O pewnych aspektach teorii równań różniczkowych
Materiały pomocnicze do wykładu dla Studium Doktoranckiego Matematyki

Bogdan Przeradzki

18 października 2004

Przedstawimy tutaj dwa nurty badań związanych z teorią równań różniczkowych. Ich wybór wynika wyłącznie z zainteresowań naukowych autora niniejszego opracowania, choć należy zaznaczyć, że są to nurty niezwykle szybko rozwijające się w ostatnich latach.

1 Układy dynamiczne

Rozważmy zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego:

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

gdzie $f : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją lipschitzowsko ciągłą w otwartym zbiorze U, $x_0 \in U$, a x' oznacza różniczkowanie względem zmiennej niezależnej $t \in \mathbb{R}$. Zagadnienie to posiada jedyne rozwiązanie φ_{x_0} określone w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}$ na mocy podstawowego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności. Przypuśćmy, że rozwiązanie to przedłuża się na całą prostą $\mathbb{R}$ dla dowolnego $x_0 \in U$. Wtedy funkcja U określona wzorem

$$\pi(t, x) = \varphi_x(t)$$

jest ciągła i ma dwie własności

$$\pi\left(0,x\right)=x\quad\text{dla}\quad x\in U,$$
$$\pi\left(t,\pi\left(s,x\right)\right)=\pi\left(t+s,x\right)\quad\text{dla}\quad t,s\in\mathbb{R},\ x\in U.$$

Jeśli U zastąpimy przez dowolną przestrzeń metryczną X i $\pi:\mathbb{R}\times X\to X$ ma powyższe własności, to mówimy, że w przestrzeni X określony jest *układ dynamiczny.*

Na układ dynamiczny $\pi:\mathbb{R}\times X\to X$ możemy spojrzeć inaczej. Odwzorowania $\pi^t: X\to X$, $\pi^t\left(x\right)=\pi\left(t,x\right)$ są ciągłe, $\pi^0=id_x$ i $\left(\pi^t\right)^{-1}=\pi^{-t}$, więc mamy ciągły homomorfizm grupy $(\mathbb{R},+)$ w grupę homeomorfizmów przestrzeni X $(\text{Homeo}\left(X\right),\circ)-t\to\pi^t$.

Przez *trajektorię* punktu x w układzie dynamicznym π rozumiemy zbiór $\mathcal{O}(x)=\{\pi\left(t,x\right):t\in\mathbb{R}\}$. Nietrudno zauważyć, że przestrzeń X rozpada się na rodzinę parami rozłącznych trajektorii – jeśli $y\in\mathcal{O}\left(x\right)$, to $\mathcal{O}(y)=\mathcal{O}(x)$. Są trzy rodzaje trajektorii: punkty stałe – $\mathcal{O}(x)=\{x\}$, trajektorie okresowe, gdy $\pi(T,x)=x$ dla pewnego $T>0$ – jeśli T jest minimalną liczbą o tej własności, to $\pi(\cdot,x)$ jest homeomorfizmem odcinka $[0,T]$ ze sklejonymi końcami (czyli okręgu w sensie topologicznym) na trajektorię $\mathcal{O}(x)$. Trzeci rodzaj trajektorii, to obrazy homeomorficzne prostej.

Jeżeli rozwiązania równania $x'=f(x)$ nie są przedłużalne na całą prostą, to równanie to możemy zastąpić przez równanie postaci $x'=\alpha(x)f(x)$, gdzie $\alpha:U\to(0,\infty)$, którego rozwiązania są już przedłużalne, a trajektorie są identyczne, jak dla wyjściowego równania. Fizycznie możemy to zinterpretować w ten sposób, że pierwsze równanie opisuje ruch punktów, które w skończonym czasie mogą „uciec" do brzegu zbioru U lub do ∞, a po przeskalowaniu ruch odbywa się po tych samych torach, ale ze zmodyfikowaną w ten sposób prędkością, że ucieczka jest niemożliwa.

Abstrakcyjna teoria układów dynamicznych stosuje się także do równań różniczkowych cząstkowych parabolicznych i hiperbolicznych. Przykładowo równanie reakcji-dyfuzji:

$$u_t=\Delta u+f\left(x,u\right),$$

z warunkiem brzegowym $u\left|\partial\Omega=0\right.$ i początkowym

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)$$

prowadzi do układu dynamicznego w przestrzeni Sobolewa $H_0^2\left(\Omega\right):\pi\left(t,\varphi\right)\left(x\right)=u\left(x,t\right)$. Jest to już układ dynamiczny w przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Do nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych prowadzą też równania z opóźnionym argumentem:

$$x' = f(x_t), \quad x\big|_{[-r,0]} = \varphi \in C\left([-r,0], \mathbb{R}^k\right),$$

gdzie $x_t(s) = x(t+s)$. Tutaj $\pi : \mathbb{R} \times C\left([-r,0], \mathbb{R}^k\right) \to C\left([-r,0], \mathbb{R}^k\right)$.

W układach dynamicznych szczególną rolę odgrywają *zbiory niezmiennicze* czyli takie zbiory domknięte $A \subset X$, że $\pi(t, A) \subset A$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Zbiory takie wraz z każdym punktem x zawierają całą trajektorię $\mathcal{O}(x)$, można więc zamiast całego układu π rozpatrywać jego redukcję do podzbioru $A - \pi\,|_{\mathbb{R}\times A} : \mathbb{R} \times A \to A$. Zbiór niezmienniczy A może być przyciągający tzn. posiadać pewne otoczenie U takie, że odległość $d(\pi(t,x), A)$ dąży do 0 przy $t \to +\infty$ i $x \in U$, może być też odpychający tzn. ta sama własność zachodzi dla $t \to -\infty$. Zbiór niezmienniczy przyciągający (odp. odpychający) nie zawierający podzbiorów właściwych o tej samej własności nazywany jest *atraktorem* (odp. *repellerem).*

Szczególnym przykładem atraktora jest przyciągający punkt stały x_0 : $\lim_{t\to\infty} d(\pi(t,x), x_0) = 0$ dla x dostatecznie bliskich x_0 lub przyciągająca trajektoria okresowa. Dla równań różniczkowych $x' = f(x)$ taką własność punktu x_0 (tu $f(x_0) = 0$) przy $f \in C^1$ łatwo sprawdzić; wystarczy znaleźć wartości własne macierzy $f'(x_0)$ – jeśli ich części rzeczywiste są ujemne, to punkt x_0 jest przyciągający. Dla rozwiązania okresowego równania $x' = f(x)$ sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, ale również zbadana do końca. Od dawna jednak wiadomo (już Henri Poincaré, twórca jakościowej teorii równań różniczkowych o tym pisał w 1989 r.), że pewne układy dynamiczne dane przez równania różniczkowe mogą posiadać atraktory inne niż przyciągające punkty stałe i trajektorie okresowe. Atraktor taki od razu musi mieć skomplikowaną strukturę topologiczną dlatego często nazywany jest *dziwnym.*

W czasach Poincaré i poźniej znalezienie dziwnego atraktora było niemożliwe, bo środki teoretyczne zawodziły: często można było wykazać istnienie przyciągającego zbioru niezmienniczego A, ale udowodnienie, że nie jest on trajektorią okresową o, być może bardzo dużym okresie, wykraczało poza możliwości teorii topologicznej i analitycznej. Gdy pojawiły się komputery, możliwe stało się rysowanie przybliżonych trajektorii równań różniczkowych ale nadal błąd przybliżenia, zawsze obecny, pozostawiał możliwość, że trajektorie te zbliżają się do pewnej trajektorii okresowej o okresie większym niż zakres obliczeń. Eksperymenty numeryczne wskazały jednak układy, w których takie atraktory się pojawiają.

Pierwszy był atraktor w *układzie Lorenza* (1963) [11]

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x) & , \quad \sigma = 10 \\ y' = rx - y - xz & , \quad r > 24,74 \\ z' = -\beta z + xy & , \quad \beta = \frac{8}{3} \end{cases}$$

(przybliżony opis równań cząstkowych modelujących konwekcję w atmosferze). Później układy o podobnym zachowaniu w eksperymentach numerycznych zaobserwowano wielokrotnie (Rössler, Chua, nieautonomiczne równanie Duffinga itp., a także w układach nieskończenie wymiarowych). Wszystkie te układy wykazywały wspólne cechy: były nieliniowe, conajmniej 3-wymiarowe, a atraktor, którego istnienie można było wykazać miał miarę Lebesque'a (μ_3 dla układów 3-wymiarowych) równą 0. Badano wymiar tego atraktora: Hausdorffa, fraktalny, pojemnościowy i inne, i za każdym razem był on mniejszy od wymiaru otaczającej przestrzeni. Te własności mają jednak również trajektorie okresowe, nie można było więc wykluczyć, że atraktor A jest taką trajektorią.

Aby zaatakować problem dziwności atraktora teoretycznie dokonano pewnych uproszczeń. Po pierwsze zamiast czasu ciągłego $t \in \mathbb{R}$ ograniczono się do czasu dyskretnego $t \in \mathbb{Z}$. Układ dyskretny $\pi : \mathbb{Z} \times X \to X$ był zadany przez podanie jednego homeomorfizmu $f = \pi(1,\cdot)$. Wtedy $f^n = \pi(n,\cdot)$ - n-krotne złożenie f z samym sobą, $f^{-1} = \pi(-1,\cdot)$ - odwzorowanie odwrotne. Możemy ewentualnie pójść dalej i opuścić założenie, że $f : X \to X$ jest homeomorfizmem, pozostawiając jedynie jego ciągłość. W takim przypadku można nadal mówić o trajektoriach $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, punktach stałych $f(x_0) = x_0$, trajektoriach okresowych $f^{n_0}(x) = x$ dla pewnego $n_0 > 1$, o przyciąganiu, atraktorach itd. Zachowania podobne do układów ciągłych typu Lorenza można zaobserwować już dla $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danego wzorem $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ gdzie $\mu > 4$. Układ taki posiada repeller $A \subset [0,1]$, który jest zbiorem homeomoficznym ze zbiorem Cantora.

Opis trajektorii leżących w zbiorze A (są to jedyne trajektorie ograniczone) jest zresztą zadziwiający. Po pierwsze $f|_A : A \to A$ jest *topologicznie tranzytywne* tzn. z dowolnie małego otoczenia jednego punktu x można dojść dowolnie blisko drugiego punktu y i to dla każdych dwóch punktów $x, y \in A$. Po drugie $f|_A$ jest *wrażliwe na warunki początkowe* tzn. trajektorie dwóch dowolnie bliskich punktów $x, y \in A$ po pewnym czasie oddalają się na odległość większą od pewnej liczby dodatniej $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_0 > 0$. Po trzecie wreszcie w zbiorze A trajektorie okresowe tworzą zbiór gęsty. Występowanie tych trzech zjawisk w układzie dynamicznym uznano za definicyjną własność układów chaotycznych. Współcześnie przyjmowana definicja układów chaotycznych jest nieco bardziej restrykcyjna, ale też jest prostsza do weryfikacji (*układ chaotyczny* to układ semisprzężony z przesunięciem Bernoulliego - wyjaśnienie tych pojęć wykraczałoby poza ramy tego opracowania). Także układ dyskretny $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$ dla $\mu = 4$ jest chaotyczny (Misiurewicz [13]).

Układ dynamiczny z czasem ciągłym możemy zdyskretyzować przyjmując $f = \pi(\tau, \cdot)$, gdzie $\tau > 0$ jest ustalone. Układ z czasem ciągłym uważamy za chaotyczny, jeśli dla pewnego $\tau > 0$ ten układ dyskretny jest taki. W ostatnich latach nastąpił przełom w badaniu układów z czasem ciągłym: Mrozek i Mischaikov (1996) [14] wykazali, że układ Lorenza posiada atraktor, po obcięciu do którego otrzymujemy układ chaotyczny. Atraktor ten jest więc dziwny. Metoda przez nich zastosowana znajduje teraz szerokie zastosowanie w badaniu skomplikowanych układów dynamicznych. Polega ona, najogólniej mówiąc, na znajdowaniu pewnego niezmiennika topologicznego układu zwanego indeksem Conleya. Znajduje się go z pomocą komputera uwzględniając błąd obliczeń numerycznych – ewoluuje nie punkt startu trajektorii, a cała kostka o środku w tym punkcie. Dowód Mrozka i Mischaikova jest więc następnym w serii ważnych rezultatów otrzymanych z asystą komputera.

Wprowadzenie do teorii równań różniczkowych zwyczajnych z punktu widzenia układów dynamicznych – por. [20]; wprowadzenie do dyskretnych układów dynamicznych – [3]; bogata w zastosowania i szczegółowa analiza układów dynamicznych – [7, 18, 21]; atraktory w układach dynamicznych zadanych przez równania cząstkowe – [19].

2 Nieliniowe zagadnienia brzegowe

Jak wiadomo równania różniczkowe i to zarówno zwyczajne jak cząstkowe, mają na ogół wiele rozwiązań, a wybór jednego z nich odbywa się przez podanie dodatkowych warunków. Jeśli równanie modeluje jakiś proces fizyczny, chemiczny czy biologiczny, wówczas warunki te w naturalny sposób pochodzą z tych realiów. Dla przykładu opisując ugięcie belki o długości l zamocowanej w dwóch końcach pod działaniem pewnej siły f, mamy do czynienia z równaniem różniczkowym postaci

$$u''(x) + au(x) = f(x) \tag{1}$$

z warunkami

$$u(0) = 0 = u(l). \tag{2}$$

Liczba $u(x)$ opisuje odchylenie punktu x od położenia równowagi. Rozwiązaniem jest tu funkcja klasy $C^2(0,l)$, ciągła na $[0,l]$. Zauważmy, że charakter układu obu równań jest inny niż zagadnienia początkowego, w którym do równania (1) dodajemy warunek początkowy

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{3}$$

w tym sensie, że rozwiązanie układu (1), (2) jest zadane na z góry określonym przedziale $[0,l]$, podczas gdy rozwiązanie układu (1), (3) jest zdefiniowane w pewnym, być może bardzo małym, otoczeniu $x = 0$. Układy takie, jak (1), (2) noszą nazwę *zagadnień brzegowych* i spotykane są jeszcze częściej dla równań różniczkowych cząstkowych np. *zagadnienie Dirichleta:*

$$\begin{aligned} &\Delta u = f(x) \quad \text{w} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ &u\,|\partial\Omega = \varphi \end{aligned}$$

opisujące np. potencjał pola elektrycznego generowanego w zbiorze Ω przez ładunek o gęstości f, gdy na brzegu tego obszaru potencjał ten jest z góry zadany - ze względów fizycznych $n = 3$. Przedstawione równania różniczkowe są liniowe, ale nieco bardziej realistyczne modele prowadzą do równań nieliniowych, dla których przypadek cząstkowy jest nieporównanie bardziej skomplikowany od zwyczajnego. Dlatego w tym opracowaniu ograniczymy się do przypadku zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Zacznijmy od równania nieliniowego rzędu pierwszego w $\mathbb{R}^k$:

$$x' + A(t)\,x = f(t,x) \tag{4}$$

z warunkiem brzegowym

$$B_1 x(a) + B_2 x(b) = c, \tag{5}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^k$, $t \in [a,b]$, $f : [a,b] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą, $A : [a,b] \to L\left(\mathbb{R}^k\right)$ - zbiór operatorów liniowych $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $B_1, B_2 \in L\left(\mathbb{R}^k\right)$, $c \in \mathbb{R}^k$. Jeśli przez $U : [a,b]^2 \to L\left(\mathbb{R}^k\right)$ oznaczymy *rezolwentę równania liniowego* $x' + A(t)\,x = 0$ tzn. funkcję o własnościach

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0, \quad t,s \in [a,b]$$

$$U(t,t) = id_{\mathbb{R}^k}, \quad t \in [a,b]\,,$$

to ze wzoru na uzmiennienie stałych rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$x' + A\,(t)\,x = r\,(t)\,, \quad x\,(a) = x_0,$$

jest funkcja

$$\varphi\,(t) = U\,(t,a)\,x_0 + \int_a^t U\,(t,s)\,r\,(s)\,ds.$$

Aby znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$x' + A\,(t)\,x = r\,(t)\,, \quad B_1 x\,(a) + B_2 x\,(b) = c, \tag{6}$$

musimy wybrać taki punkt startu x_0, aby $B_1 x_0 + B_2 \varphi\,(b) = c$. Prowadzi to do równania

$$[B_1 + B_2 U\,(b,a)]\,x_0 = c - B_2 \int_a^b U\,(b,s)\,r\,(s)\,ds.$$

Jest to algebraiczne równanie liniowe w $\mathbb{R}^k$, które posiada rozwiązanie przy każdym wyborze c i r wtedy i tylko wtedy, gdy $B_1 + B_2 U\,(b,a)$ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$. W tym przypadku zagadnienie brzegowe (6) posiada dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem (wystarczy obliczyć x_0)

$$\varphi\,(t) = U\,(t,a)\,[B_1 + B_2 U\,(b,a)]^{-1} \left(c - B_2 \int_a^b U\,(b,s)\,r\,(s)\,ds \right) + \int_a^t U\,(t,s)\,r\,(s)\,ds.$$

Nieliniowe zagadnienie brzegowe (4), (5) możemy rozwiązywać w oparciu o powyższe rozważanie. Mianowicie najpierw rozwiązujemy zagadnienie liniowe

$$x' + A\,(t)\,x = 0, \quad B_1 x\,(a) + B_2 x\,(b) = c$$

- rozwiązaniem jest funkcja

$$\varphi_0(t) = U(t,a)\left[B_1 + B_2 U(b,a)\right]^{-1} c,$$

a następnie szukamy rozwiązania φ_1 zagadnienia

$$x' + A(t)x = f(t,x), \quad B_1 x(a) + B_2 x(b) = 0 \tag{7}$$

Funkcja $\varphi_0 + \varphi_1$ jest wtedy rozwiązaniem (4), (5).

Poprzednie obliczenia pokazują, że funkcja φ_1 będąca rozwiązaniem zagadnienia (7) musi spełniać równanie całkowe

$$\varphi(t) = -U(t,a)\left[B_1 + B_2 U(b,a)\right]^{-1} B_2 \int_a^b U(b,s) f(s,\varphi(s))\, ds$$

$$+ \int_a^t U(t,s) f(s,\varphi(s))\, ds;$$

wystarczy wziąć $r(t) = f(t,\varphi(t))$. W odróżnieniu od przypadku liniowego tutaj niewiadoma φ występuje także po prawej stronie pod całką i istnienie funkcji $\varphi \in C\left([a,b], \mathbb{R}^k\right)$ spełniającej to równanie nie jest wcale zagwarantowane. Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$G(t,s) = \begin{cases} -U(t,a)\left[B_1 + B_2 U(b,a)\right]^{-1} B_2 U(b,s) + U(t,s), & s < t \\ -U(t,a)\left[B_1 + B_2 U(b,a)\right]^{-1} B_2 U(b,s), & s > t \end{cases},$$

to równanie całkowe przyjmie postać

$$\varphi(t) = \int_a^b G(t,s) f(s,\varphi(s))\, ds. \tag{8}$$

Funkcję $G : [a,b]^2 \to L\left(\mathbb{R}^k\right)$ nazywamy *funkcją Greena* zagadnienia (4), (5) i jej znajdowanie wymaga jedynie znajomości układu fundamentalnego rozwiązań równania liniowego $x' + A(t)x = 0$.

Prawą stronę równania (8) możemy uważać za definicję pewnego operatora nieliniowego S działającego w przestrzeni funkcji ciągłych $C\left([a,b], \mathbb{R}^k\right)$, która jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|\varphi\| = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$$

($|\cdot|$ oznacza tu normę euklidesową w $\mathbb{R}^k$). Poszukujemy więc punktów stałych operatora S. Do tego celu możemy stosować metodę kolejnych przybliżeń, gdy S spełnia warunek Lipschitza ze stałą < 1, ale udaje się to rzadko, bo wymaga założenia, by funkcja f spełniała ten warunek względem x z dostatecznie małą stałą. Z drugiej strony operator S jest *pełnociągły* tzn. przekształca zbiory ograniczone na zbiory względnie zwarte, więc można stosować twierdzenie Schaudera o punkcie stałym, o ile uda się znaleźć kulę, którą operator S przekształca w siebie. Tak będzie np. gdy f jest globalnie ograniczona, bowiem wtedy S przekształca całą przestrzeń $C\left([a,b],\mathbb{R}^k\right)$ w pewną kulę. W pozostałych przypadkach można stosować teorię *stopnia topologicznego Leray'a-Schaudera.* Najczęściej sprowadza się to do użycia następującego

Twierdzenie kontynuacyjne. Jeżeli na brzegu pewnego zbioru otwartego i ograniczonego $\Omega \subset C\left([a,b],\mathbb{R}^k\right)$ zagadnienia brzegowe

$$x' + A(t)\,x = \lambda f(t,x)\,, \quad B_1 x(a) + B_2 x(b) = 0 \tag{9}$$

dla $\lambda \in [0,1]$ nie posiadają rozwiązania, to zagadnienie (4), (5) posiada rozwiązanie $\varphi \in \Omega$.

Zagadnienie (9) jest bowiem równoważne równaniu $(I - \lambda S)\,\varphi = 0$, z założenia homotopia $H(\lambda,\cdot) = I - \lambda S$ nie znika na brzegu Ω, więc stopień Leray'a-Schaudera wszystkich odwzorowań $H(\lambda,\cdot)$ jest taki sam. W szczególności $\deg(I - S,\Omega) = \deg(H(0,\cdot),\Omega) = \deg(I,\Omega) = 1$, a więc S ma punkt stały w Ω. Wszystko sprowadza się więc do poszukiwania założeń na funkcję f, przy których warunki tego twierdzenia są spełnione. Przykładowo, jeśli A jest dodatnio określona i $(f(t,x),x) \geq 0$ dla $|x| = M$, $t \in [a,b]$ dla pewnego dostatecznie dużego $M > 0$, to zagadnienie brzegowe

$$x' - Ax = f(t,x)\,, \quad B_1 x(a) + B_2 x(b) = 0$$

posiada rozwiązanie φ takie, że $|\varphi(t)| < M$ dla $t \in [a,b]$.

Powyższe rozważania można stosować do wielu zagadnień brzegowych. Dla przykładu do zagadnienia Dirichleta:

$$x'' = f(t,x,x')\,, \quad x(a) = 0 = x(b)\,,$$

do zagadnienia okresowego

$$x' + A(t)\,x = f(t,x)\,, \quad x(0) = x(T)$$

gdzie $A : \mathbb{R} \to L\left(\mathbb{R}^k\right)$ jest T - okresowa, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest T - okresowa względem t pod warunkiem, że $x' + A(t)\,x = 0$ nie ma nietrywialnych rozwiązań T - okresowych. Dla wszystkich tych zagadnień jednorodne zagadnienie liniowe nie posiada niezerowych rozwiązań; w rozważanym zagadnieniu oznaczało to izomorficzność operatora $B_1 + B_2 U\left(b, a\right)$. Zagadnienie nieliniowe, dla których część liniowa ma tę własność nazywamy *nierezonansowymi.* Ale już na przykład zagadnienie okresowe

$$x' = f\left(t, x\right), \quad x\left(0\right) = x\left(T\right),$$

jest rezonansowe, bowiem funkcje stałe są nietrywialnymi rozwiązaniami

$$x' = 0, \quad x\left(0\right) = x\left(T\right).$$

Podobna uwaga dotyczy zagadnienia Neumanna

$$x'' = f\left(t, x, x'\right), \quad x'\left(a\right) = 0 = x'\left(b\right).$$

Zagadnień rezonansowych nie można zamienić na pytanie o punkt stały pewnego operatora.

Aby udowodnić istnienie rozwiązania zagadnienia rezonansowego stosuje się *stopień koincydencji* wprowadzony 30 lat temu przez J. Mawhina [12]. W ujęciu abstrakcyjnym pozwala on badać równanie

$$Lx = N(x)$$

w przestrzeniach Banacha, gdzie N jest ciągłym operatorem nieliniowym, a L fredholmowskim operatorem liniowym indeksu 0 tzn.

$$\dim \ker L = \text{ codim } \operatorname{im} L < \infty.$$

Taka sytuacja ma miejsce dla wszystkich rezonansowych zagadnień dla równań różniczkowych zwyczajnych i dla większości zagadnień dla równań cząstkowych. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie kontynuacyjne Mawhina. Jeżeli na brzegu zbioru otwartego i ograniczonego $\Omega \subset X$ (p. Banacha) równania

$$Lx = \lambda N\left(x\right)$$

nie mają rozwiązań przy $\lambda \in [0, 1)$ i

$$\deg\left(N\left|\ker L\right., \Omega \cap \ker L\right) \neq 0,$$

to równanie $Lx = N(x)$ posiada rozwiązanie $x \in \overline{\Omega}$.

Do zagadnień rezonansowych prościej jednak zastosować metodę perturbacyjną. Wybierając ciąg $\lambda_n \to 0$ w ten sposób, by $L - \lambda_n I$ był operatorem odwracalnym, otrzymujemy ciąg równań $Lx - \lambda_n x = N(x)$ lub równoważnie $x = (L - \lambda_n I)^{-1} N(x)$. Istnienie punktu stałego x_n dla $n \in N$ dostajemy metodami wspomnianymi poprzednio dla zagadnień nierezonansowych. Na ogół ciąg (x_n) może być nieograniczony. Jednak spełnienie pewnego prostego warunku zwanego *warunkiem Landesmana-Lazera* gwarantuje ograniczoność tego ciągu. Z ciągu (x_n) można wtedy wybrać podciąg zbieżny do rozwiązania równania $Lx = N(x)$.

Rozpatrzmy tę metodę na przykładzie zagadnienia okresowego

$$x' = f(t,x), \quad x(0) = x(T).$$

Załóżmy, że istnieją jednostajne granice

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(t, \lambda d) := g(t,d)$$

dla $t \in [0,T]$ i $|d| = 1$. Wprowadźmy „uśrednioną" funkcję g_0 dla $d \in \mathbb{R}^k$, $|d| = 1$

$$g_0(d) = \int_0^T g(t,d)\,dt.$$

Wtedy zachodzi

Twierdzenie [17]. Jeżeli $(d, g_0(d)) \leq 0$ dla wszystkich $|d| = 1$, to zagadnienie okresowe posiada rozwiązanie.

Dla dowodu wystarczy rozważyć ciąg zagadnień

$$x' - \frac{1}{n}x = f(t,x), \quad x(0) = x(T),$$

które są nierezonansowe, więc z ograniczoności funkcji f i twierdzenia Schaudera posiadają rozwiązania φ_n. Ciąg (φ_n) nie może być nieograniczony, bowiem w przeciwnym razie pewien jego podciąg po unormowaniu $\frac{\varphi_n(t)}{\|\varphi_n\|}$ zbiegałby do wektora stałego o normie 1. Oznaczając go przez d mielibyśmy $f(t, \varphi_n(t)) \to g(t,d)$ i stąd

$$\frac{\varphi_n(t)}{\|\varphi_n\|} \to \frac{g_0(d)}{|g_0(d)|},$$

co przeczy założeniu $(d, g_0(d)) \leq 0$. To ono nazywamy w tym wypadku warunkiem Landesmana-Lazera.

Poza naszymi dotychczasowymi rozważaniami pozostały zagadnienia brzegowe na zbiorach nieograniczonych takie, jak:

$$\begin{array}{lll} x' = f(t,x), & x(0) = a, & \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0, \\ x' = f(t,x), & x \text{ ograniczona na } & \mathbb{R}, \end{array}$$

i analogiczne zagadnienia dla równania rzędu drugiego. Drugie z nich jest rezonansowe, a pierwsze nie, ale nie to stanowi zasadniczą trudność w obu przypadkach. Problemem jest niezwartość operatora S w przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych na $[0,\infty)$, w pierwszym przypadku i niefredholmowskość operatora $Lx = x'$ w drugim - (im L jest niedomkniętą podprzestrzenią przy każdym sensownym wyborze przestrzeni Banacha. Nie możemy więc stosować stopnia Leray'a-Schaudera w pierwszym przypadku i stopnia koincydencji w drugim.

W pierwszym przypadku stosuje się zwykle metodę polegającą na badaniu ciągu zagadnień

$$x_n' = f(t, x_n), \quad x_n(0) = a, \quad x_n(n) = 0,$$

które są nierezonansowymi zagadnieniami brzegowymi na zbiorze ograniczonym $[0,n]$. Ich rozwiązania φ_n dostajemy przy użyciu wcześniej opisanych metod, funkcje φ_n przedłużamy na $[0,\infty)$, kładąc $\varphi_n(t) = 0$ dla $t > n$ i jedynym problemem jest udowodnienie względnej zwartości ciągu (φ_n) w przestrzeni funkcji $C_0\left([0,\infty), \mathbb{R}^k\right)$ ciągłych i znikających w nieskończoności.

W przypadku zagadnienia rezonansowego możemy zastosować wcześniej opisaną metodę perturbacyjną. Jedyne trudności, jakie napotykamy są natury technicznej i zostały pokonane w serii prac W. Karpińskiej uwieńczonych rozprawą doktorską. Ta metoda została też z powodzeniem zastosowana do zewnętrznego zagadnienia brzegowego Dirichleta dla równania cząstkowego

$$\begin{array}{lll} \Delta u = f(x,u) & \text{dla} & x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}, \\ u\,|\partial\Omega = 0, & & \\ u \text{ ograniczona na } \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}, & & \Omega \text{ - kula o środku 0 w } \mathbb{R}^n, \end{array}$$

przez R. Stańczego. Operatory całkowe, które się pojawiają dla równań różniczkowych cząstkowych, w naturalny sposób działają jednak w przestrzeniach Sobolewa dla naszych celów niewygodnych (wygodna jest przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych $BC\left(\mathbb{R}^n \backslash \Omega\right)$, bo przynależność do niej gwarantuje spełnienie ostatniego warunku brzegowego). Nawet pobieżny opis pokonania tego problemu wykracza poza ramy tego opracowania.

Inny przykład omawianej metody można znaleźć w niedawno przygotowanej pracy K. Szymańskiej dotyczącej zagadnień:

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0,$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0.$$

Drugie z nich jest rezonansowe ale zaburzenie dokonane w samym równaniu różniczkowym nic nie daje,a należy go dokonać w warunku brzegowym

$$x'(0) = \lambda x(0).$$

Metody topologiczne i inne w rozwiązywaniu równań nieliniowych – [2]; teoria stopnia topologicznego odwzorowań – [10]; bardziej zaawansowane metody rozwiązywania zagadnień brzegowych – [1, 5, 6, 15]; wprowadzenie opisanych metod perturbacyjnych – [16].

Bibliografia

[1] L. Cesari, Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method w Nonlinear Analysis and Differential Equations, edited by L. Cesari, R. Kennan, J. Schuur, Marcel Dekker Inc., New York 1976.

[2] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1985.

[3] R. Devaney, Chaotic Dynamical Systems, Addison-Wesley Publ. Co., New York 1989.

[4] J. Dugundji, A. Granas, Fixed Point Theory I, PWN, Warszawa 1981.

[5] S. Fučik, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht 1980.

[6] A. Granas, R. Guenther, J. Lee, Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations, Dissertationes Math. 244 (1985).

[7] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlineary Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

[8] J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[9] E.M. Landesman, A.C. Lazer, Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[10] N.G. Lloyd, Degree Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1978.

[11] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos, Sci. 20 (1963), 130-141.

[12] J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. 40, Amer. Math. Soc., Providence RI 1977.

[13] M. Misiurewicz, Absolutely continuons measures for certain maps of an interval, Publ. Math. I.H.E.S. 53 (1981), 17-51.

[14] M. Mrozek, K. Mischaikov, Chaos in the Lorenz equations, a computer assisted proof, Bull. Amer. Math. Soc. 32, 1 (1995), 66-72.

[15] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis, Lecture Notes Courant Inst., New York 1974.

[16] B. Przeradzki, Badanie rozwiązalności równań nieliniowych z nieodwracalną częścią liniową, Wyd. UŁ, Łódź 1993.

[17] B. Przeradzki, Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych, Wyd. UŁ, Łódź 2003.

[18] C. Robinson, Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, CRS Press, Boca Raton-London-New York 1999.

[19] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1988.

[20] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin-Hedelberg-New York 1990.

[21] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York 1990.