Twierdzenie o bifurkacji Hopfa. Niech

$$x' = f(x, \mu), \qquad x \in \mathbb{R}^k, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

gdzie f jest klasy C^2 i $f(0, \mu) = 0$. Oznaczmy przez A_μ macierz operatora liniowego $D_x f(0, \mu)$. Jeżeli widmo A_{μ_0} zawiera jednokrotne wartości własne $\pm i\omega_0$ i nie zawiera ich całkowitych wielokrotności oraz istnieją funkcje rzeczywiste klasy C^1 α, β zmiennej μ określone w otoczeniu μ_0 takie, że

$$\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \in \mathrm{Sp}\, A_\mu$$

i $\alpha'(\mu_0) \neq 0$, to istnieje otoczenie $0 \in \mathbb{R}$ i trzy funkcje ciągłe określone na tym otoczeniu

$$s \mapsto \omega(s) \in \mathbb{R}, \qquad s \mapsto \mu(s) \in \mathbb{R}, \qquad s \mapsto \varphi_s \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$$

takie, że φ_s jest $\frac{2\pi}{\omega(s)}$-okresowym rozwiązaniem równania z $\mu = \mu(s)$ i

$$\lim_{s \to 0} \omega(s) = \omega_0, \qquad \lim_{s \to 0} \mu(s) = \mu_0, \qquad \lim_{s \to 0} \varphi_s = 0.$$

Przykład.

$$x' = \mu x + y - xy^2, \qquad y' = -x + \mu y - y^3.$$

$$A_\mu = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

skąd dostajemy wartości własne – pierwiastki wielomianu charakterystycznego $\lambda \mapsto (\mu - \lambda)^2 + 1$, czyli $\lambda(\mu) = \mu \pm i$. Możemy więc wziąć $\mu_0 = 0$, $\omega_0 = 1$. Ponieważ $\alpha(\mu) = \mu$, więc $\alpha'(0) = 1$ i na podstawie tw. o bifurkacji Hopfa układ ma nietrywialne rozwiązania okresowe dla dostatecznie małych: $\mu > 0$ lub $\mu < 0$. Z drugiej strony obliczając dywergencję prawej strony układu $\mathrm{div}\, f = 2\mu - 4y^2$ otrzymujemy, że dla $\mu < 0$ jest ona stałego znaku i na mocy kryterium Bendixsona trajektorii okresowych być nie może. Zatem występują one dla $\mu > 0$. Dla takich μ punkt stały jest ogniskiem niestabilnym. Możemy jeszcze ocenić przybliżoną wartość okresu takich rozwiązań – 2π (przybliżenie tym lepsze, im mniejsza wartość μ).