# Zastosowania do równań cząstkowych

(1) **Rozwiązania radialne**

$$\Delta u = f(u)$$

w zbiorze radialnie symetrycznym np. kuli $B(0,R)$. Szukamy rozwiązań postaci

$$u(x) = v(||x||),$$

gdzie $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wtedy

$$u_{x_i} = v' \cdot \frac{x_i}{||x||}, \qquad u_{x_ix_i} = v'' \frac{x_i^2}{||x||^2} + \frac{v'}{||x||} - v' \cdot x_i \frac{1}{||x||^2} \frac{x_i}{||x||}$$

$$\Delta u = v'' + \frac{n-1}{||x||} v',$$

więc równanie na funkcję $v$ ma postać

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = f(v).$$

Dodatkowe żądanie

$$v'(0) = 0.$$

(2) **Rozdzielanie zmiennych**

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(t,0) = 0 = u(t,\pi),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x).$$

Szukamy rozwiązań w postaci $u(t,x) = f(t) \cdot g(x)$. Stąd

$$f''(t) g(t) = c^2 f(t) g''(x),$$

więc

$$\frac{f''(t)}{c^2 f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \text{const.}$$

Szukamy $g$ takiej, że

$$g''(x) - \lambda g(x) = 0, \quad g(0) = 0 = g(\pi)$$

i $g$ jest niezerowa (Zagadnienie Sturma-Liouville'a). Stąd $\lambda = \lambda_n = n^2$ i $g = g_n = \sin nx$. Odpowiednio $f_n(t) = a_n \exp(ct) + b_n \exp(-ct)$.

Jeśli poszukamy rozwiązania w postaci

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx,$$

to wystarczy dobrać stałe $a_n$, $b_n$ tak, by spełnione były warunki początkowe.

(3) **Fale wędrujące**

$$u_t - u_{xx} = ku(1-u)$$

$$u(t,x) = v(x+ct)$$

$$v'' - cv' + kv(1-v) = 0$$

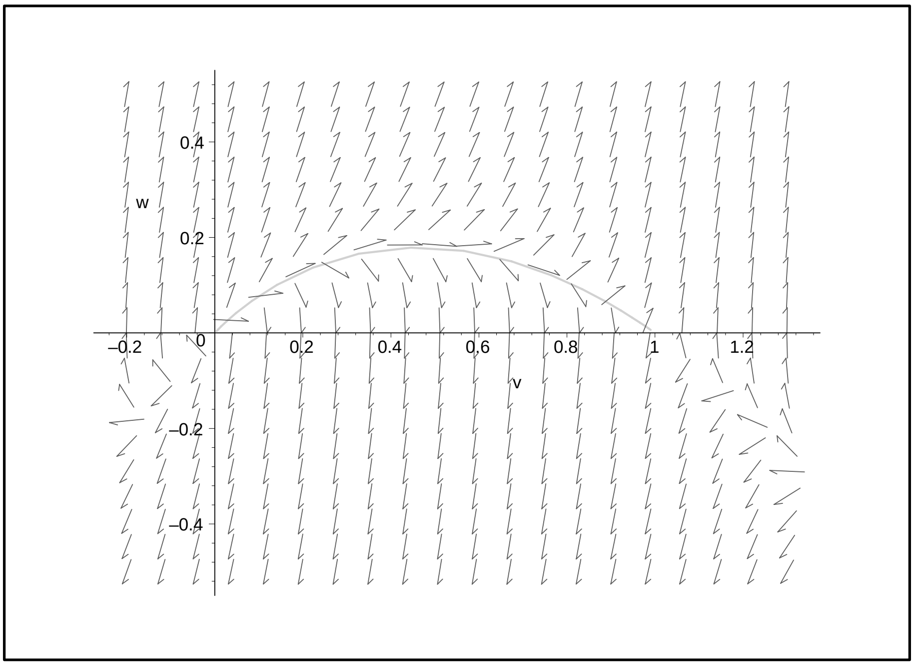
$$\begin{cases} v' = w \\ w' = -kv(1-v) + cw \end{cases}$$

Dla $c > 0$, $k \in (0, c/2)$ w punkcie $(0,0)$ jest węzeł niestabilny, a dla $k > c/2$ ognisko niestabilne. W punkcie $(1,0)$ jest siodło, bo są dwie wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & c \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4k}}{2}$$

Podprzestrzeń własna odpowiadająca ujemnej wartości własnej $\lambda_2$ jest rozpięta przez wektor $[1, \lambda_2]$.



w
0.4
0.2
0
–0.2
–0.4
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
v