Materiały pomocnicze do wykładu dla Studium Doktoranckiego Matematyki

B. Przeradzki

1 listopada 2004

Poniżej przedstawiam zadania stanowiące integralną część wykładu „Wybrane zagadnienia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych". Ich rozwiązanie, a przynajmniej tego próby, w istotny sposób rozszerza wiadomości słuchaczy w kierunkach nie objętych treścią głównego nurtu wykładu.

1 Funkcje Carathéodory'ego

Przedyskutować problem, przy jakich założeniach o funkcji $f : (a,b) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ odwzorowanie T dane wzorem

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

przekształca przestrzeń $C([a,b], \mathbb{R}^k)$ w siebie. Kiedy jest ono ciągłe? A pełnociągłe? Chodzi oczywiście o założenia słabsze niż ciągłość funkcji f. Na koniec proszę porównać wnioski z podręcznikiem Coddingtona, Levinsona (rozdział o funkcjach Carathéodory'ego). Na jakie trudności natrafiamy zastępując $\mathbb{R}^k$ dowolną przestrzenią Banacha.

2 Globalne rozwiązanie

Niech $f : [a,b] \times X \to X$ spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej:

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \le L||x_1 - x_2||, \qquad x_1, x_2 \in X, \quad t \in [a,b],$$

gdzie L jest pewną stałą. W przestrzeni $C([a,b], X)$ wprowadzamy normę

$$||\varphi||_\infty := \sup_t \mathrm{e}^{-Lt} ||\varphi(t)||.$$

Pokazać, że operator T z zadania 1 jest zwężający, a więc posiada dokładnie jeden punkt stały. Jakie są tego konsekwencje dla zagadnienia początkowego?

3 Nierozwiązalne zagadnienie początkowe

Niech $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorami: $\psi(x) = 2$ dla $x \geq 4$, $\psi(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 4)$, $\psi(x) = 0$ dla $x < 0$. Zdefiniujmy $f : c_0 \to c_0$ wzorem $f((x_n)_n) = (\psi(x_n))_n$ i $a \in c_0$ wzorem $a = (\frac{1}{n})_n$. Przez c_0 oznaczamy przestrzeń Banacha ciągów liczbowych zbieżnych do 0 z normą

$$||(x_n)_n|| = \sup_n |x_n|.$$

Pokazać, że zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \qquad x(0) = a$$

nie posiada rozwiązania. Inny przykład znajdziemy w monografii J. Dieudonné ,,Foundations of modern analysis". Godunow pokazał , że w każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha istnieją zagadnienia początkowe nie posiadające rozwiązania.

4 Aproksymacja Tonelliego

Dla ciągłej funkcji $f : [t_0, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ podzielmy przedział $[t_0, t_0 + \delta]$ na m równych części punktami $t_{m,j} = t_0 + j\delta/m$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Określmy $\varphi_m : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ wzorami $\varphi_m(t_0) = x_0$,

$$\varphi_m(t) = \varphi_m(t_{m,j}) + (t - t_{m,j}) f(t_{m,j}, \varphi_m(t_{m,j})) \quad \text{dla } t \in (t_{m,j}, t_{m,j+1}],$$

a następnie $\psi_m : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^k$ wzorami

$$\psi_m(t) = f(t_{m,j}, \varphi_m(t_{m,j})) \quad \text{dla } t \in [t_{m,j}, t_{m,j+1}).$$

Pokazać, że

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_m(s)\, ds,$$

funkcje $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ są jednakowo ciągłe i wspólnie ograniczone. Jakie równanie spełnia granica jednostajnie zbieżnego podciągu istniejącego na mocy tw. Ascoliego-Arzelá ?

Jest to alternatywny dowód tw. Peano o istnieniu rozwiązania zagadnienia początkowego bez użycia tw. Schaudera o punkcie stałym. Por. podręcznik Piccinini, Stampacchia, Vidossich.

5 Przypadek nieskończenie wymiarowy

Jeśli w poprzednim zadniu zastąpimy $\mathbb{R}^k$ przez dowolną przestrzeń Banacha X, wtedy można wykorzystać ogólne tw. Ascoliego-Arzelá (por. Analiza Maurina). Poza ciągłością f potrzebujemy wtedy założenia: $f(t, \cdot)$ jest pełnociągłe. Wyjaśnić szczegóły.

6 Całka Riemanna

Niech $f : [a,b] \to X$ będzie całkowalna, gdzie X jest przestrzenią Banacha. Udowodnić, że

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \in \overline{\mathrm{conv}}\, f([a,b]).$$

Symbolem $\overline{\mathrm{conv}} A$ oznaczamy najmniejszy domknięty i wypukły nadzbiór zbioru A. Mamy tu na uwadze całkę Riemanna (por. podręcznik analizy L. Schwartza), chociaż twierdzenie zachodzi także dla całki Bochnera.

Niech $T \in L(Y,X)$ (X, Y są przestrzeniami Banacha, a $L(Y,X)$ oznacza przestrzeń operatorów liniowych i ograniczonych $Y \to X$). Pokazać, ze jeśli funkcja $f : [a,b] \to Y$ jest całkowalna, to funkcja $Tf : [a,b] \to X$ też jest całkowalna i

$$\int_a^b Tf(t)\,dt = T\left(\int_a^b f(t)\,dt\right).$$

Niech $A : [a,b] \to L(X,Y)$ będzie całkowalna i $x \in X$. Zastosować powyższy rezultat do funkcji $t \mapsto A(t)x$.

7 Własność punktu stałego

Mówimy, że przestrzeń topologiczna X ma własność punktu stałego, gdy każde ciągłe odwzorowanie $f : X \to X$ posiada punkt stały. Wykazać, że każda przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią mającą własność punktu stałego ma tę własność.

8 Globalne istnienie

Niech $f : [0,\infty) \times X \to X$ będzie ciągła i

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \le h(t)||x_1 - x_2||, \qquad t \in [0,\infty), \quad x_1, x_2 \in X,$$

gdzie $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ jest całkowalna na $(0,\infty)$. Udowodnić, że jeśli $t \mapsto f(t,0)$ jest całkowalna, to zagadnienie początkowe

$$x' = f(t,x), \qquad x(0) = x_0$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie określone na $[0,\infty)$. W tym celu w przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych $BC([0,\infty),X)$ zdefiniować normę

$$||\varphi|| = \sup_t \mathrm{e}^{-\lambda(t)}|\varphi(t)|,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza normę w X, $\lambda(t) = 2\int_0^t h(s)\,ds$. Zastosować tw. Banacha o punkcie stałym.

9 Metoda kolejnych przybliżeń

Niech $f : [0, b] \times U \to X$ i $\omega : [0, b] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ będą ciągłe (U – podzbiór otwarty przestrzeni Banacha X). Zakładamy, że $\omega(t, \cdot)$ jest rosnąca dla każdego t, jedynym rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$u' = \omega(t, u), \qquad u(0) = 0$$

jest funkcja zerowa i

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq \omega(t, ||x_1 - x_2||), \qquad t \in [0, \underline{\ }], \quad x_1, x_2 \in X.$$

Wykazać, że ciąg kolejnych przybliżeń:

$$x_0(t) = x_0, \qquad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds$$

jest jednostajnie zbieżny do rozwiązania zagadnienia

$$x' = f(t, x), \qquad x(0) = x_0,$$

wykorzystując nierówność

$$\sup_{n,m \geq k} ||x_n(t) - x_m(t)|| \leq u_k(t),$$

gdzie $u_0(t) = Mt$,

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t \omega(s, u_n(s))\, ds.$$

10 Pod- i nadrozwiązania

Niech $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta : [0, b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe i α, β różniczkowalne wewnątrz przedziału. Zakładamy, że

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \alpha(t) < \beta(t),$$

dla każdego t. Wybierzmy $x_0 \in (\alpha(0), \beta(0))$. Korzystając z tw. o oszacowaniu a priori pokazać, że rozwiązania zagadnienia początkowego

$$x' = f(t, x), \qquad x(0) = x_0,$$

są przedłużalne na cały przedział $[0, b]$ i spełniają tam nierówność $x(t) \in (\alpha(t), \beta(t))$. Wskazówka. Zdefiniować

$$f_n(t, x) = f(t, x) + \frac{\beta(t) - \alpha(t) - 2(x - \alpha(t))}{n}.$$

Wtedy $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$, $\beta'(t) > f(t, \beta(t))$. Wykorzystać ciąg x_n, $n \in \mathbb{N}$, rozwiązań zagadnień początkowych dla f_n zamiast f, określonych na $[0, b]$.

11 Rezolwenta równania liniowego

Sprawdzić, że określenie operatora rezolwenty $U : (a,b)\times(a,b) \to L(X)$ dla równania liniowego $x' = A(t)x$ jest poprawne przy założeniu lokalnej całkowalności (tzn. całkowalności na podzbiorach zwartych) funkcji $t \to A(t) \in L(X)$. Co rozumiemy przez rozwiązanie równania $x' = A(t)x$ w tej sytuacji? Przedyskutować teorię równań liniowych $x' = A(t)x+r(t)$ z funkcją $r : (a,b) \to X$ także lokalnie całkowalną.

12 Trajektorie okresowe

Pokazać, że trajektoria okresowa układu dynamicznego jest homeomorficzna z okręgiem, a w przypadku gładkiego układu dynamicznego jest nawet dyfeomorficzna z okręgiem.

13 Wahadło fizyczne i matematyczne

Znaleźć okres drgań wahadła fizycznego

$$x'' + \sin x = 0$$

wykorzystując funkcje eliptyczne. Porównać go z okresem drgań wahadła matematycznego (oscylatora harmonicznego)

$$x'' + x = 0$$

stosując rozwinięcie w szereg potęgowy.