \cdot \Phi_x \cdot \Phi_y + c \cdot \Phi_y^2,$$

– przy  $v_{\xi\eta}$

$$2b_1 = 2a \cdot \Phi_x \cdot \Psi_x + 2b(\Phi_x \cdot \Psi_y + \Phi_y \cdot \Psi_x) + 2c \cdot \Phi_y \cdot \Psi_y,$$

– przy  $v_{\eta\eta}$

$$c_1 = a \cdot \Psi_x^2 + 2b \cdot \Psi_x \cdot \Psi_y + c \cdot \Psi_y^2.$$

Jeżeli z układu (13) wyliczymy

$$\begin{cases} \Psi_x = -\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x - \frac{c}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y, \\ \Psi_y = \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y, \end{cases}$$

i podstawimy do współczynnika  $c_1$ , to otrzymamy

$$c_1 = a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = a_1.$$

Współczynnik  $b_1$  natomiast jest równy

$$\begin{aligned} b_1 = & a\Phi_x \left( -\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x - \frac{c}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y \right) \\ & + b\Phi_x \left( \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y \right) \\ & + b\Phi_y \left( -\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x - \frac{c}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y \right) \\ & + c\Phi_y \left( \frac{a}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\Phi_y \right) = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ  $a_1 \neq 0$  w każdym punkcie, więc nasze równanie przyjmuje postać kanoniczną:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{1}{a_1} \widehat{R}(\xi, \eta, v, v_\xi v_\eta).$$

Sprowadzenie do postaci kanonicznej nie tylko upraszcza równanie; czasami pozwala też znaleźć jego wszystkie rozwiązania. Jest tak dla części równań hiperbolicznych i parabolicznych.

## 5 Zagadnienia brzegowe

Dane równanie różniczkowe cząstkowe posiada wiele rozwiązań; aby wybrać jedno z nich, należy nałożyć dodatkowe warunki (równania). Dla równań różniczkowych zwyczajnych są to zwykle warunki początkowe. Ich odpowiednik dla równań cząstkowych rzędu 2 wygląda następująco. Ustalmy równanie liniowe rzędu drugiego  $Lu = f$ , hiperpowierzchnię  $(n - 1)$ -wymiarową klasy  $C^1$  –  $\Gamma \subset \Omega$  i dwie funkcje ciągłe  $\phi, \psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Szukamy rozwiązania  $u$  równania  $Lu = f(x)$  określonego w otoczeniu  $\Gamma$  spełniającego na  $\Gamma$  dwa warunki

$$u|_{\Gamma} = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = \psi,$$

gdzie  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  oznacza pochodną w kierunku wektora normalnego  $\nu$  do hiperpowierzchni  $\Gamma$ .

Należy zdecydować się na wybór jednego z dwóch możliwych (o ile  $\Gamma$  jest spójna) pól wektorów normalnych  $\Gamma \ni x \mapsto \nu(x)$  na  $\Gamma$ . Takie pole w ogóle istnieje tylko wtedy, gdy  $\Gamma$  jest hiperpowierzchnią orientowalną.

Z przyczyn fizycznych ważne są także inne warunki dodatkowe. Są to warunki Dirichleta:

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$

lub Neumanna:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi.$$

O ile rozwiązania zagadnienia początkowego poszukujemy jednak tylko w pewnym otoczeniu  $\Gamma$  o tyle rozwiązania zagadnień Dirichleta i Neumanna muszą być z natury globalne – określone w całym zbiorze  $\Omega$ .

Jeśli  $\Omega$  jest zbiorem nieograniczonym, wówczas zwykle żądamy jeszcze odpowiedniego zachowania rozwiązania  $u$  w nieskończoności; zwykle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Warunki brzegowe (początkowe, mieszane) są tak dobrane, by gwarantować istnienie dokładnie jednego rozwiązania przy dowolnych danych z pewnej naturalnej przestrzeni. Na układ – równanie cząstkowe + dodatkowe

warunki – można spojrzeć jak na jedno równanie

$$\mathcal{F}(u) = y,$$

gdzie  $\mathcal{F} : X \supset U \rightarrow Y$  jest odwzorowaniem określonym na pewnym podzbiore  $U$  pewnej przestrzeni funkcyjnej  $X$  o wartościach w innej przestrzeni  $Y$ , a  $y \in Y$ . Na przykład dla zagadnienia Dirichleta

$$\Delta u = f(x) \quad x \in \Omega, \quad u | \partial\Omega = \phi,$$

naturalny jest wybór  $X = C(\bar{\Omega})$  – przestrzeń funkcji ciągłych,  $U = C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $Y = C(\Omega) \times C(\partial\Omega)$ ,  $\mathcal{F}(u) = (\Delta u, u | \partial\Omega)$ ,  $y = (f, \phi)$ .

Mówimy, że zagadnienie brzegowe jest dobrze postawione, gdy wybraliśmy przestrzenie  $X, Y$  z odpowiednimi strukturami topologicznymi w ten sposób, że dla każdego  $y \in Y$  istnieje rozwiązanie  $u \in U \subset X$ , jest ono tylko jedno oraz odwzorowanie  $\mathcal{F}^{-1} : Y \rightarrow X$  jest ciągle.

Proste przykłady pokazują, że dla równań eliptycznych nie należy stawiać zagadnień początkowych, ale zagadnienia Dirichleta lub Neumanna, dla równań hiperbolicznych odwrotnie – stawiamy zagadnienie początkowe lub brzegowo-początkowe zwykle

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

lub

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Łatwo też sprawdzić, że zagadnień początkowych nie należy stawiać na charakterystyce. Równanie różniczkowe wymusza wtedy pewną zależność między danymi początkowymi  $\phi$  i  $\psi$ . Dlatego też dla równania przewodnictwa cieplnego, którego charakterystyką jest hiperpowierzchnia  $t = 0$  zagadnienie początkowe ma postać nieco zmienioną tak, by było dobrze postawione przy odpowiednim wyborze przestrzeni  $u(x, 0) = \phi(x)$ .

## 6 Przypomnienie o szeregach Fouriera

Są to szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n,$$

gdzie  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta  $H$ , tzn.  $(\phi_n, \phi_m) = 0$  dla  $n \neq m$  i  $(\phi_n, \phi_n) = \|\phi_n\|^2 = 1$ , a  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  jest ciągiem liczbowym (rzeczywistym, gdy  $H$  jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta) sumowalnym z kwadratem  $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ . Szereg taki jest zbieżny w  $H$ , przy czym norma jego sumy wynosi  $(\sum |a_n|^2)^{1/2}$  (szereg niekoniecznie

jest bezwzględnie zbieżny, np.: dla  $a_n = \frac{1}{n}$  nie jest, a mimo to zawsze jest absolutnie zbieżny w tym sensie, że po dowolnej permutacji jego wyrazów dostajemy szereg zbieżny do tej samej granicy).

Dla dowolnego elementu  $x \in H$  mając układ ortonormalny  $\{\phi_n\}$  można utworzyć szereg Fouriera

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x, \phi_n) \phi_n.$$

Warunek „fourierowskości” szeregu wynika z nierówności Bessela

$$\sum_n |(x, \phi_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Szczególą rolę pełnią tzw. układy ortonormalne zupełne, dla których zachodzi równość

$$x = \sum_n (x, \phi_n) \phi_n \quad (14)$$

przy każdym  $x \in H$ .

W naszych rozważaniach zwykle  $H$  jest przestrzenią funkcji całkowalnych z kwadratem na pewnym odcinku. Jeżeli  $H = L^2(-\pi, \pi)$  (lub  $L^2(0, 2\pi)$ ), to standardowym układem ortonormalnym zupełnym jest rodzina funkcji  $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nt$ ,  $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos nt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  (nie przejmujemy się kolejnością; jak zauważyliśmy wcześniej, nie ma ona znaczenia).

Nietrudno zauważyć, że dla funkcji nieparzystej  $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  znikają iloczyny skalarne

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \, dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, dt,$$

więc szereg Fouriera takiej funkcji ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt.$$

Podobnie postacią szeregu Fouriera funkcji parzystej (dla trygonometrycznego układu ortonormalnego) jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt.$$

Ponieważ każdą funkcję  $x : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  całkowalną z kwadratem można przedłużyć na  $[-\pi, \pi]$  jako funkcję parzystą (i podobnie – nieparzystą), oznacza to, że ciąg  $t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , stanowi układ ortonormalny zupełny w  $L^2(0, \pi)$ . Taki jest też układ funkcji  $t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ .



Przy przejściu do przedziału  $(0, l)$  zamiast  $(0, \pi)$  należy dokonać przeskalowania. Ortonormalne są układy:

$$\begin{aligned} t &\mapsto \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} t, & n = 1, 2, \dots, \\ t &\mapsto \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} t, & n = 1, 2, \dots, \quad t \mapsto \sqrt{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Poza tymi układami pojawiają się też inne: układy ortonormalne zupełne funkcji własnych zagadnień Sturm-Liouville'a (por. wykład z równań różniczkowych zwyczajnych).

Równość (14) oznacza zbieżność szeregu Fouriera w przestrzeni Hilberta do elementu  $x$ . W naszym przypadku jest to zbieżność w sensie normy  $L^2$ . Chociaż wszystkie wyrazy szeregów są klasy  $C^\infty$  (przy wymienionych przykładach układów ortonormalnych zupełnych), to nie możemy mieć pewności, czy suma takiego szeregu jest nawet funkcją ciągłą. Aby tak było, nie wystarczy zbieżność w sensie  $L^2$ ; potrzebna jest zbieżność jednostajna.

Dla przykładu szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(4n+1)t$$

jest szeregiem Fouriera, który dla  $t = \frac{\pi}{2}$  nie jest nawet punktowo zbieżny.

Podstawowym kryterium zbieżności jednostajnej jest kryterium Weierstrassa:

Jeżeli dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$   $\sup_t |x_n(t)| = M_n$  i szereg liczbowy  $\sum_n M_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_n x_n(t)$  jest jednostajnie zbieżny.

Dla szeregów trygonometrycznych oznacza to bezwzględną zbieżność szeregu współczynników  $\sum_n |c_n|$  – oszacowanie  $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n}$  nie wystarczy; ale już  $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n\sqrt{n}}$  – tak. Zbieżność jednostajna gwarantuje tu ciągłość sumy szeregu.

Jeżeli  $x_n$  są różniczkowalne, to szereg pochodnych  $\sum x'_n(t)$  nie musi być jednostajnie zbieżny nawet, gdy  $\sum x_n(t)$  jest. Jednak jeśli dodatkowo szereg pochodnych jest taki, to funkcja

$$x(t) = \sum_n x_n(t)$$

jest różniczkowalna i

$$x'(t) = \sum_n x'_n(t)$$

(por. wykłady z analizy matematycznej). Szeregi trygonometryczne są więc zbieżne do funkcji klasy  $C^1$ , jeśli  $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^{2+\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Ogólniej:

**Twierdzenie.** Jeżeli funkcje  $\phi_n$  są jednej z postaci  $\sin \frac{n\pi}{l}t$ ,  $\cos \frac{n\pi}{l}t$ , oraz  $|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^{p+\varepsilon}}$  dla każdego  $n$ , gdzie  $\varepsilon > 0$ , a  $p = 2, 3, \dots$ , to suma szeregu  $\sum c_n \phi_n(t)$  jest funkcją klasy  $C^{p-1}$ .

**Twierdzenie .** Jeżeli funkcja  $x$  jest  $2\pi$ -okresowa i klasy  $C^p$ , to współczynniki szeregu Fouriera względem układu trygonometrycznego  $\sin nt, \cos nt, 1$ , spełniają

$$|c_n| \leq \frac{\text{const}}{n^p},$$

gdzie  $c_n$  jest współczynnikiem przy  $\cos nt$  lub  $\sin nt$  lub  $1$ .

Dowód. Całkując  $p$ -krotnie przez części dostajemy

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{n} x(\pi) \sin n\pi - \frac{1}{n} x(-\pi) \sin(-n\pi) - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \sin nt \, dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \sin nt \, dt \right| = \dots = \frac{1}{\pi n^p} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x^{(p)}(t) \cos nt \, dt \right| \end{aligned}$$

(ewentualnie w ostatniej całce wystąpi  $\sin nt$ , gdy  $p$  jest liczbą nieparzystą), gdzie wykorzystaliśmy równości  $x(\pi) = x(-\pi), x'(\pi) = x'(-\pi), \dots, x^{(p-1)}(\pi) = x^{(p-1)}(-\pi)$ . W rezultacie

$$|c_n| \leq \frac{1}{\pi n^p} \cdot 2\pi \cdot \sup |x^{(p)}(t)|.$$

Porównajmy różnicę w oszacowaniach w obu twierdzeniach. Wynika ona z faktu, że w obu przypadkach twierdzenia odwrotne nie są prawdziwe – nasze warunki nie są zbyt subtelne (idealnych zresztą nie ma). Ta niedogodność jest jednym z licznych powodów, dla których wprowadza się pojęcie rozwiązania uogólnionego równania różniczkowego cząstkowego, czy pochodnej uogólnionej. Te pojęcia idealnie „pasują” do zbieżności w sensie normy  $L^2$ .

## 7 Równanie przewodnictwa cieplnego

Równanie przewodnictwa cieplnego

$$u_t = a^2 \Delta u \tag{15}$$

gdzie  $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ . Możemy zakładać, że  $a = 1$ , bo przez zamianę zmiennych  $\tau = a^{-2}t$  nasze równanie przechodzi w identyczne z  $a = 1$ . Warunek początkowy

$$u(x, 0) = \phi(x), \tag{16}$$

gdzie  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Przez rozwiązanie tego zagadnienia początkowego będziemy rozumieć funkcję ciągłą  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  spełniającą równanie (15) w zbiorze  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  i warunek (16). Liczba  $T > 0$  jest tu dowolna. Pokażemy, że rozwiązanie zawsze istnieje i to dla  $T = \infty$ . Zdefiniujmy funkcję  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(x, t, x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\mathcal{F}(x, t, y, s) = \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}\right). \quad (17)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja  $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, y, s)$  jest rozwiązaniem równania (15) dla  $x \neq y$  i  $t \neq s$ .

Przypomnijmy z analizy wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}.$$

Stąd przez zastosowanie tw. Fubiniiego

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma = (\pi)^{n/2}.$$

**Twierdzenie.** Rozwiązaniem zagadnienia początkowego, gdzie  $\phi$  jest ciągła i ograniczona na  $\mathbb{R}^n$ , jest

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(x, t, y, 0) \phi(y) dy.$$

Dowód. Funkcję podcałkową i jej pochodne względem  $x$  i  $t > 0$  można oszacować przez funkcje postaci  $P_{x,t}(y) \exp(-\|x-y\|^2/4t)$ , gdzie  $P_{x,t}$  jest wielomianem względem  $y$ . Ponieważ taka funkcja jest całkowalna na  $\mathbb{R}^n$ , więc dla  $t > 0$  i dowolnego  $x$  możemy wejść z pochodnymi pod znak całki. Zatem

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_t(x, t, y, 0) \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_t \mathcal{F}(x, t, y, 0) \phi(y) dy = \Delta u \end{aligned}$$

dla  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ . Jedynym problemem jest możliwość przejścia granicznego

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \phi(x).$$

Do całki zastosujemy zamianę zmiennych  $\sigma = (y-x)/2\sqrt{t}$ . Stąd  $y = 2\sqrt{t}\sigma + x$ , a więc jacobianem dyfeomorfizmu jest  $2^n t^{n/2}$ . Zatem

$$u(x, t) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma.$$

Ustalmy  $x \in \mathbb{R}^n$  i weźmy  $\varepsilon > 0$ . Z ciągłości  $\phi$  w punkcie  $x$  wynika, że istnieje  $\delta > 0$  o własności  $\|x' - x\| \leq \delta \Rightarrow |\phi(x') - \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Wybierzmy najpierw  $M > 0$  tak duże, by

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus [-M, M]^n} e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma < \varepsilon \pi^{\frac{n}{2}} / 4 \sup |\phi|,$$

a następnie

$$t \leq \frac{\delta^2}{(2\sqrt{n}M)^2}.$$

Wówczas dla  $\sigma \in [-M, M]^n$  mamy  $\|\sigma\| \leq \sqrt{n}M$ , a więc  $\|2\sqrt{t}\sigma\| \leq \delta$ . Możemy teraz oszacować dla takich  $t$ :

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \phi(x)| &= \left| \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{\phi(x)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma \right| \\ &\leq \frac{2 \sup |\phi|}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-M, M]^n} e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{[-M, M]^n} \left| \phi(x + 2\sqrt{t}\sigma) - \phi(x) \right| e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowodu wynika, że zbieżność  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \phi(x)$  niekoniecznie jest jednostajna. Jest jednak taka, gdy  $\phi$  jest jednostajnie ciągła.

Łatwo udowodnić, że funkcja

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(x, t, y, \tau) f(y, \tau) dy d\tau$$

jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$u_t - \Delta u = f(x, t), \quad u(x, 0) = 0,$$

gdzie  $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Można stąd wywnioskować postać rozwiązania zagadnienia

$$u_t - \Delta u = f(x, t), \quad u(x, 0) = \phi.$$

Dla zagadnień brzegowo-początkowych udowodnimy jednoznaczność

**Twierdzenie.** Jeżeli  $\Omega$  jest zbiorem otwartym i ograniczonym w  $\mathbb{R}^n$ , którego brzeg  $\partial\Omega$  jest  $(n-1)$ -wymiarową hiperpowierzchnią klasy  $C^1$ , to dla dowolnych funkcji ciągłych  $h : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f : \partial\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  zagadnienie brzegowo-początkowe

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= h(x, t), & (x, t) &\in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= \phi(x), & x &\in \bar{\Omega}, \\ u(x, t) &= f(x, t), & x &\in \partial\Omega, & t &\in [0, T], \end{aligned}$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód. Gdyby były dwa takie rozwiązania  $u_1, u_2$ , to funkcja  $u = u_1 - u_2$  spełniałaby

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u(\cdot, 0) = 0, \quad u(\partial\Omega, \cdot) = 0.$$

Stąd posługując się wzorem na całkowanie przez części otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx &= \int_{\Omega} u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x, t) \Delta u(x, t) dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_i u_{x_i}(x, t)^2 dx + \int_{\partial\Omega} u(x, t) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) dS_x. \end{aligned}$$

Drugi składnik znika na mocy warunku brzegowego  $u(\partial\Omega, \cdot) = 0$ , a pierwszy jest funkcją  $\leq 0$  dla każdego  $t$ . W rezultacie funkcja

$$t \mapsto \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx$$

jest nierosnąca. Ponieważ dla  $t = 0$  mamy z warunku początkowego

$$\int_{\Omega} u(x, 0)^2 dx = 0,$$

więc funkcja ta jest  $\leq 0$  dla każdego  $t \geq 0$ . Ale z samej definicji funkcja przyjmuje wartości  $\geq 0$ . Zatem dla każdego  $t \geq 0$  mamy

$$\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx = 0,$$

czyli  $u(x, t) \equiv 0$ .

Na przykładzie zagadnienia brzegowo-początkowego dla 1-wymiarowego równania przewodnictwa cieplnego wprowadzimy teraz metodę rozdzielania

zmiennych Fouriera. Jest to chyba najczęściej stosowana metoda obliczeniowa do zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych liniowych rzędu 2 i wyższych. Dostarcza ona rozwiązania w postaci sumy szeregu funkcyjnego, co umożliwia ewentualne badania jakościowe. Jest to wielka zaleta w porównaniu z metodami przybliżonymi dającymi wartości liczbowe rozwiązania w punktach siatki pokrywającej zbiór  $\Omega$ , choćby nawet siatka ta była bardzo gęsta. Niestety, zbiór  $\Omega$  musi być szczególnej postaci iloczynu kartezjańskiego, co mocno ogranicza stosowalność metody Fouriera. W niektórych przypadkach zamieniamy wtedy zmienne tak, aby sprowadzić zbiór  $\Omega$  do tej postaci.

Rozwiążemy jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego dla wymiaru 1 z zerowymi warunkami Dirichleta na brzegu odcinka  $[0, \pi]$  i z warunkiem początkowym:

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x). \end{aligned} \tag{18}$$

O funkcji  $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  zakładamy, że jest ciągła. Jeśli od rozwiązania będziemy wymagać, by było funkcją ciągłą na  $[0, \pi] \times [0, \infty]$ , to niezbędny jest warunek zgodności  $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ .

Zagadnienie brzegowe, które napisaliśmy, ma sens fizyczny:  $u$  jest temperaturą w pręcie o długości  $\pi$  i zaniedbywalnie małym przekroju,  $x$  mierzy odległość od jednego z końców pręta, a  $t$  oznacza czas. Pręt jest izolowany termicznie na powierzchni bocznej, ale jego końce mają ustaloną temperaturę środowiska  $= 0$ . W chwili początkowej temperatura w punktach pręta dana jest przez funkcję  $\phi$ .

Rozumowanie, które przeprowadzimy, jest charakterystyczne dla metody Fouriera – jest heurystyczne. Przypuśćmy, że rozwiązanie  $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  istnieje i ma postać

$$u(x, t) = \sum_n f_n(x) g_n(t).$$

Jeśli każdy składnik tej sumy spełnia równanie różniczkowe, to

$$f_n(x) g_n'(t) = a^2 f_n''(x) g_n(t),$$

czyli

$$\frac{f_n''(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{g_n'(t)}{g_n(t)} =: \lambda_n$$

jest stałą. Jeśli zażądamy, by każdy składnik sumy spełniał warunki Dirichleta, to  $f_n(0) g_n(t) = f_n(\pi) g_n(t) = 0$ , czyli funkcja  $f_n$  musi być rozwiązaniem zagadnienia Sturm-Liouville'a

$$f_n''(x) - \lambda_n f_n(x) = 0, \quad f_n(0) = f_n(\pi) = 0.$$

Oczywiście takie rozwiązanie istnieje dla dowolnej stałej  $\lambda_n : f_n(x) \equiv 0$ . Interesują nas wartości  $\lambda_n$ , dla których mamy rozwiązanie nietrywialne.

Jeżeli  $\lambda_n > 0$ , wówczas rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego są funkcje  $f_n(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda_n}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ . Z warunku  $f_n(0) = 0$  dostaniemy  $C_1 + C_2 = 0$ , więc  $C_2 = -C_1$ , a z warunku  $f_n(\pi) = 0$ ,  $C_1 (e^{\sqrt{\lambda_n}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda_n}\pi}) = 0$ , więc  $C_1 = 0$  i stąd  $f_n(x) \equiv 0$ . Podobnie dla  $\lambda_n = 0$ .

Jeżeli  $\lambda_n < 0$ , to  $f_n(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda_n}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda_n}x$ . Z warunku  $f_n(0) = 0$  mamy  $C_1 = 0$ , a z warunku  $f_n(\pi) = 0$ ,  $C_2 \sin \sqrt{-\lambda_n}\pi = 0$ . Wystarczy więc wziąć  $\sqrt{-\lambda_n} = n \in \mathbb{N}$ , czyli  $\lambda_n = -n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , by funkcje  $f_n(x) = \sin nx$  były nietrywialnymi rozwiązaniami zagadnienia Sturm-Liouville'a. Wiadomo, że układ funkcji  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jest ortogonalny i zupełny w przestrzeni Hilberta  $L^2(0, \pi)$ .

Znajdziemy funkcje  $g_n$  spełniające równość

$$g'_n = \lambda_n a^2 g_n.$$

Jest to znowu równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, więc

$$g_n(t) = c_n e^{-n^2 a^2 t},$$

gdzie  $c_n \in \mathbb{R}$  jest dowolną stałą. Funkcja  $u$  spełnia wtedy równanie różniczkowe i warunki Dirichleta z (18). Dobierzemy stałe  $c_n$  tak, by spełniony był warunek początkowy

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(0) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx.$$

Wystarczy więc rozwinąć znaną funkcję  $\phi$  w szereg Fouriera względem układu funkcji  $f_n$ . Stąd otrzymujemy postać funkcji – kandydata na rozwiązanie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx,$$

gdzie

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin nx \, dx.$$

Pozostaje pytanie, czy jest to rzeczywiście rozwiązanie. Aby tak było, funkcja  $u$  musi być ciągła na zbiorze  $[0, \pi] \times [0, \infty)$ , a także szereg występujący w (16.7) musi dopuszczać dwukrotne różniczkowanie wyraz po wyrazie z zachowaniem niemal jednostajnej zbieżności na zbiorze  $[0, \pi] \times [0, \infty)$ .

Od razu widać, że konieczna jest szybka zbieżność ciągu  $c_n$  do 0. Wprawdzie dla  $t \geq \delta > 0$  już ograniczoność ciągu:  $|c_n| \leq M$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , wystarcza na mocy kryterium Weierstrassa:

$$\begin{cases} |c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx| \leq M e^{-n^2 a^2 \delta}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx \right| \leq M a^2 n^2 e^{-n^2 a^2 \delta}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx \right| \leq M n e^{-n^2 a^2 \delta}, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx \right| \leq M n^2 e^{-n^2 a^2 \delta}, \end{cases}$$

przy czym szeregi liczbowe po prawych stronach nierówności są zbieżne. Jednak w otoczeniu  $t = 0$  czynnik zostaje zastąpiony przez 1 i o zbieżności szeregów liczbowych nie może być mowy.

Jeżeli założymy, że nieparzyste i  $2\pi$ -okresowe przedłużenie funkcji na prostą jest klasy  $C^2$ , to

$$|c_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

i dla wszystkich  $t \geq 0$  mamy

$$\left| c_n e^{-n^2 a^2 t} \sin x \right| \leq \frac{M}{n^2}.$$

W rezultacie szereg jest jednostajnie zbieżny dla  $t \geq 0$  i funkcja  $u$  jest ciągła na tym zbiorze. Szereg ten po zrózniczkowaniu wyraz po wyrazie raz względem  $t$  lub dwa razy względem  $x$  jest niemal jednostajnie zbieżny na  $t > 0$ , bowiem dowolny zbiór zwarty  $K$  zawarty w tym zbiorze leży w zbiorze  $t \geq \delta$  dla pewnego  $\delta > 0$  i obowiązują poprzednie oszacowania. Przy opisanej powyżej regularności funkcji  $\phi$  wzór na  $u$  jako sumę szeregu określa rozwiązanie zagadnienia (18).

Metodą Fouriera można też rozwiązywać równania niejednorodne:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

można odcinek  $[0, \pi]$  zastąpić jakimś innym, można jednorodny warunek Dirichleta na końcach odcinka zastąpić innym np.

$$u_x(0, t) = 0 = u(l, t),$$

można też jednorodne warunki brzegowe zastąpić niejednorodnymi.

## 8 Równanie falowe

Rozważmy 1-wymiarowe równanie falowe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{19}$$

gdzie  $c$  jest stałą dodatnią. Znaleźliśmy charakterystyki tego równania: proste  $x \pm ct = \text{const}$ . Stosując podstawienie:  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$  sprowadzamy to równanie do postaci

$$v_{\xi\eta} = 0,$$

którego rozwiązaniami są funkcje

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$



gdzie  $f$  i  $g$  są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi jednej zmiennej. Wracając do funkcji  $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$  mamy postać dowolnego rozwiązania równania (19):

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Aby  $u \in C^2$ , musi być  $f, g \in C^2$ . Z łatwością można teraz otrzymać:

**Wzór d'Alemberta.** Jedynym rozwiązaniem zagadnienia początkowego:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

gdzie  $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C^2$ ,  $\psi \in C^1$ , jest funkcja

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi.$$

Dowód. Dostajemy

$$f(x) + g(x) = \phi(x), \quad cf'(x) - cg'(x) = \psi(x).$$

Z drugiego z równań po scałkowaniu mamy

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \eta(x),$$

gdzie  $\eta'(x) = \psi(x)$ . Stąd i z pierwszego z równań otrzymamy

$$f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \eta(x), \quad g(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \eta(x).$$

W rezultacie rozwiązaniem jest funkcja

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + ct) - \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} (\eta(x + ct) - \eta(x - ct))$$

równa potrzebnej funkcji wobec Podstawowego Twierdzenia Rachunku Całkowego.

Rozwiązanie zagadnienia początkowego istnieje i to dokładnie jedno dla każdej pary  $(\phi, \psi) \in C^2 \times C^1$ , naturalne jest więc pytanie o dobre postawienie tego zagadnienia.

**Twierdzenie.** Ustalmy  $T > 0$ . Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla par  $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \in C^2 \times C^1$  o własności

$$\sup_x |\phi_1(x) - \phi_2(x)| < \delta, \quad \sup_x |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

rozwiązania  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , zagadnień początkowych

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \phi_i(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_i(x)$$

spełniają nierówność

$$\sup_x \sup_{0 \leq t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon.$$

**Dowód.** Bierzemy  $\delta = \varepsilon / (1 + T)$  i stosujemy wzór d'Alemberta

$$\begin{aligned}
 |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\phi_1(x - ct) - \phi_2(x - ct)| + \frac{1}{2} |\phi_1(x + ct) - \\
 &\quad \phi_2(x + ct)| + \\
 &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \\
 &\quad + \frac{1}{2c} \delta \cdot 2ct \leq \frac{\varepsilon}{1+T} + \frac{\varepsilon}{1+T} T = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Twierdzenie to oznacza, że wybierając (w oznaczeniach paragrafu o zagadnieniach brzegowych) jako przestrzeń  $Y$  zbiór  $C^2 \times C^1$  z topologią zbieżności jednostajnej, a jako przestrzeń  $X$  zbiór  $C^2(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R} \times (0, T))$  z tą samą topologią, otrzymamy dobrze postawione zagadnienie. Pewien dysonans stanowi fakt, że przestrzenie  $C^2$  i  $C^1$  z topologią zbieżności jednostajnej nie są zupełne. Możemy go usunąć rozszerzając pojęcie rozwiązania.

Funkcję  $u$  daną wzorem d'Alemberta nazywamy rozwiązaniem uogólnionym zagadnienia początkowego przy dowolnych funkcjach  $\phi \in C(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in C(\mathbb{R})$ . Przestrzeń  $C(\mathbb{R})$  z topologią zbieżności jednostajnej jest już zupełna.

Zauważmy, że rozwiązanie  $u = f + g$ , gdzie  $f = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2c}\psi$ ,  $g = \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2c}\psi$ , jest sumą rozwiązań, z których pierwsze  $(x, t) \rightarrow f(x + ct)$  opisuje „falę poruszającą się do tyłu” z prędkością  $c$ . To fizyczne określenie wynika stąd, że wartość tego rozwiązania w punkcie  $x_0$  w chwili  $t = 0$  wynosi  $f(x_0)$ , a w chwili  $t = 1$  wynosi  $f(x_0 + c)$ , to znaczy jest taka, jak wartość rozwiązania w punkcie  $x_0 + c$  w chwili  $t = 0$ . „Fala” przesunęła się więc przez jednostkę czasu z punktu  $x_0 + c$  do  $x_0$ . Analogicznie rozwiązanie  $(x, t) \rightarrow g(x - ct)$  opisuje „falę biegnącą do przodu”. Całe rozwiązanie  $u$  jest, jak mówią fizycy, superpozycją obu tych fal.

Przejdźmy teraz do zagadnienia brzegowo-początkowego:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\
 u(x, 0) &= \phi(x), \\
 u_t(x, 0) &= \psi(x), \\
 u(0, t) &= 0 = u(l, t).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Przez jego rozwiązanie rozumiemy funkcję  $u \in C^2((0, l) \times (0, T)) \cap C_t^1([0, l] \cap [0, T]) \cap C([0, l] \cap [0, T])$  spełniającą równanie falowe w prostokącie  $(0, l) \times (0, T)$ , warunki początkowe dla  $x \in [0, l]$  i brzegowe dla  $x = 0, x = l$  i  $t \in [0, T]$ . Funkcje  $\phi, \psi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  są co najmniej ciągłe i spełniają warunki zgodności  $\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ .

Aby móc zastosować wzór d'Alemberta, przedłużamy  $\phi$  i  $\psi$  na całą prostą. Jest jasne, że dowolne przedłużenie nie zagwarantuje warunku brzegowego,

bowiem

$$u(0, t) = \frac{\tilde{\phi}(-ct) + \tilde{\phi}(ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \tilde{\psi}(\xi) d\xi,$$

gdzie  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{\psi}$  są przedłużeniami. Efekt znikania tej liczby osiągniemy, gdy weźmiemy przedłużenia nieparzyste:  $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$  dla  $x \in [0, l]$ ,  $\tilde{\phi}(l+x) = -\phi(l-x)$  dla  $x \in (0, l]$ ,  $\tilde{\phi}(-x) = -\phi(x)$  dla  $x \in (0, l]$ . Dalsze przedłużenie jest  $2l$ -okresowe:  $\tilde{\phi}(x+2nl) = \tilde{\phi}(x)$ ,  $x \in [0, 2l)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Analogiczne przedłużenie stosujemy do funkcji  $\psi$ .

Zauważmy, że dzięki warunkom zgodności funkcje  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{\psi}$  są ciągłe na  $\mathbb{R}$ . Niestety, nawet dla  $\phi, \psi$  klasy  $C^\infty$  na  $[0, l]$  przedłużenia  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{\psi}$  nie muszą być klasy odpowiednio  $C^2$  i  $C^1$  na  $\mathbb{R}$ . Jeśli są, wówczas rozwiązanie dane wzorem d'Alemberta dla  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{\psi}$  jest zwykłym rozwiązaniem; jeśli nie są, wówczas jest to rozwiązanie uogólnione. Spełnienie warunków brzegowych wynika z nieparzystości  $\tilde{\phi}$  i  $\tilde{\psi}$  (przez nieparzystość względem  $l$  rozumiemy własność  $\tilde{\phi}(l-\xi) = -\tilde{\phi}(l+\xi)$ ). Przedstawiona tu metoda nosi nazwę metody odbić.

Metodę Fouriera rozdzielania zmiennych można stosować również do równania falowego. Pokażemy to na przykładzie równania niejednorodnego z niejednorodnymi warunkami brzegowymi. Należy podkreślić, że w przypadku takiej podwójnej niejednorodności zawsze musimy skorzystać z tego, co fizycy nazywają zasadą superpozycji i poszukiwać rozwiązania w postaci sumy – oba składniki spełniają zagadnienie „w połowie niejednorodne”.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ u(0, t) &= A, \quad u(l, t) = B, \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Warunki zgodności:  $\phi(0) = A$ ,  $\phi(l) = B$ . Należy szukać rozwiązania w postaci sumy

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x).$$

Jeśli  $w(0) = A$  i  $w(l) = B$ , to warunki brzegowe na funkcję  $v$  są już jednorodne. Jeśli dodatkowo  $w''(x) = 0$ , to  $v$  spełnia równanie falowe. Zatem należy wziąć

$$w(x) = A + \frac{B-A}{l}x$$

i wtedy funkcja  $v$  musi spełniać

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ v(0, t) &= 0 = v(l, t), \\ v(x, 0) &= \phi(x) - w(x), \quad v_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Stosujemy teraz metodę Fouriera otrzymując

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad f_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Poszukujemy więc rozwiązania w postaci

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Po wstawieniu do równania różniczkowego dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x = -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Rozwijamy także względem układu  $f_n$  funkcję  $\phi - w$ ; współczynnikiem przy  $f_n$  jest

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l (\phi(x) - w(x)) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Szczęśliwie niejednorodność w równaniu różniczkowym i  $v_t(x, 0)$  nie wymagają już rozwijania. Porównując współczynniki przy  $f_n$  dostajemy

$$g_n''(t) = -\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} g_n(t), \quad g_n(0) = c_n, \quad g_n'(0) = 0$$

dla  $n \neq 2$  oraz

$$g_2''(t) = -\frac{4\pi^2 c^2}{l^2} g_2(t) + \sin 2t, \quad g_2(0) = c_2, \quad g_2'(0) = 0.$$

W pierwszym przypadku

$$g_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi c}{l} t,$$

a w drugim po uzmiennieniu stałych

$$g_2(t) = \alpha(t) \sin \frac{2\pi c}{l} t + \beta(t) \cos \frac{2\pi c}{l} t.$$

Z układu

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \sin \frac{2\pi c}{l} t + \beta'(t) \cos \frac{2\pi c}{l} t &= 0, \\ \frac{2\pi c}{l} \left( \alpha'(t) \cos \frac{2\pi c}{l} t - \beta'(t) \sin \frac{2\pi c}{l} t \right) &= \sin 2t \end{aligned}$$

wyznaczamy  $\alpha'$  i  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{l}{2\pi c} \sin 2t \cdot \cos \frac{2\pi c}{l} t, \\ \beta'(t) &= -\frac{l}{2\pi c} \sin 2t \cdot \sin \frac{2\pi c}{l} t. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{l}{2\pi c} \int_0^t \sin 2s \cdot \sin \frac{2\pi c}{l} (t-s) ds \\ &\quad + \alpha \sin \frac{2\pi c}{l} t + \beta \cos \frac{2\pi c}{l} t. \end{aligned}$$

Z warunków początkowych  $g_2(0) = c_2$ ,  $g_2'(0) = 0$  wynika, że  $\beta = c_2$ ,  $\alpha = 0$ , czyli ostatecznie

$$u(x, t) = A + \frac{B - A}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi c}{l}t \sin \frac{n\pi}{l}x + \frac{l}{2\pi c} \int_0^t \sin 2s \sin \frac{2\pi c}{l}(t - s) ds \cdot \sin \frac{2\pi}{l}x.$$

W sytuacji ogólnej, gdy  $A$  i  $B$  są funkcjami zmiennej  $t$ , należy poszukiwać rozwiązań w postaci

$$u(x, t) = v(x, t) + r_0(x)A(t) + r_l(x)B(t).$$

Jeśli chcemy, by warunki brzegowe na  $v$  były jednorodne, musimy mieć  $r_0(0) = 1$ ,  $r_l(0) = 0$  oraz  $r_0(l) = 0$ ,  $r_l(l) = 1$ . To podstawienie jest możliwe dla  $A$  i  $B$  klasy  $C^2$ , ale wybór  $r_0$  i  $r_l$  jest już prosty:

$$r_0(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad r_l(x) = \frac{x}{l}.$$

Dla ogólniejszych warunków brzegowych

$$\begin{aligned} u_x(0, t) + ru(0, t) &= A(t), \\ u_x(l, t) + su(l, t) &= B(t), \end{aligned}$$

należy użyć innych funkcji liniowych zmiennej  $x$  w miejsce  $r_0$  i  $r_l$ .

## 9 Zastosowanie metody Fouriera do innych równań

Metodę rozdzielania zmiennych można stosować także do innych równań. Jedynym ograniczeniem jest ich liniowość i liniowość warunków dodatkowych. Pokażemy teraz, jak stosuje się ona do najprostszych równań eliptycznych takich jak równanie Laplace'a. W przypadku dwuwymiarowym zbiór  $\Omega$  może być prostokątem albo dawać się sprowadzić do prostokąta. Niech więc  $\Omega$  będzie kołem o środku w początku układu i promieniu  $R$ . Przechodząc do współrzędnych biegunowych  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  musimy wyrazić laplajsan w nowych współrzędnych. Zamiast równania

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

dostaniemy

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\phi\phi} = 0.$$

Jeśli interesuje nas równanie Laplace'a z warunkiem Dirichleta

$$u|_{\partial\Omega} = h, \quad h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

to odpowiedni warunek na  $v$  ma postać

$$v(R, \phi) = h(\phi).$$

Musimy jednak pamiętać, że zamiana zmiennych jest prawomocna dla  $r > 0$ , czyli  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Od rozwiązania  $v$  można więc żądać, by istniała granica  $\lim_{r \rightarrow 0^+} v(r, \phi)$ . Drugim warunkiem zgodności jest  $2\pi$ -okresowość funkcji  $h$ . Przy założeniu ciągłości (a nawet całkowalności) funkcji  $h$  możemy znaleźć jej szereg trygonometryczny. Przy założeniu, że  $h$  jest ciągła i przedziałami monotoniczna, zachodzi równość

$$h(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \sin \psi \, d\psi.$$

Jeśli rozwiązanie ma postać  $v(r, \phi) = f(r)g(\phi)$ , to

$$\frac{r^2 f''(r)}{f(r)} + \frac{r f'(r)}{f(r)} + \frac{g''(\phi)}{g(\phi)} = 0,$$

a więc obie funkcje wchodzące w skład tej sumy muszą być stałe i

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = \lambda = -\frac{g''(\phi)}{g(\phi)}.$$

Ponieważ  $g$  powinna być funkcją  $2\pi$ -okresową, a równanie

$$g''(\phi) + \lambda g(\phi) = 0$$

ma rozwiązania  $2\pi$ -okresowe tylko dla  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , więc tylko takie stałe są dopuszczalne. Dla nich

$$g_n(\phi) = c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi,$$

gdzie  $c_n$  i  $d_n$  są dowolnymi stałymi. Odpowiadające  $n^2$  równanie na funkcję  $f_n$  ma postać

$$r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - n^2 f_n(r) = 0.$$

Jest to równanie Eulera, którego układem fundamentalnym rozwiązań jest para funkcji  $r \mapsto r^n$ ,  $r \mapsto r^{-n}$ , a w wyjątkowym przypadku  $n = 0$  para

funkcji  $r \mapsto 1$ ,  $r \mapsto \ln r$ . Można więc zapisać nieznanne rozwiązanie  $v$  jako sumę szeregu

$$\begin{aligned} v(r, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) g_n(\phi) \\ &= \hat{c}_0 + \hat{d}_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{c}_n r^n + \hat{d}_n r^{-n} \right) (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi). \end{aligned}$$

Każdy składnik tej sumy spełnia równanie różniczkowe bez względu na wybór stałych. Jesliby więc można było wejść pod znak sumy szeregu z pochodnymi aż do rzędu 2 włącznie z zachowaniem jednostajnej zbieżności, to funkcja  $v$  spełniałaby równanie różniczkowe. Zaobserwowane przez nas wcześniej żądanie, by istniała granica  $\lim_{r \rightarrow 0^+} v(r, \phi)$ , oznacza, że  $\hat{d}_n = 0$  dla  $n \geq 0$ . Pozostaje wykorzystać warunek brzegowy

$$h(\phi) = v(R, \phi) = \hat{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n R^n (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi).$$

Porównując współczynniki z szeregu Fouriera funkcji  $h$

$$\hat{c}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \hat{c}_n R^n c_n = a_n, \quad \hat{c}_n R^n d_n = b_n,$$

i w rezultacie

$$v(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi).$$

Zbieżność jednostajna tego szeregu w każdym kole domkniętym  $\overline{B}(0, R_1) \subset B(0, R)$  wraz z pochodnymi jest gwarantowana na podstawie kryterium Weierstrassa i prostego faktu:

jeśli  $0 < q < 1$ , ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony i  $p \in \mathbb{N}$ , to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^p q^n$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Zatem otrzymana funkcja  $v$  spełnia równanie różniczkowe w kole  $B(0, R)$ . Przy funkcji  $h$  prawie dowolnej będącej jedynie sumą zbieżnego punktowo szeregu Fouriera, nie jest wcale oczywiste, że

$$\lim_{r \rightarrow R^-} v(r, \phi) = h(\phi).$$

Jest to konsekwencja tw. Abela (por. wykłady z analizy lub np. [Fichtenholz], t. 2, s. 344). W rezultacie znaleziona funkcja  $v$  jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla koła.

Jeśli wstawimy wzory na  $a_n$  i  $b_n$  i wykorzystamy znany wzór trygonometryczny

$$\cos n\psi \cos n\phi + \sin n\psi \sin n\phi = \cos n(\phi - \psi),$$

to dostaniemy

$$v(r, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\phi - \psi) \right] d\psi.$$

Możemy zsumować szereg w nawiasie kwadratowym. Wystarczy oznaczyć

$$z = \frac{r}{R} e^{i(\phi - \psi)}.$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n(\phi - \psi) + i \sin n(\phi - \psi)),$$

a więc nasz szereg to część rzeczywista

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \operatorname{Re} \frac{z}{1-z},$$

a wyrażenie w nawiasie kwadratowym to

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} \right) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\left|1 - \frac{r}{R} (\cos(\phi - \psi) + i \sin(\phi - \psi))\right|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \psi) + r^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór (zwany wzorem Poissona):

$$v(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2) h(\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \psi) + r^2} d\psi.$$

Ogólniej, dla zagadnienia Dirichleta w kuli  $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta u = 0 \quad \text{w } B(0, R), \quad u|_{\partial B(0, R)} = h$$

rozwiązaniem jest

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} h(y) dS_y,$$



gdzie całkowanie odbywa się względem miary indukowanej na sferze, a  $\sigma_n$  oznacza miarę indukowaną sferą o promieniu 1 w  $\mathbb{R}^n$ .

Rozpatrzmy ruch membrany kołowej, której brzeg  $\partial B(0, 1)$  jest zamocowany w położeniu równowagi na stałe. Oznacza to, że mamy równanie falowe

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y, t) \in B(0, 1) \times (0, \infty)$$

z warunkiem brzegowym

$$u|_{\partial B(0, 1) \times [0, \infty)} = 0.$$

Załóżmy, że znamy położenie punktów membrany w chwili początkowej  $t = 0$  i zależy ono jedynie od odległości punktu od środka membrany. We współrzędnych biegunowych jest to funkcja  $A(r)$  zależna tylko od  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Załóżmy też, że w tej chwili prędkość wszystkich punktów membrany wynosi 0. Po przejściu do współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie  $x, y$  mamy więc zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 (v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\phi\phi}), \\ v(1, \phi, t) = 0, \\ v(r, \phi, 0) = A(r), \\ v_t(r, \phi, 0) = 0, \end{cases}$$

gdzie  $A : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  jest co najmniej ciągła. Uwzględniając niezależność warunków brzegowo-początkowych od  $\phi$  możemy przyjąć, że rozwiązanie także nie zależy od tej zmiennej i ostatecznie

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 (v_{rr} + \frac{1}{r}v_r), \\ v(1, t) = 0, \quad v(r, 0) = A(r), \quad v_t(r, 0) = 0. \end{cases}$$

Warunek zgodności jest tylko jeden

$$A(1) = 0.$$

Jeśli żądamy, by  $v = f(r)h(t)$ , to po wstawieniu do równania różniczkowego i podzieleniu przez  $f \cdot h$  otrzymamy

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2 \frac{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)}{f(r)}.$$

Stąd stałe powinny być funkcje

$$\frac{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)}{f(r)} = \lambda,$$

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2\lambda.$$

Zatem  $f$  spełnia

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \lambda f(r) = 0.$$

Z warunku brzegowego wynika  $f(1) = 0$  i poszukujemy takich stałych  $\lambda$ , dla których równanie to posiada nietrywialne rozwiązanie skończone w  $r = 0$  i znikające w  $r = 1$ . Osobliwość dla  $r = 0$  jednego ze współczynników powoduje, że jedno z dwóch liniowo niezależnych rozwiązań ma biegun dla  $r = 0$ , więc jest nieograniczone. Drugie z nich poszukamy w postaci szeregu potęgowego

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Wstawiając do równania

$$f'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n,$$

$$f''(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n$$

i porównując współczynniki przy tych samych potęgach  $t$  dostajemy

$$c_{2n+1} = 0, \quad c_{2n} = \frac{\lambda^n}{((2n)!!)^2} c_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

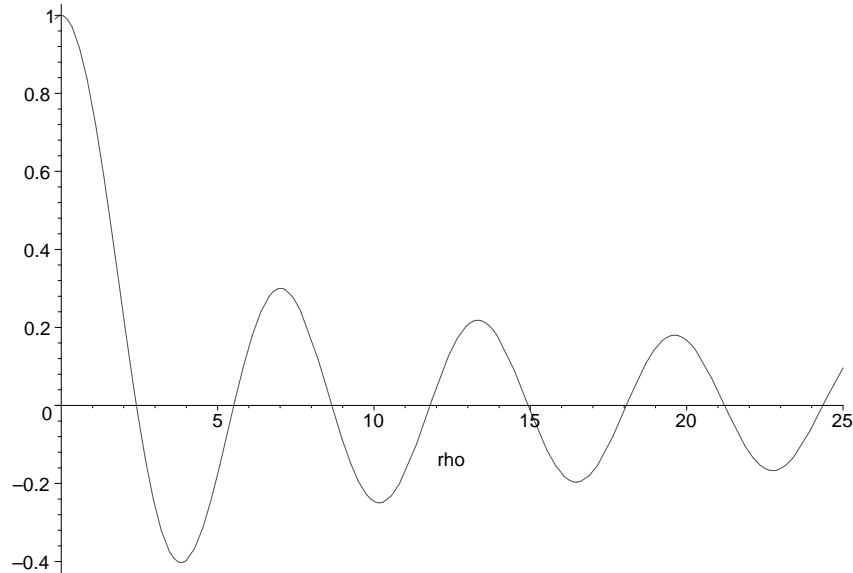
Pierwszy współczynnik możemy wybrać dowolnie – kładziemy  $c_0 = 1$ . Nie trudno zauważyć, że dla  $\lambda \geq 0$  rozwiązania są stałe dodatnie, więc  $\lambda < 0$ . Niech  $\lambda = -\mu^2$  i podstawmy do równania na  $f$  :  $\rho := \mu r$ . Dostaniemy następujące równanie na  $g(\rho) := f(\rho/\mu)$  :

$$g''(\rho) + \frac{1}{\rho}g'(\rho) + g(\rho) = 0.$$

Funkcję, która spełnia to równanie i warunki:  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = 0$ , a więc

$$g(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (k!)^2} \rho^{2k}$$

nazywamy funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0 i oznaczamy  $J_0$ . Oto wykres tej funkcji



Jak widać ma ona liczne miejsca zerowe. W podręcznikach z funkcji specjalnych dowodzi się, że w istocie  $J_0$  ma ciąg miejsc zerowych  $\mu_n \rightarrow \infty$ . Jeśli rozwiązanie  $f$  ma spełniać  $f(1) = 0$ , to  $f(r) = C J_0(\mu_n r)$ , gdzie  $C$  jest dowolną stałą. Wtedy rozwiązanie wyjściowego problemu ma postać

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\mu_n r) (a_n \cos \mu_n c t + b_n \sin \mu_n c t), \quad (21)$$

gdzie  $a_n, b_n$  są stałe. Stałe te wyznaczymy teraz z warunków początkowych. Udowodnimy najpierw warunek ortogonalności:

$$\int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_m x) dx = 0, \quad \text{dla } n \neq m.$$

Funkcja  $x \mapsto J_0(\mu x)$  spełnia równanie

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \mu^2 u = 0.$$

Równanie to z  $\mu = \mu_n$  mnożymy przez  $x J_0(\mu_m x)$ , równanie z  $\mu = \mu_m$  mnożymy przez  $x J_0(\mu_n x)$ , i oba odejmujemy stronami:

$$\begin{aligned} & x \left( J_0(\mu_n x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_n x) \right) + \\ & + \left( J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right) + \\ & + (\mu_m^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_m x) J_0(\mu_n x) = 0 \end{aligned}$$

lub zauważając, że pierwsze dwa składniki są pochodną iloczynu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x \left( J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_m x) - J_0(\mu_m x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right) + \\ + (\mu_m^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_m x) J_0(\mu_n x) = 0. \end{aligned}$$

Całkując tę równość od 0 do 1 dostajemy tezę.

Z warunku początkowego  $v_t(r, 0) = 0$  podstawiając do (21) mamy  $b_n = 0$  dla każdego  $n$ , a z warunku  $v(r, 0) = A(r)$  dostajemy

$$A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_n r).$$

Mnożymy tę równość przez  $r J_0(\mu_m r)$  i całkujemy od 0 do 1. Po wykorzystaniu pokazanej ortogonalności tylko jeden składnik po prawej stronie nie znika. Stąd

$$a_m = \frac{\int_0^1 r J_0(\mu_m r) A(r) dr}{\int_0^1 r J_0^2(\mu_m r) dr}.$$

Wejście z całką pod znak sumy szeregu wykonane po drodze zachodzi przy pewnych założeniach o regularności funkcji  $A$ . Tym problemem zajmować się nie będziemy.

## 10 Funkcje harmoniczne

Niech  $\Omega$  będzie podzbiorem otwartym  $\mathbb{R}^n$ . Funkcję  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy harmoniczną w  $\Omega$ , jeśli jest klasy  $C^2$  i spełnia równanie Laplace'a w  $\Omega$  :  $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$ . Zbiór funkcji harmonicznych w  $\Omega$  oznaczamy  $Har(\Omega)$ . Zbiór ten z naturalnymi działaniami stanowi przestrzeń liniową.

**Przykłady:** (i) Funkcjonały afiniczne, czyli funkcje postaci  $u(x) = (a, x) + b$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$  należą do  $Har(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) Jeśli  $\Omega' \subset \Omega$  i  $u \in Har(\Omega)$ , to  $u \in Har(\Omega')$  (w zasadzie powinniśmy pisać  $u|_{\Omega'} \in Har(\Omega')$ ).

(iii) Wielomiany  $u_1(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $u_2(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$  są funkcjami harmonicznymi w  $\mathbb{R}^2$ .

(iv) Zdefiniujmy funkcję  $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\mathcal{E}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\|x-y\|^{n-2}} & \text{dla } n > 2, \\ -\ln \|x-y\| & \text{dla } n = 2. \end{cases} \quad (22)$$

Przy ustalonym  $y \in \mathbb{R}^n$  funkcja  $\mathcal{E}(\cdot, y) \in Har(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ . Sprawdźmy to dla  $n > 2$  :

$$\mathcal{E}_{x_i}(x, y) = \frac{1}{n-2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j (x_j - y_j)^2 \right)^{(-n+2)/2}$$

$$= -\frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(x_i - y_i) \cdot \left( \sum_j (x_j - y_j)^2 \right)^{-n/2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x_i x_i}(x, y) &= -\frac{1}{\|x - y\|^n} \\ &\quad - (x_i - y_i) \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) \cdot 2(x_i - y_i) \cdot \left( \sum_j (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1}, \end{aligned}$$

$$\Delta_x \mathcal{E}(x, y) = \sum_i \mathcal{E}_{x_i x_i}(x, y) = -\frac{n}{\|x - y\|^n} + n \sum_j \frac{(x_j - y_j)^2}{\|x - y\|^{n+2}} = 0.$$

Funkcję  $\mathcal{E}$  nazywamy rozwiązaniem fundamentalnym równania Laplace'a. Pozwala ona generować liczne przykłady funkcji harmonicznych. Przykładowo, jeśli  $\Gamma$  jest  $(n-1)$ -wymiarową hiperpowierzchnią klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^n$ , a funkcja  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowna (względem miary indukowanej na  $\Gamma$ ), to funkcja

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x, y) \phi(y) dS_y$$

jest harmoniczna w  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ . Problem określania tej funkcji dla  $x \in \Gamma$ , jej ciągłości i różniczkowalności na  $\Gamma$  będzie pojawiał się w dalszej części wykładu.

Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym i ograniczonym w  $\mathbb{R}^n$  o brzegu  $\partial\Omega$  będącym hiperpowierzchnią  $n-1$ -wymiarową klasy  $C^1$ . To założenie będzie przyjmowane milcząco do końca tego wykładu.

**Twierdzenie 1.** Jeżeli  $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  i  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , to

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \quad (23)$$

Dowód. Na podstawie wzoru na całkowanie przez części mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \sum_i \int_{\Omega} (u_{x_i})_{x_i} \cdot v \\ &= \sum_i \left( - \int_{\Omega} u_{x_i} v_{x_i} + \int_{\partial\Omega} v u_{x_i} \cos(\nu, x_i) dS \right) \\ &= - \int_{\Omega} \sum_i u_{x_i} v_{x_i} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \end{aligned}$$

Wzór (23) nosi nazwę pierwszego wzoru Greena dla operatora Laplace'a  $\Delta$ . Otrzymujemy z niego natychmiast drugi wzór Greena dla  $u, v \in \text{Har}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$C^1(\overline{\Omega})$ :

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \quad (24)$$

**Twierdzenie 2.** Jeżeli  $u \in Har(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  i  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , to  $u = 0$  w  $\Omega$ .

**Dowód.** Wystarczy do (23) wstawić  $v = u$ , aby otrzymać

$$\int_{\Omega} \sum_i u_{x_i}^2 = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

więc dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u_{x_i} = 0$ , w  $\Omega$ , a stąd  $u = \text{const}$ . Stałą tą może być wyłącznie 0 wobec znikania  $u$  na brzegu  $\Omega$ .

**Twierdzenie 3.** Jeśli  $u \in Har(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  i  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$ , to  $u$  jest stałą w  $\Omega$ .

Dowód jest analogiczny. Wstawiając do drugiego wzoru Greena (24)  $v = 1$  dostajemy:

**Twierdzenie 4.** Jeżeli  $u \in Har(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , to

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0.$$

Twierdzenie 2 pozwala uzyskać pewnego rodzaju jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Dirichleta. Jeżeli  $u_1, u_2$  są dwiema funkcjami takimi, że  $\Delta u_i = f(x)$  w  $\Omega$  oraz  $u_i|_{\partial\Omega} = \phi$ , przy czym  $u_1, u_2$  są klasy  $C^1(\overline{\Omega})$ , to  $u = u_1 - u_2 \in Har(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  i  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Z tw. 2 wynika więc, że  $u_1 = u_2$ . Niestety, okazuje się, że gdyby od rozwiązania zagadnień Dirichleta żądać, by były klasy  $C^1(\overline{\Omega})$ , to większość z nich nie miałaby rozwiązania. Potrzebujemy więc tw. 2 w wersji wzmocnionej:  $u \in Har(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u = 0$ . Otrzymamy taką wersję, ale przy użyciu subtelniejszych środków. Analogiczne rozumowanie dotyczy tw. 3 i jednoznaczności (z dokładnością do stałej) rozwiązania zagadnienia Neumanna. Warunek brzegowy Neumanna jest na ogół spełniony w słabym sensie;  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi$  oznacza istnienie granicy dla  $x \in \partial\Omega$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x - t\nu(x)) = \psi(x).$$

Następne twierdzenie pełni kluczową rolę w teorii funkcji harmoniczych. Jego dowód wymaga zastosowania twierdzenia zwanego przez Anglosasów tw. o dywergencji, a przez Rosjan tw. Greena-Gaussa-Ostrogradskiego.

**Twierdzenie 5** (o wartości średniej dla funkcji harmoniczych). Jeżeli  $u \in Har(B(x, R)) \cap C^1(\overline{B}(x, R))$ , to

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B(x, R)} u(y) dS = \frac{1}{\frac{1}{n} \sigma_n R^n} \int_{B(x, R)} u(y) dy. \quad (25)$$

Ponieważ  $\frac{1}{n}\sigma_n R^n$  jest miarą kuli  $B(x, R)$ , a  $\sigma_n R^{n-1}$  miarą sfery  $\partial B(x, R)$ , po których całkujemy, drugi i trzeci człon równości (25) możemy uważać za wartość średnią funkcji  $u$  odpowiednio na sferze i na kuli. Siłę tw. 5 widzimy dopiero, gdy uzmysłowimy sobie, że równość (25) zachodzi dla każdej kuli zawartej w obszarze harmoniczności funkcji  $u$ .

**Zasada maksimum.** Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym i spójnym w  $\mathbb{R}^n$ , a  $u$  będzie funkcją harmoniczną w  $\Omega$ . Wówczas jeśli dla pewnego  $x_0 \in \Omega$  mamy

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = |u(x_0)|,$$

to  $u$  jest funkcją stałą.

Dowód. Przeprowadzimy go dla przypadku  $u(x_0) > 0$  zostawiając przypadek  $u(x_0) < 0$  jako ćwiczenie.

Wybermy kulę  $\bar{B}(x_0, R) \subset \Omega$ . Z założenia  $u(x) \leq u(x_0)$  dla  $x \in B(x_0, R)$ , a więc z twierdzenia o wartości średniej

$$u(x_0) = \frac{1}{\mu_n(B(x_0, R))} \int_{B(x_0, R)} u(x) dx = \frac{1}{\mu_n(B(x_0, R))} \int_{B(x_0, R)} u(x_0) dx.$$

Zatem

$$\int_{B(x_0, R)} (u(x_0) - u(x)) dx = 0$$

i wobec nieujemności funkcji podcałkowej (i jej ciągłości)  $u(x) = u(x_0)$  dla  $x \in B(x_0, R)$ .

Oznaczmy przez  $D = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$ . Pokazaliśmy, że  $D$  jest otwarty w  $\Omega$ . Jego domkniętość w  $\Omega$  wynika z ciągłości funkcji  $u$ :  $D = u^{-1}(\{u(x_0)\})$ . Spójność  $\Omega$  oznacza teraz, że albo  $D = \emptyset$  albo  $D = \Omega$ . Ale  $x_0 \in D$ , więc  $D = \Omega$ .

Łatwo stąd wynika, że jeśli  $\Omega$  jest otwarty i ograniczony w  $\mathbb{R}^n$  i  $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , to

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x),$$

i dalej

Tw. o jednoznaczności dla zagadnienia Dirichleta. Jeżeli  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , są rozwiązaniami zagadnienia Dirichleta:  $\Delta u = f(x)$ ,  $u|_{\partial\Omega} = \phi$ , to  $u_1 = u_2$ .

## 11 Rozwiązanie zagadnień brzegowych Dirichleta i Neumanna

Niech  $\Omega$  będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  o brzegu  $\partial\Omega$  będącym  $(n-1)$ -wymiarową hiperpowierzchnią klasy  $C^1$ . Potencjałem objętościowym

o gęstości  $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy funkcję  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$V(x) = \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, y) \mu(y) dy \quad (26)$$

przy założeniu, że funkcja  $\mu$  jest ciągła na  $\bar{\Omega}$ . Całka istnieje przy dowolnym  $x \in \mathbb{R}^n$ , a ponadto  $V$  jest funkcją ciągłą na  $\mathbb{R}^n$ . Ustalmy  $n > 2$ . Ponieważ  $\mathcal{E}_{x_i}(x, y) = -\frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n}$ ,  $|\mathcal{E}_{x_i}(x, y)| \leq \frac{1}{\|x - y\|^{n-1}}$  więc funkcja  $V$  jest różniczkowalna względem  $x_i$  oraz

$$V_{x_i}(x) = \int_{\Omega} \mathcal{E}_{x_i}(x, y) \mu(y) dy, \quad i = 1, \dots, n,$$

i znowu  $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Jednakże różniczkowanie dwukrotne pod znakiem całki względem  $x_i$  nie jest już dozwolone, bowiem najlepszym oszacowaniem na  $|\mathcal{E}_{x_i x_i}(x, y)|$  jest  $\text{const} / \|x - y\|^n$ , a wykładnik ten  $-n$  jest zbyt duży ( $\mathcal{E}_{x_i x_i}$  nie jest funkcją lokalnie całkowaną). Jednakże w punktach  $x \notin \bar{\Omega}$  możemy różniczkować dowolną ilość razy funkcję  $V$ , ponieważ funkcja podcałkowa po zróżniczkowaniu jest ograniczona, a miara zbioru  $\Omega$  jest skończona. Zatem dostajemy

$$V_{x_i x_i}(x) = \int_{\Omega} \mathcal{E}_{x_i x_i}(x, y) \mu(y) dy$$

dla  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  i stąd

$$\Delta V(x) = \int_{\Omega} \Delta_x \mathcal{E}(x, y) \mu(y) dy = 0.$$

W rezultacie  $V \in \text{Har}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$ . Jeżeli wzmocnimy lekko założenie o funkcji  $\mu$ , to funkcja  $V$  będzie także klasy  $C^2(\Omega)$ , ale nie będzie możliwe wejście z pochodnymi pod znak całki a jedynie

**Twierdzenie 1.** Jeżeli  $\mu \in C^1(\bar{\Omega})$ , to

$$\Delta V(x) = -\sigma_n \mu(x), \quad x \in \Omega.$$

Znowu kluczową rolę w dowodzie odgrywa tw. o dywergencji.

Jednym z rozwiązań równania Poissona  $\Delta u = f(x)$  w  $\Omega$  jest więc funkcja

$$u_0(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{\Omega} \mathcal{E}(x, y) f(y) dy.$$

Na brzegu  $\partial\Omega$  ma ona ustalone wartości  $\phi_0 \in C(\partial\Omega)$  (przypomnijmy ciągłość potencjału objętościowego na  $\mathbb{R}^n$ ). Aby więc rozwiązać problem brzegowy Dirichleta

$$\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$



wystarczy znaleźć rozwiązanie problemu

$$\Delta v = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = -\phi_0,$$

i wziąć  $u = u_0 + v$ . Analogiczna uwaga dotyczy problemu Neumanna, bowiem  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Wszystkie zagadnienia brzegowe dla równania Poissona sprowadzają się w ten sposób do problemów brzegowych dla równania Laplace'a.

Do rozwiązania tych ostatnich wykorzystamy potencjały warstwy pojedynczej i podwójnej. Potencjałem warstwy pojedynczej o gęstości  $\mu \in C(\partial\Omega)$  nazywamy funkcję

$$S(x) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x, y) \mu(y) dS_y, \quad (27)$$

a warstwy podwójnej funkcję

$$D(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_y} \mu(y) dS_y. \quad (28)$$

Dla  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$  istnienie obu całek jest oczywiste. Oczywiste jest też, że  $S, D \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$  i z pochodnymi można wchodzić pod znak całki. Stąd dla  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$

$$\Delta S(x) = \int_{\partial\Omega} \Delta_x \mathcal{E}(x, y) \mu(y) dS_y = \int_{\partial\Omega} 0 dS = 0,$$

$$\Delta D(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Delta_x \mathcal{E}(x, y) \mu(y) dS_y = 0,$$

czyli  $S, D \in Har(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$ . Pewnym kłopotem jest zachowanie się obu funkcji na  $\partial\Omega$ . Funkcja  $S$  jest ciągła także w punktach  $x \in \partial\Omega$ . Istnienie całki (28) dla  $x \in \partial\Omega$  wymaga jednak subtelnych rozważań, bowiem przy  $n > 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_y} &= \sum_i \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n} \cdot (\nu_y)_i = \frac{(\nu_y, x - y)}{\|x - y\|^n} \\ &= \frac{\cos(\nu_y, x - y)}{\|x - y\|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Jeśli więc oszacujemy  $|\cos(\nu_y, x - y)| \leq 1$ , to funkcja podcałkowa ma osłabłość stopnia krytycznego dla  $y = x$ .

Załóżmy odtąd, że brzeg  $\partial\Omega$  jest hiperpowierzchnią  $n - 1$ -wymiarową klasy  $C^2$  (do tej pory wystarczyło klasy  $C^1$ ). Wtedy subtelne oszacowanie (lemat 2 str. 40 [8]) daje nam istnienie całki  $D(x)$  także dla  $x \in \partial\Omega$ .

Jednak nie możemy twierdzić, że funkcja  $D$  jest ciągła na  $\mathbb{R}^n$  – są jedynie ciągle trzy osobne gałęzie: na  $\Omega$ , na  $\partial\Omega$  i na  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Mimo to istnieją skończone granice  $\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega} D(x)$ ,  $\lim_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \ni x \rightarrow x_0} D(x)$ .

**Twierdzenie 2.** Niech  $x_0 \in \partial\Omega$ . Wówczas dla potencjału warstwy podwójnej o gęstości  $\mu \in C(\partial\Omega)$  zachodzi

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} D(x) &= -\frac{1}{2}\sigma_n \mu(x_0) + D(x_0), \\ \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \ni x \rightarrow x_0} D(x) &= +\frac{1}{2}\sigma_n \mu(x_0) + D(x_0).\end{aligned}$$

Analogicznie dla potencjału warstwy pojedynczej ma miejsce skok ich pochodnych normalnych przy przejściu przez  $\partial\Omega$ .

**Twierdzenie 3.** Niech  $x_0 \in \partial\Omega$ . Dla potencjału warstwy pojedynczej o gęstości  $\mu \in C(\partial\Omega)$  zachodzą wzory

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega \ni x = x_0 + t\nu_{x_0} \rightarrow x_0} \frac{\partial S(x)}{\partial \nu_{x_0}} &= +\frac{1}{2}\sigma_n \mu(x_0) + \frac{\partial S(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}, \\ \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \ni x = x_0 + t\nu_{x_0} \rightarrow x_0} \frac{\partial S(x)}{\partial \nu_{x_0}} &= -\frac{1}{2}\sigma_n \mu(x_0) + \frac{\partial S(x_0)}{\partial \nu_{x_0}},\end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial S(x_0)}{\partial \nu_{x_0}} = - \int_{\partial\Omega} \frac{\cos(\nu_{x_0}, x_0 - y)}{\|x_0 - y\|^{n-1}} \mu(y) dS_y.$$

Będziemy rozważać cztery zagadnienia brzegowe: wewnętrzne Dirichleta

$$(D_w) \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

wewnętrzne Neumanna

$$(N_w) \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi,$$

zewnętrzne Dirichleta

$$(D_z) \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

i zewnętrzne Neumanna

$$(N_z) \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Rozwiązań obu zagadnień Dirichleta poszukujemy w postaci potencjału warstwy podwójnej o nieznannej gęstości  $\mu$ , a rozwiązań obu zagadnień Neumanna poszukujemy w postaci potencjału warstwy pojedynczej o nieznannej gęstości  $\mu$ . Mamy wtedy gwarancję, że funkcje te będą spełniać równanie Laplace'a i ew. warunki graniczne w nieskończoności. Warunki na brzegu zbioru  $\Omega$  prowadzą wtedy do następujących równań całkowych na gęstości  $\mu$  na podstawie tw. 2 i 3:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_y} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2}\sigma_n \mu(x) = \varphi(x), \quad (D_w^*)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_y} \mu(y) dS_y + \frac{1}{2} \sigma_n \mu(x) = \phi(x), \quad (D_z^*)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_x} \mu(y) dS_y + \frac{1}{2} \sigma_n \mu(x) = \psi(x), \quad (N_w^*)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x, y)}{\partial \nu_x} \mu(y) dS_y - \frac{1}{2} \sigma_n \mu(x) = \psi(x). \quad (N_z^*)$$

Do tych równań całkowych stosuje się teoria Fredholma - p. dowolny podręcznik analizy funkcjonalnej np. W. Kołodziej Wybrane rozdziały analizy matematycznej. Pozwala to stwierdzić istnienie dokładnie jednego rozwiązania dla  $(D_w)$  przy dowolnej ciągłej funkcji  $\varphi$ , dokładnie jednego rozwiązania dla  $(N_z)$  przy dowolnej ciągłej funkcji  $\psi$ . Dla  $(N_w)$  rozwiązanie istnieje tylko dla  $\psi$  spełniających warunek

$$\int_{\partial\Omega} \psi dS = 0$$

por. tw. 4 z poprzedniego rozdziału. Pozostałe rozwiązania  $(N_w)$  różnią się od tego, które jest potencjałem warstwy pojedynczej o stałe. Wreszcie zagadnienie  $(D_z)$  zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie, ale niekoniecznie jest ono potencjałem warstwy podwójnej a jedynie sumą takiego potencjału i  $c\mathcal{E}(x_0, \cdot)$ , gdzie  $x_0 \in \Omega$  jest odpowiednio wybranym punktem, a  $c \in \mathbb{R}$  odpowiednio dobraną stałą. Więcej na ten temat w [8].