Projekty końcowe

Projekt 1. Układ Chua opisujący drgania nieliniowe w obwodzie elektrycznym:

$$\begin{cases} x' = a(y - \phi(x)) \\ y' = x - y + z \\ z' = -bz, \end{cases}$$

gdzie $\phi(x) = x^3/16 - x/6$, a i b są dodatnimi parametrami. Poszukać symetrii w układzie. Ustalamy $b = 14$. Zobaczyć, jak układ zależy od parametru $a \in [6, 14]$. Przy $a = 10.91865...$ i $b = 14$ układ posiada parę symetrycznych trajektorii homoklinicznych. Zbadać bifurkacje dla $a = 6.58$, $= 7.3$, $= 8.78$, $= 10.77$. Co z atraktorem globalnym?

Projekt 2. Zbadać równanie Duffinga z wymuszeniem:

$$x'' + (\delta - x^2)x' + x^3 - x = \beta \sin \nu t,$$

gdzie $\delta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ i $\nu > 0$. Najpierw $\beta = 0$: układ jest autonomiczny 2-wymiarowy i jego portret fazowy można znaleźć. Co będzie gdy β jest małe? Przeprowadzić symulacje numeryczne dla różnych β.

Projekt 3. Wahadło z wymuszeniem:

$$x'' + bx' + \sin x = F,$$

gdzie b jest parametrem rzeczywistym, F ustaloną funkcją zmiennej t. ($b \geq 0$ -współczynnik tarcia, F - siła zewnętrzna). Najpierw $F = \text{const} = k$. Poszukać podziału płaszczyzny b, k na obszary z ustaloną liczbą punktów stałych. Opisać ruch wahadła w każdym z przypadków. Niech $k > 1$. Pokazać istnienie jedynej trajektorii okresowej. Co będzie dla F okresowych?

Projekt 4. Zbadać układ SIR opisujący rozwój epidemii:

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \mu R \\ I' = \beta SI - \nu I \\ R' = \nu I - \mu R, \end{cases}$$

gdzie S (ang. susceptible) oznacza liczbę osobników podatnych na chorobę, I (ang. ill) liczbę chorych, a R (ang. retired) liczbę już uodpornionych po przebyciu infekcji. Dodatnie parametry β, μ, i ν są tu stałe. Przeanalizować przypadek, gdy drugie równanie zastąpimy równaniem z opóźnieniem $\tau > 0$:

$$I'(t) = \beta S(t-\tau)I(t-\tau) - \nu I(t).$$

Projekt 5. Zbadać układ Rösslera:

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + z(x - c), \end{cases}$$

gdzie $a = 1/4$, $b = 1$, a c zmienia się w przedziale $[0, 7]$. Poszukać punktów stałych i zbadać ich charakter, Zbadać numerycznie bifurkacje przy zmieniającym się parametrze c.

Projekt 6. Zbadać oddziaływanie populacji dwóch drapieżników z jedną populacją ofiar:

$$\begin{cases} x' = x(a_1 - a_2x - a_3y - a_4z) \\ y' = y(-b_1 + b_2x - b_3z) \\ z' = z(-c_1 + c_2x - c_3z), \end{cases}$$

gdzie wszystkie parametry są stałymi dodatnimi.

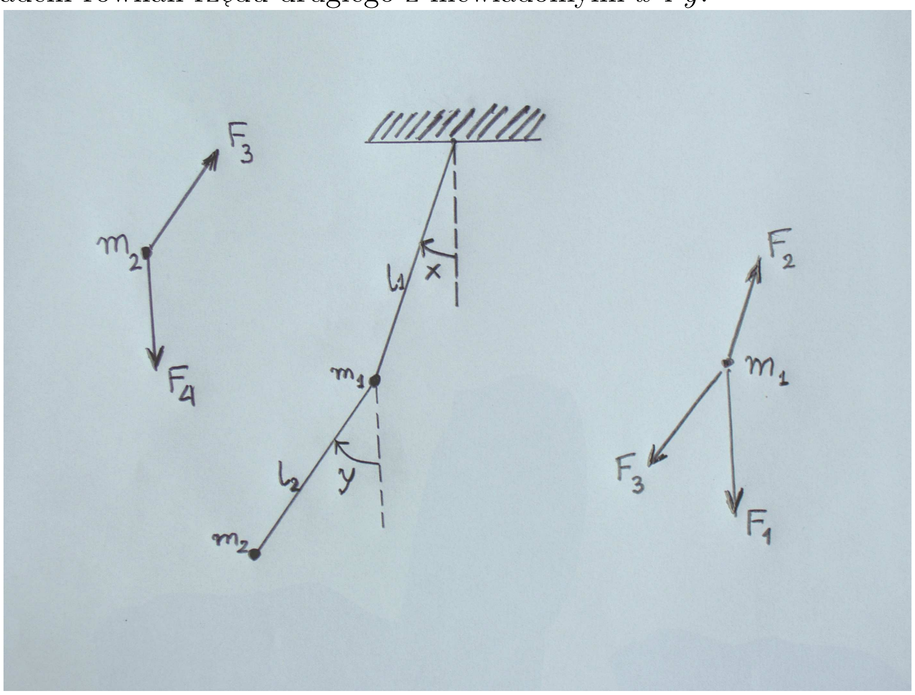
Projekt 7. Zbadać układ

$$\begin{cases} x' = r_1x(1 - a_1x - a_2y - a_3z) \\ y' = r_2y(1 - b_1x - b_2y - b_3z) \\ z' = r_3z(1 - c_1x - c_2y - c_3z), \end{cases}$$

gdzie r_i, a_i, b_i, c_i $i = 1, 2, 3$, są dodatnimi parametrami. Układ opisuje rozwój populacji trzech konkurujących gatunków. Zbadać możliwe zachowania układu w zbiorze $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Projekt 8. Załóżmy, że punkt materialny o masie M_1 powoduje ruch punktu materialnego o znacznie mniejszej masie M_2 po orbicie kołowej o promieniu R. W polu grawitacyjnym wytworzonym przez te ciała porusza sie trzeci punkt o masie m tak małej, że możemy zaniedbać ruch $M_{1,2}$ pod jego wpływem. Zbadać możliwe ruchy trzeciego punktu.

Projekt 9. Zbadać ruch dwóch sprzężonych wahadeł. Najpierw wyprowadzić z równania Newtona równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ten ruch. Do wahadła o długości l_1 i masie m_1 doczepione jest drugie wahadło o długości l_2 i masie m_2. Jeśli przez x oznaczymy odchylenie kątowe od pionu pierwszego z wahadeł, a przez y odchylenie drugiego, to równanie to będzie układem równań rzędu drugiego z niewiadomymi x i y.



Siły F_1 i F_4 to siły grawitacji $F = mg$, siły F_2 i F_3, to siły naprężeń nici – znoszą one składowe siły grawitacji prostopadłe do nici. Naprężenie F_3 ma tę samą długość dla obu punktów materialnych (zasada akcji i reakcji). Następnie zbadać punkty stałe układu, trajektorie okresowe oraz naszkicować portret fazowy (jego rzuty na podprzestrzenie 2-wymiarowe).

Projekt 10. Model Fitzhugh-Nagumo:

$$\begin{cases} x' = y + x - \frac{x^3}{3} + I \\ y' = -x - by + a, \end{cases}$$

gdzie $0 < 3/2(1-a) < b < 1$, a I jest parametrem. Model ten opisuje działanie neuronu (choć jest uproszczony w stosunku do b. skomplikowanego modelu Hodgkina-Huxleya). Zbadać punkty stałe w zależności od I. Poszukać stabilnej trajektorii okresowej.

Niech $a = I = 0$. Poszukać bifurkacji ze względu na $b > 0$.

Projekt 11. Jaki byłby Wszechświat, gdyby siła grawitacji spełniała

$$F = G\frac{Mm}{r^\alpha},$$

gdzie $\alpha \neq 2$? Tutaj M i m są masami przyciągających się ciał, G jest stałą, a r oznacza odległość między ciałami. Jak w teorii Newtona zakładamy, że ciała są punktowe.

Projekt 12. Model Goodwina rozwoju gospodarczego sprowadza się do równania z opóźnionym argumentem

$$x'(t) + ax(t) = b + \varphi(x'(t-r)),$$

gdzie a b i r są stałymi dodatnimi, a funkcja φ ma postać

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 \quad dla & x \leq -c, \\ \frac{x}{c} \quad dla & x \in (-c, c) \\ 1 \quad dla & x \geq c, \end{cases}$$

gdzie $c > 0$. Zbudować rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym

$$x\big|_{[-r,0]} = \psi$$

dla ustalonej funkcji klasy $C^1 : \psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$. Zrealizować to numerycznie i narysować wykres rozwiązania. Zmieniać wartości parametrów i funkcję ψ, a następnie zmodyfikować samo równanie zastępując stałą b przez funkcję okresową zmiennej t. Porównać wykresy z otrzymanymi dla stałej wartości b (najlepiej wziąć tu średnią z funkcji b).